

**Institut Galilée  
Université Paris XIII  
Mathématiques  
Licence première année  
Cours d'algèbre linéaire et d'algorithmique  
Tome III**

Année 2018-2019



## VIII. Applications linéaires

Référence pour ce chapitre : Liret & Martinais<sup>1</sup>.

Une application linéaire est une application d'un espace vectoriel dans un autre qui est compatible avec la structure d'espace vectoriel. Une base de l'espace vectoriel de départ et une base de l'espace vectoriel d'arrivée étant données, ces applications linéaires s'identifient aux matrices, vues au chapitre III, la composition des applications s'identifiant au produit matriciel. La partie 1 de ce chapitre est consacrée à des définitions et des propriétés élémentaires, la partie 2 à la correspondance entre les applications linéaires et les matrices. En 3, on définit des opérations sur les applications linéaires et on identifie ces opérations aux opérations matricielles. La suite du chapitre est consacrée au lien des applications linéaires avec les objets étudiés aux chapitres IV et V : bases, sous-espaces vectoriels, dimension.

On se donne dans tout ce chapitre un corps  $\mathbb{K}$ .

### 1. Définitions et premières propriétés

#### 1.a. Définitions et exemples

Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . On notera  $\vec{0}_E$  (respectivement  $\vec{0}_F$ ) le vecteur nul de  $E$  (respectivement  $F$ ).

**Définition 1.1.** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . On dit que  $f$  est une *application linéaire* de  $E$  dans  $F$  quand les deux conditions suivantes sont respectées :

$$(VIII.1) \quad \forall(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \quad f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

$$(VIII.2) \quad \forall\vec{x} \in E, \forall\lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}).$$

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

Une application linéaire de  $E$  dans  $E$  est appelée *endomorphisme* de  $E$ . On note pour simplifier  $\mathcal{L}(E)$  (au lieu de  $\mathcal{L}(E, E)$ ) l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

**Exemples 1.2.** i. Si  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , l'application  $h_\lambda : \vec{x} \mapsto \lambda\vec{x}$  est un endomorphisme de  $E$ , appelée *homothétie* de rapport  $\lambda$ . L'application  $h_1$  est simplement l'identité de  $E$ .

ii. L'application constante nulle,  $\vec{x} \mapsto \vec{0}_F$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , notée  $0_{E \rightarrow F}$  ou, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté,  $0$ .

iii. L'application  $f$  définie par  $f((x, y)) = 3x - 4y$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . La même formule définit une application linéaire de  $\mathbb{C}^2$  dans  $\mathbb{C}$ .

<sup>1</sup>. François Liret et Dominique Martinais. *Algèbre 1ère année - Cours et exercices avec solutions*. Dunod, deuxième édition, 2003

iv. La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^3$  n'est pas une application linéaire de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . En effet,

$$f(2 \times 1) = f(2) = 8 \text{ mais } 2f(1) = 2 \neq 8.$$

v. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . La rotation  $R_\theta$  de  $\mathbb{R}^2$  de centre  $(0, 0)$  et d'angle  $\theta$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . En effet, on a la formule (à vérifier) :

$$R_\theta((x, y)) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$

dont on déduit facilement le résultat annoncé. Voir aussi l'exercice 1.5 plus loin.

*Remarque 1.3.* Si  $f$  est une application définie sur  $\mathbb{R}^n$ , l'image d'un vecteur  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  s'écrit  $f((x_1, \dots, x_n))$ , avec deux paires de parenthèses : les parenthèses extérieures signifient "l'image par  $f$ ", les parenthèses intérieures sont celles apparaissant dans l'écriture du  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$ . Il est d'usage, pour alléger les notations, d'omettre de doubler les parenthèses. Par souci de rigueur, nous utiliserons systématiquement dans ce cours la notation avec les parenthèses doublées.

#### 1.b. Quelques propriétés

**Proposition 1.4.** Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ .

*Démonstration.*

$$f(\vec{0}_E) = f(0 \times \vec{0}_E) = 0f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F. \quad \square$$

*Exercice 1.5.* Soit  $M$  un point du plan  $\mathbb{R}^2$ , différent de l'origine  $(0, 0)$ , et  $\theta \in (0, 2\pi)$ . La rotation  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  de centre  $M$  et d'angle  $\theta$  est-elle une application linéaire ?

(cf correction p. 14).

**Proposition 1.6.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$  des éléments de  $E$ . Alors

$$f(\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k) = \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \dots + \lambda_k f(\vec{u}_k).$$

*Démonstration.* Si  $k = 2$ , on démontre la formule en utilisant successivement les conditions (VIII.1) et (VIII.2) de la définition 1.1 :

$$f(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2) = f(\lambda_1 \vec{u}_1) + f(\lambda_2 \vec{u}_2) = \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \lambda_2 f(\vec{u}_2).$$

Le cas général se démontre par récurrence sur  $k$ . □

**Corollaire 1.7.** On suppose  $E$  de dimension  $n$ . Soit  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  une base de  $E$ , et  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  des vecteurs de  $F$ . Alors il existe une unique application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que

$$(VIII.3) \quad \forall j = 1 \dots n, \quad f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j.$$

*Démonstration.* Supposons que  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  vérifie (VIII.3). Soit  $\vec{x}$  un élément de  $E$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ . Alors par la proposition 1.6

$$(VIII.4) \quad f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n) = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n,$$

ce qui montre l'unicité de  $f$  vérifiant (VIII.3). Pour montrer l'existence, il suffit de définir  $f$  par la formule (VIII.4), ce qui a un sens puisque  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ . On vérifie aisément que l'application obtenue est un élément de  $\mathcal{L}(E, F)$  tel que pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j$ .  $\square$

*Exemple 1.8.* Soit  $\vec{u} = (1, 3)$ ,  $\vec{v} = (1, 4)$ . Alors il existe une unique application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que  $f(\vec{u}) = (-1, 2, 3)$ ,  $f(\vec{v}) = (0, 0, 0)$ .

*Exercice 1.9.* Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Calculer  $f((x, y))$  où  $f$  est l'application de l'exemple précédent. (Correction p. 14).

## 2. Applications linéaires et matrices

### 2.a. Matrice de représentation d'une application linéaire

On montre ici que sur les espaces vectoriels de dimension finie<sup>2</sup>, une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée étant données, une application linéaire s'identifie à une matrice.

On rappelle que les  $n$  coordonnées d'un vecteur dans une base d'un espace vectoriel de dimension  $n$  sont toujours notées en colonnes, et considérées comme une matrice  $n \times 1$ . Par exemple, les coordonnées d'un élément  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{K}^n$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  sont notées :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

**Définition 2.1.** Soit  $E, F$  des espaces vectoriels de dimensions respectives  $n$  et  $p$ . Soit  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$  une base de  $F$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . La *matrice de représentation de  $f$*  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  (ou plus simplement *matrice de  $f$*  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ ), notée  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  est la matrice  $p \times n$  dont le coefficient  $(i, j)$  est donné par la  $i$ -ième coordonnée de  $f(\vec{u}_j)$  dans la base  $\mathcal{C}$ . En d'autres termes, la  $j$ -ième colonne de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  est donnée par les coordonnées de  $f(\vec{u}_j)$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

<sup>2</sup>. On rappelle que nous étudions principalement dans ce cours les sous espaces-vectoriels de  $\mathbb{K}^n$ , qui sont tous des espaces vectoriels de dimension finie.

Les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  étant fixées, on montre facilement (en utilisant le Corollaire 1.7) que pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{p, n}(\mathbb{K})$ , il existe une unique application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ . En d'autres termes, l'application  $f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  de  $\mathcal{L}(E, F)$  dans  $\mathcal{M}_{p, n}(\mathbb{K})$  est une bijection<sup>3</sup>. Il est donc équivalent de considérer les applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et les matrices  $p \times n$ . Le point de vue "application linéaire" est intrinsèque : il ne dépend pas du choix de bases de  $E$  et  $F$ . Le point de vue matriciel n'a pas cette propriété, mais est plus adapté aux calculs explicites.

### 2.b. Exemple : cas des bases canoniques

Soit  $f$  une application linéaire de  $\mathbb{K}^n$  dans  $\mathbb{K}^p$ ,  $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$  sa matrice dans les bases canoniques de  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathbb{K}^p$ . Alors, en notant  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  :

$$(VIII.5) \quad \begin{aligned} f((x_1, x_2, \dots, x_n)) &= f(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n) = \sum_{j=1}^n x_j f(\vec{e}_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j (a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{p,j}) \\ &= \left( \sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j, \sum_{j=1}^n a_{2,j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{p,j} x_j \right). \end{aligned}$$

On peut donc facilement reconnaître une application linéaire de  $\mathbb{K}^n$  dans  $\mathbb{K}^p$  : chacune de ses coordonnées dans  $\mathbb{K}^p$  est donnée, comme dans (VIII.5), par une combinaison linéaire de coordonnées dans  $\mathbb{K}^n$ . De plus, on lit sur cette formule les coefficients de la matrice de l'application linéaire dans les bases canoniques.

*Exemple 2.2.* La formule

$$(VIII.6) \quad \begin{aligned} f((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) \\ = (\pi x_1 + 4x_3 + x_5, ix_3 + \sqrt{2}x_4 + x_5, -x_1 + x_2, x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4) \end{aligned}$$

qui dit que les coordonnées de  $f((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))$  dans la base canonique sont :

$$(VIII.7) \quad \begin{bmatrix} \pi x_1 + 4x_3 + x_5 \\ ix_3 + \sqrt{2}x_4 + x_5 \\ -x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

définit une application linéaire de  $\mathbb{C}^5$  dans  $\mathbb{C}^4$ . Sa matrice dans les bases canoniques

<sup>3</sup>. cf 4.c p. 7 pour un rappel sur les bijections.

(qui se lit sur la formule (VIII.7)) est :

$$\begin{bmatrix} \pi & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Exemple 2.3.* La matrice de représentation de la rotation  $R_\theta$  de centre 0 et d'angle  $\theta$  (cf Exemple 1.2, v) est :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

## 2.c. Cas général

Donnons un exemple de calcul de matrice de représentation dans des bases autres que les bases canoniques.

*Exemple 2.4.* Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  défini par

$$(VIII.8) \quad f((x_1, x_2)) = \frac{1}{2}(x_1 + 3x_2, 3x_1 + 5x_2, -x_1 + x_2).$$

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ ,  $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ , où

$$\vec{u}_1 = (-1, 1), \quad \vec{u}_2 = (1, 1), \quad \vec{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, 2, 0), \quad \vec{v}_3 = (1, 0, 0).$$

On vérifie facilement que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont des bases de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  respectivement. Calculons

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f).$$

La formule (VIII.8) nous donne :

$$f(\vec{u}_1) = (1, 1, 1) = \vec{v}_1, \quad f(\vec{u}_2) = (2, 4, 0) = 2\vec{v}_2.$$

D'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Remarquons que cette matrice est complètement différente de la matrice de  $f$  dans

les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ ,  $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , qui se lit sur la formule (VIII.8).

Dans cet exemple, la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  est beaucoup plus simple que sa matrice dans les bases canoniques. On voit ici l'intérêt que peut représenter le choix d'une autre base que la base canonique pour écrire la matrice d'une application linéaire.

Comme le montre l'exemple précédent, le calcul de la matrice de représentation d'une application linéaire  $f$  dans les bases  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ ,  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  se décompose en deux étapes :

— le calcul de  $f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)$ ;

— le calcul des coordonnées de  $f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)$  dans la base  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  : soit, en général, la résolution de  $n$  systèmes de Cramer, chacun à  $p$  équations et  $p$  inconnues. Dans l'exemple précédent, ce calcul était immédiat.

Il est aussi possible de déterminer la matrice de représentation de  $f$  par des calculs matriciels, à l'aide de la formule de changement de bases qui n'est pas au programme du cours cette année mais est donnée en complément (cf partie 6).

## 2.d. Un exemple de changement de base

Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels de dimensions finies et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On se donne deux bases de  $E$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\tilde{\mathcal{B}}$  et deux bases de  $F$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Peut-on exprimer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  en fonction de  $\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}}}(f)$ ? La formule de changement de bases (cf partie 6), hors programme cette année, permet de répondre à cette question. On peut aussi le faire par des calculs directs. On donne ici un exemple d'un tel calcul.

On suppose  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $F = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ ,  $\tilde{\mathcal{B}} = (\vec{\tilde{u}}_1, \vec{\tilde{u}}_2)$ ,  $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ ,  $\tilde{\mathcal{C}} = (\vec{\tilde{v}}_1, \vec{\tilde{v}}_2, \vec{\tilde{v}}_3)$  avec

$$\vec{u}_1 = (1, 1), \quad \vec{u}_2 = (1, -1), \quad \vec{\tilde{u}}_1 = (1, 1), \quad \vec{\tilde{u}}_2 = (1, 0)$$

et

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (1, -1, 0), & \vec{v}_2 &= (1, 1, 0), & \vec{v}_3 &= (0, 0, 1), \\ \vec{\tilde{v}}_1 &= (1, 0, 0), & \vec{\tilde{v}}_2 &= (1, 1, 0), & \vec{\tilde{v}}_3 &= (1, 0, 1). \end{aligned}$$

On suppose de plus

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

On cherche à calculer  $\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}}}(f)$ .

*Première étape.* On commence par calculer  $f(\vec{\tilde{u}}_1)$  et  $f(\vec{\tilde{u}}_2)$ . Puisqu'on connaît  $f(\vec{u}_1)$  et  $f(\vec{u}_2)$ , il suffit de trouver les coordonnées de  $\vec{\tilde{u}}_1$  et  $\vec{\tilde{u}}_2$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On a :

$$\vec{\tilde{u}}_1 = \vec{u}_1 \text{ et } \vec{\tilde{u}}_2 = \frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2$$

(la deuxième égalité s'obtient par résolution du système  $x_1 + x_2 = 1$ ,  $x_1 - x_2 = 0$ ). Donc, en utilisant l'expression de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ ,

$$\begin{aligned} f(\vec{\tilde{u}}_1) &= f(\vec{u}_1) = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3, \\ f(\vec{\tilde{u}}_2) &= \frac{1}{2}f(\vec{u}_1) + \frac{1}{2}f(\vec{u}_2) = \frac{1}{2}(-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3) + \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_3) = \vec{v}_2 + \frac{5}{2}\vec{v}_3. \end{aligned}$$

*Deuxième étape.* On a obtenu les coordonnées de  $f(\vec{\tilde{u}}_1)$  et  $f(\vec{\tilde{u}}_2)$  dans la base  $\mathcal{C}$ . On a besoin des coordonnées de ces vecteurs dans la base  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Il suffit pour cela d'écrire les

### VIII. Applications linéaires

vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  en fonction de  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$ . En résolvant pour chaque vecteur un système linéaire (dans ce cas précis, échelonné) de trois équations à trois inconnues, on obtient

$$\vec{v}_1 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_2, \quad \vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + \vec{v}_3.$$

D'où, en utilisant la première étape,

$$f(\vec{u}_1) = -(2\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + 2\vec{v}_2 + 3(\vec{v}_3 - \vec{v}_1) = -5\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3,$$

et

$$f(\vec{u}_2) = \vec{v}_2 + \frac{5}{2}(-\vec{v}_1 + \vec{v}_3) = -\frac{5}{2}\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \frac{5}{2}\vec{v}_3.$$

On en déduit

$$\text{Mat}_{\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}}}(f) = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{5}{2} \\ 3 & 1 \\ 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

#### 2.e. Applications linéaires et multiplication par une matrice

La proposition suivante donne une interprétation plus concrète de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ .

**Proposition 2.5.** *Sous les conditions de la définition 2.1, on se donne un vecteur  $\vec{x}$  de  $E$  de coordonnées  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On note  $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$  les coordonnées de  $f(\vec{x})$  dans la base  $\mathcal{C}$ . Alors*

$$Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) X.$$

*Démonstration.* Notons  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ . Alors

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n) = x_1f(\vec{u}_1) + x_2f(\vec{u}_2) + \dots + x_nf(\vec{u}_n) \\ &= x_1 \left( \sum_{i=1}^p a_{i,1}\vec{v}_i \right) + x_2 \left( \sum_{i=1}^p a_{i,2}\vec{v}_i \right) + \dots + x_n \left( \sum_{i=1}^p a_{i,n}\vec{v}_i \right) \end{aligned}$$

En regroupant les termes de la dernière ligne de l'inégalité précédente, on voit que pour  $i = 1 \dots p$ , la coordonnée  $y_i$  de  $\vec{v}_i$  est donnée par

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j,$$

ce qui signifie bien que  $Y = AX$  au sens du produit matriciel.

*Exemple 2.6.* Reprenons l'application linéaire  $f$  de l'exemple 2.4. Les coordonnées de  $f(2\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$  dans la base  $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  sont données par le produit matriciel :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En d'autres termes :

$$f(2\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = 2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

*Exemple 2.7.* L'application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par  $f((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2, 3x_2)$  associe, à un vecteur de coordonnées  $X$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , le vecteur de coordonnées  $AX$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , où

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

## 3. Opérations sur les applications linéaires

### 3.a. Addition et multiplication par un scalaire

**Définition 3.1.** Soit  $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\mu \in \mathbb{K}$ . On définit les applications  $f + g$  et  $\mu f$  de  $E$  dans  $F$  par :

$$(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \quad (\mu f)(\vec{x}) = \mu f(\vec{x}).$$

Dans les deux égalités de la ligne précédente, l'addition et la multiplication par un scalaire apparaissant dans le membre de droite de chaque égalité sont l'addition et la multiplication par un scalaire de l'espace vectoriel  $F$ .

**Proposition 3.2.** *Si  $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\mu \in \mathbb{K}$ , les applications  $f + g$  et  $\mu f$  données par la définition 3.1 sont des éléments de  $\mathcal{L}(E, F)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  deux éléments de  $E$ . En utilisant successivement la définition de  $f + g$ , la linéarité de  $f$  et  $g$ , la commutativité de l'addition sur  $F$  puis à nouveau la définition de  $f + g$ , on obtient :

$$\begin{aligned} (f + g)(\vec{x} + \vec{y}) &= f(\vec{x} + \vec{y}) + g(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) + g(\vec{x}) + g(\vec{y}) \\ &= f(\vec{x}) + g(\vec{x}) + f(\vec{y}) + g(\vec{y}) = (f + g)(\vec{x}) + (f + g)(\vec{y}). \end{aligned}$$

De même, si  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$(f + g)(\lambda\vec{x}) = f(\lambda\vec{x}) + g(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x}) = \lambda(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = (\lambda(f + g))(\vec{x}).$$

Donc  $f + g \in \mathcal{L}(E, F)$ . La démonstration du fait que  $\mu f$  est un élément de  $\mathcal{L}(E, F)$  si  $\mu \in \mathbb{K}$  est très proche et laissée au lecteur.  $\square$

*Remarque 3.3.* On montre aisément que l'addition et la multiplication par un scalaire ainsi définies sur  $\mathcal{L}(E, F)$  lui confèrent une structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Cette propriété ne sera pas utilisée spécifiquement dans ce cours, mais doit être retenue.

*Exemple 3.4.* Soit  $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  définis par

$$f((x_1, x_2)) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2, 0), \quad g((x_1, x_2)) = (x_2 - 2x_1, 0, x_2).$$

Alors :

$$(2f)((x_1, x_2)) = (4x_1 - 2x_2, 2x_1 + 2x_2, 0)$$

et

$$(f + g)((x_1, x_2)) = (0, x_1 + x_2, x_2).$$

### 3.b. Composition

On rappelle que si  $E, F$  et  $G$  sont des ensembles,  $f$  est une application de  $E$  dans  $F$  et  $g$  est une application de  $F$  dans  $G$ , la composée de  $f$  et  $g$ , noté  $g \circ f$ , est définie par

$$\forall x \in E, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

C'est une application de  $E$  dans  $G$  :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & g \circ f & & \end{array}$$

**Proposition 3.5.** Soient  $E, F, G$  des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ .

*Démonstration.* Soit  $\vec{x}, \vec{y} \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . En utilisant la linéarité de  $f$ , puis celle de  $g$ ,

$$g \circ f(\vec{x} + \vec{y}) = g(f(\vec{x} + \vec{y})) = g(f(\vec{x}) + f(\vec{y})) = g(f(\vec{x})) + g(f(\vec{y})) = (g \circ f)(\vec{x}) + (g \circ f)(\vec{y}).$$

et

$$g \circ f(\lambda \vec{x}) = g(f(\lambda \vec{x})) = g(\lambda f(\vec{x})) = \lambda(g \circ f)(\vec{x}).$$

□

*Exercice 3.6.* Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$  donnés par  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  et  $g(x) = (x, -2x, 3x)$ . Calculer  $g \circ f$ .

(correction p. 14).

*Exercice 3.7.* On note  $R_\theta$  la rotation de  $\mathbb{R}^2$  d'angle  $\theta \in \mathbb{R}$  et de centre  $\vec{0}_{\mathbb{R}^2}$ . Soit  $\theta, \sigma \in \mathbb{R}$ . Déterminer  $R_\theta \circ R_\sigma$ .

Quelle est la composée de la symétrie orthogonale de  $\mathbb{R}^2$  d'axe  $Ox$  et de la symétrie orthogonale de  $\mathbb{R}^2$  d'axe  $Oy$  ?

(correction p. 14).

### 3.c. Effet des opérations sur les matrices

Les opérations sur les applications linéaires se traduisent facilement en terme de matrices de représentations :

**Proposition 3.8.** *i.* Soit  $E, F$  des espaces vectoriels de dimensions finies,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C}$  une base  $F$ . Soit  $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f_1) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f_2).$$

*ii.* Soit  $E, F, G$  des espaces vectoriels de dimension finie,  $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$  des bases de respectivement  $E, F$  et  $G$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f).$$

Le point (ii) signifie que la composition des applications se traduit par le produit matriciel de leurs matrices de représentations. Remarquons que le produit matriciel de la dernière ligne de la proposition est bien défini : si  $n = \dim E$ ,  $p = \dim F$  et  $q = \dim G$ , le premier facteur du membre de droite est une matrice  $q \times p$ , le deuxième une matrice  $p \times n$ . Le produit obtenu est bien une matrice  $q \times n$ .

*Avertissement 3.9.* Attention à l'ordre des bases  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  dans le terme de droite de la formule du point (ii).

*Démonstration.* Nous ne démontrerons que le point (ii). La preuve (plus facile) du point (i) est laissée au lecteur.

On note  $n, p$  et  $q$  les dimensions respectives des espaces vectoriels  $E, F$  et  $G$ . Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Soit  $\vec{x}$  le vecteur de  $E$  de coordonnées  $X$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Soit  $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  le vecteur colonne des coordonnées de  $f(\vec{x}) \in F$  dans la base  $\mathcal{C}$ , et  $Z \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$  le vecteur colonne des coordonnées de  $g \circ f(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) \in G$  dans la base  $\mathcal{D}$ . Par la proposition 2.5, appliquée successivement à  $f, g$  et  $g \circ f$

$$Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)X, \quad Z = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g)Y = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)X$$

et

$$Z = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f)X.$$

On en déduit

$$(VIII.9) \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)X = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f)X,$$

ce qui montre l'égalité

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f).$$

En effet, pour passer de (VIII.9) à cette dernière ligne, il suffit d'appliquer (VIII.9) aux matrices colonnes  $X = E_1, \dots, X = E_n$ , où  $E_j$  est le vecteur colonne  $[\delta_{i,j}]_{i=1, \dots, n}$ , c'est à dire le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls, sauf le  $j$ -ième qui vaut 1. □

Remarque 3.10. Le (ii) justifie a posteriori la définition du produit matriciel.

Exercice 3.11. Soit  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $F = \mathbb{R}^3$ ,  $G = \mathbb{R}^2$ . On se donne deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^2$  et une base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^3$ . On suppose que  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$  ont pour matrices de représentation :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) = B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Calculer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f)$ .
- La matrice  $AB$  est-elle la matrice de représentation d'une certaine application linéaire dans des bases que l'on précisera ?

(cf correction p. 14)

Exercice 3.12. Soit, pour  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$M_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Exprimer, pour  $\theta, \sigma \in \mathbb{R}$ , la matrice  $M_\theta M_\sigma$  en fonction d'une certaine matrice  $M_\rho$  ( $\rho$  à déterminer). Comparer avec l'exercice 1.5.

## 4. Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

### 4.a. Rappels

Commençons par rappeler quelques définitions :

**Définition 4.1.** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ , où  $E$  et  $F$  sont des ensembles.

- Si  $A \subset E$ , l'image de  $A$  par  $f$ , notée  $f(A)$ , est le sous-ensemble de  $F$  :

$$f(A) = \{f(a), a \in A\} = \{b \in F \text{ t.q. } \exists a \in E, b = f(a)\}.$$

- Si  $B \subset F$ , l'image réciproque<sup>4</sup> de  $B$  par  $f$ , notée  $f^{-1}(B)$  est le sous-ensemble de  $E$  :

$$f^{-1}(B) = \{a \in E \text{ t.q. } f(a) \in B\}.$$

- On dit que  $f$  est *injective* lorsque chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent dans l'ensemble de départ, i.e :

$$\forall x, y \in E, \quad f(x) = f(y) \implies x = y,$$

ou de manière équivalente :

$$\forall x, y \in E, \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

(deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont des images distinctes).

4. Le lecteur pressé pourra faire l'impasse en première lecture sur cette notion d'image réciproque, qui sera surtout utilisée dans la suite pour définir le noyau d'une application linéaire (cf la remarque 4.8 plus bas qui donne une définition du noyau sans utiliser cette notion explicitement).

- On dit que  $f$  est *surjective* lorsque chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent dans l'ensemble de départ, i.e. lorsque  $f(E) = F$ .

- On dit que  $f$  est *bijjective* lorsqu'elle est injective et surjective. C'est à dire :

$$\forall z \in F, \exists ! x \in E, \text{ t.q. } z = f(x).$$

On appelle *injection*, *surjection*, *bijection* une application injective (respectivement surjective, bijective).

Exercice 4.2. Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Soit  $y \in F$ . Que dire de  $f^{-1}(\{y\})$  si  $f$  est injective (respectivement surjective, bijective) ?

(réponse p. 14).

Remarque 4.3. Il découle immédiatement de la définition d'une bijection qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est bijective si et seulement si elle admet une *application réciproque*, i.e. une application  $g : F \rightarrow E$  telle que  $f \circ g = \text{Id}_F$  et  $g \circ f = \text{Id}_E$ . Cette application est notée  $f^{-1}$ .

Avertissement 4.4. La notation  $f^{-1}$  désigne l'inverse d'une application inversible, mais est aussi utilisée pour désigner l'image réciproque  $f^{-1}(F)$  d'un ensemble  $F$ , même lorsque  $f$  n'est pas inversible. Remarquons que lorsque  $f$  n'est pas inversible, on n'a pas toujours  $f(f^{-1}(B)) = B$  ou  $f^{-1}(f(A)) = A$  (cf l'exercice 4.6).

Avertissement 4.5. L'injectivité d'une application dépend du choix de l'ensemble de départ. Sa surjectivité et sa bijectivité des choix de l'ensemble de départ et de l'ensemble d'arrivée (cf de nouveau l'exercice 4.6).

Exercice 4.6. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $x \mapsto x^2$ . Calculer  $f^{-1}(]-\infty, 0])$ ,  $f^{-1}(\mathbb{R})$ ,  $f^{-1}([0, +\infty[)$ ,  $f(\mathbb{R})$ ,  $f([0, +\infty[)$ , puis  $f(f^{-1}(\mathbb{R}))$  et  $f^{-1}(f([0, +\infty[))$ . La fonction  $f$  est-elle surjective (respectivement injective, bijective) lorsqu'elle est considérée :

- comme une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ?
- comme une application de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, +\infty[$  ?
- comme une application de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  ?
- comme une application de  $[0, +\infty[$  dans  $[0, +\infty[$  ?

(Réponse p. 14).

### 4.b. Image et noyau d'une application linéaire

**Définition 4.7.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . L'image  $f(E)$  de  $E$  par  $f$  est appelée *image* de  $f$  et notée  $\text{Im}(f)$ . L'image réciproque  $f^{-1}(\{\vec{0}_F\})$  de  $\{\vec{0}_F\}$  par  $f$  est appelée *noyau* de  $f$  et notée<sup>5</sup>  $\text{Ker}(f)$ .

5. de l'allemand *Kern* signifiant noyau. La traduction anglaise de noyau (au sens mathématique) est *kernel*.

Remarque 4.8. En d'autres termes, l'image de  $f$  est l'ensemble :

$$\text{Im}(f) = \{\vec{y} \in F \text{ t.q. } \exists \vec{x} \in E, \vec{y} = f(\vec{x})\},$$

et le noyau de  $f$  est l'ensemble :

$$\text{Ker}(f) = \{\vec{x} \in E \text{ t.q. } f(\vec{x}) = \vec{0}_F\}.$$

**Théorème 4.9.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- i. L'image d'un sous-espace vectoriel de  $E$  par  $f$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .
- ii. L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de  $F$  par  $f$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

En particulier, le noyau et l'image de  $f$  sont des sous-espaces vectoriels (de  $E$  et  $F$  respectivement).

*Démonstration.* Soit  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $\vec{0}_E \in G$ , donc  $\vec{0}_F = f(\vec{0}_E) \in f(G)$ .

Soit maintenant  $\vec{u}, \vec{v} \in f(G)$ . Par définition de  $f(G)$ , il existe des vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  de  $G$  tels que  $\vec{u} = f(\vec{x})$  et  $\vec{v} = f(\vec{y})$ . On a

$$\vec{u} + \vec{v} = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y}).$$

Puisque  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $\vec{x} + \vec{y} \in G$  et on déduit de l'égalité précédente  $\vec{u} + \vec{v} \in f(G)$ .

Si de plus  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a  $\lambda\vec{x} \in G$  et donc

$$\lambda\vec{u} = \lambda f(\vec{x}) = f(\lambda\vec{x}) \in f(G),$$

ce qui achève de montrer que  $f(G)$  est bien un sous-espace vectoriel de  $F$ .

Montrons maintenant le deuxième point. Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $F$ . Alors  $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F \in H$ , et donc  $\vec{0}_E \in f^{-1}(H)$ . De plus, si  $\vec{u}, \vec{v} \in f^{-1}(H)$ . Alors

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}),$$

et puisque  $f(\vec{u})$  et  $f(\vec{v})$  sont dans  $H$  et  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ ,  $f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \in H$ , ce qui montre que  $\vec{u} + \vec{v} \in f^{-1}(H)$ .

Enfin, si  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $\vec{u} \in f^{-1}(H)$ , alors  $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$  est un élément de  $H$  puisque  $f(\vec{u})$  est un élément de  $H$ . Donc  $\lambda\vec{u} \in f^{-1}(H)$ . On a bien démontré que  $f^{-1}(H)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .  $\square$

Exemple 4.10. Soit  $A$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ t.q. } x + y + z = 0 \text{ et } x - 2y = 0\}.$$

Alors  $A$  est le noyau de l'application linéaire  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  définie par

$$f((x, y, z)) = (x + y + z, x - 2y).$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . Plus généralement, l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à  $p$  équations et  $n$  inconnues est le noyau d'une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  : on retrouve ainsi que c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

Exemple 4.11. Soit  $B$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  :

$$B = \{(x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Alors  $B$  est l'image de l'application linéaire  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  définie par

$$g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2).$$

Donc  $B$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . Remarquons que

$$B = \text{vect} \left( (1, 1, 2), (1, -1, 1) \right).$$

Exercice 4.12. Soit  $A$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  formé des triplets  $(x_1 + x_2, x_3 - x_4, x_1 - x_3)$ , où  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  vérifie  $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ . Montrer que  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

(cf solution p. 14).

#### 4.c. Injectivité et surjectivité des applications linéaires

**Théorème 4.13.** Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

- i.  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im}(f) = F$ .
- ii.  $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$ .

*Démonstration.* Le point (i) découle immédiatement de la définition de la surjectivité et de celle de l'image d'une application linéaire.

Démontrons (ii).

Supposons  $f$  injective. On sait que  $\vec{0}_E$  est un élément de  $\text{Ker}(f)$ . Soit  $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$ . Alors  $f(\vec{x}) = \vec{0}_F = f(\vec{0}_E)$ , et donc par injectivité  $\vec{x} = \vec{0}_E$ . D'où  $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$ .

Réciproquement, on suppose  $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$ . Soit  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  deux éléments de  $E$  tels que  $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ . Alors

$$f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0}_F,$$

donc  $\vec{x} - \vec{y} \in \text{Ker}(f)$ , et, puisque  $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$ ,  $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}_E$ . On a bien montré que  $f$  était injective.  $\square$

**Définition 4.14.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- i. On dit que  $f$  est un *épimorphisme* si  $f$  est surjective.
- ii. On dit que  $f$  est un *monomorphisme* si  $f$  est injective.

*Exemple 4.15.* On suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$  définie par

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 2x_3, 4x_3).$$

Alors  $f$  est un monomorphisme. En effet, si  $(x_1, x_2, x_3) \in \text{Ker}(f)$ , on a  $x_1 - x_2 + x_3 = x_2 - 2x_3 = 4x_3 = 0$ , dont on déduit facilement  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .

On peut également caractériser l'injectivité ou la surjectivité d'une application linéaire par des propriétés de l'image d'une base de l'espace de départ.

**Proposition 4.16.** Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels. On suppose  $E$  de dimension  $n$ . Soit  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base de  $E$ , et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

- i. La famille  $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$  engendre  $\text{Im}(f)$ . En particulier, l'application  $f$  est un épimorphisme si et seulement si  $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$  est une famille génératrice de  $F$ .
- ii. L'application  $f$  est un monomorphisme si et seulement si  $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$  est une famille libre.

*Démonstration.* Montrons seulement le point (i). Le point (ii) sera démontré en travaux dirigés (cf exercice VIII.10 p. 16).

Les vecteurs  $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$  sont bien dans  $\text{Im}(f)$ . De plus, un vecteur  $\vec{y} \in \text{Im}(f)$  s'écrit  $f(\vec{x})$  avec  $\vec{x} \in E$ . Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées de  $\vec{x}$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On a

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n, \quad \vec{y} = f(\vec{x}) = x_1f(\vec{e}_1) + \dots + x_nf(\vec{e}_n),$$

ce qui montre bien

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)).$$

On en déduit immédiatement :

$$f \text{ surjective} \iff \text{Im}(f) = F \iff \text{vect}(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)) = F,$$

#### 4.d. Rang d'une application linéaire

On rappelle que le *rang* d'une famille  $\mathcal{F}$  de vecteurs d'un espace vectoriel  $E$  est la dimension du sous-espace vectoriel  $\text{vect } \mathcal{F}$  engendré par  $\mathcal{F}$ .

**Définition 4.17.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire. Le *rang* de  $f$ , noté  $\text{rg}(f)$ , est la dimension de l'image de  $f$ . Si  $A \in \mathcal{M}_{p,n}$ , le rang de  $A$  est le rang de l'application linéaire  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$  de matrice  $A$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathbb{K}^p$ .

*Remarque 4.18.* D'après le point (i) de la proposition 4.16, si  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  est une base de  $E$ , le rang de  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est égal au rang de la famille de vecteurs

$$(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)).$$

Il est donc inférieur à la dimension  $n$  de  $E$ . De même, le rang d'une matrice  $A$  est égal au rang de la famille de ses vecteurs colonnes (mis en ligne et considérés comme des vecteurs de  $\mathbb{R}^p$ ).

*Remarque 4.19.* Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ . Alors le rang de la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  est égal au rang de l'application linéaire  $f$ . En particulier, ce nombre est indépendant du choix des bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . Nous démontrerons cette propriété plus loin : cf remarque 5.19.

*Exemple 4.20.* Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  défini par

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 + x_3, 2(x_1 + 2x_2 + x_3), -(x_1 + 2x_2 + x_3)).$$

Alors  $f(1, 0, 0) = (1, 2, -1)$ ,  $f(0, 1, 0) = (2, 4, -2)$  et  $f(0, 0, 1) = (1, 2, -1)$ . Donc

$$\text{rg}(f) = \text{rg}((1, 2, -1), (2, 4, -2), (1, 2, -1)) = 1.$$

Le rang d'une application linéaire et la dimension de son noyau sont liés par le résultat suivant :

**Théorème 4.21** (Théorème du rang). Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , où  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels. Alors

$$\text{rg}(f) + \dim \text{Ker}(f) = \dim E.$$

*Démonstration.* Soit  $k$  la dimension de  $\text{Ker}(f)$ , et  $\ell$  la dimension de  $\text{Im } f$ . On doit montrer

$$\dim E = k + \ell.$$

Soit  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$  une base de  $\text{Ker}(f)$ ,  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_\ell)$  une base de  $\text{Im } f$ . Il existe donc, pour  $j = 1 \dots \ell$ , un vecteur  $\vec{w}_j \in E$  tel que  $f(\vec{w}_j) = \vec{v}_j$ . Montrons que  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_\ell)$  est une base de  $E$  (ce qui impliquera immédiatement le résultat annoncé).

□

Montrons d'abord que  $\mathcal{B}$  engendre  $E$ . Soit  $\vec{x} \in E$ . Puisque  $f(\vec{x}) \in \text{Im } f$  et  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\ell$  est une base  $\text{Im } f$ , il existe  $(y_1, y_2, \dots, y_\ell) \in \mathbb{K}^\ell$  tels que

$$f(\vec{x}) = y_1\vec{v}_1 + \dots + y_\ell\vec{v}_\ell.$$

On en déduit

$$f(\vec{x}) = y_1f(\vec{w}_1) + \dots + y_\ellf(\vec{w}_\ell) = f(y_1\vec{w}_1 + \dots + y_\ell\vec{w}_\ell),$$

et donc

$$\vec{x} - y_1\vec{w}_1 - \dots - y_\ell\vec{w}_\ell \in \text{Ker}(f).$$

Il existe donc  $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{K}^k$  tels que

$$\vec{x} - y_1 \vec{w}_1 - \dots - y_\ell \vec{w}_\ell = x_1 \vec{u}_1 + \dots + x_k \vec{u}_k,$$

soit

$$\vec{x} = y_1 \vec{w}_1 + \dots + y_\ell \vec{w}_\ell + x_1 \vec{u}_1 + \dots + x_k \vec{u}_k.$$

La famille  $\mathcal{B}$  engendre bien  $E$ .

Montrons maintenant que  $\mathcal{B}$  est libre. On suppose que l'on a

$$(VIII.10) \quad x_1 \vec{u}_1 + \dots + x_k \vec{u}_k + y_1 \vec{w}_1 + \dots + y_\ell \vec{w}_\ell = \vec{0}_E$$

avec  $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_\ell) \in \mathbb{K}^{k+\ell}$ . En appliquant  $f$  à la ligne précédente et en utilisant que  $f(\vec{u}_j) = \vec{0}_F$  pour  $j = 1 \dots k$  et  $f(\vec{w}_j) = \vec{v}_j$  pour  $j = 1 \dots \ell$ , on obtient

$$y_1 \vec{v}_1 + y_2 \vec{v}_2 + \dots + y_\ell \vec{v}_\ell = f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F.$$

On en déduit, puisque la famille  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_\ell)$  est libre :

$$y_1 = y_2 = \dots = y_\ell = 0.$$

En revenant à (VIII.10), et en utilisant que la famille  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$  est libre, on obtient

$$x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0,$$

ce qui montre que  $\mathcal{B}$  est libre et termine la preuve du théorème du rang.  $\square$

*Exemple 4.22.* Soit  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$  définie par

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_3 - x_4).$$

On veut déterminer le rang de  $f$ .

On calcule pour cela la dimension du noyau de  $f$ .

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Ker}(f) \iff x_1 + x_2 = x_1 - x_2 = 2x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_3 - x_4 = 0.$$

On résout facilement ce système linéaire homogène de 5 équations :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Ker}(f) \iff x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Donc  $\text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0, 0)\}$ . Le noyau de  $f$  est de dimension 0. Par le théorème du rang,

$$\text{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Ker}(f) = 4 - 0 = 4.$$

*Remarque 4.23.* On peut souvent utiliser le théorème du rang et des arguments de dimension pour étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application linéaire. Reprenons l'application injective  $f$  de l'exemple 4.15 p. 8. Le théorème du rang s'écrit :

$$\text{rg}(f) + \underbrace{\dim \text{Ker}(f)}_0 = \underbrace{\dim \mathbb{C}^3}_3,$$

et donc  $\text{rg}(f) = 3$ . On en déduit que  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de  $\mathbb{C}^3$ , c'est donc exactement  $\mathbb{C}^3$ . Donc  $f$  est surjective, et par conséquent bijective. On voit ici, comme dans l'exemple 4.22, que la dimension donne une information gratuite et facilement exploitable.

#### 4.e. Retour sur les systèmes linéaires

L'image et le noyau d'une application linéaire s'interprètent en terme de systèmes linéaires. On considère un système linéaire non-homogène à  $p$  équations et  $n$  inconnues :

$$(S) \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i$$

et le système linéaire homogène correspondant :

$$(H) \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = 0.$$

On fixe les coefficients  $a_{i,j}$ . Soit  $f$  l'application linéaire  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$  de matrice  $[a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathbb{K}^p$ . Alors l'ensemble  $F$  des solutions de (H) est le noyau  $\text{Ker } f$  de  $f$ . Notons  $G$  le sous-ensemble de  $\mathbb{K}^p$  formé des  $(b_1, \dots, b_p)$  tel que (S) a au moins une solution. Dire que  $(b_1, \dots, b_p)$  est un élément de  $G$  signifie exactement qu'il existe  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $f((x_1, \dots, x_n)) = (b_1, \dots, b_p)$ . En d'autres termes,  $G$  est l'image de  $f$  : c'est en particulier un espace vectoriel.

Si  $(b_1, \dots, b_p) \in G$ , le système (S) est compatible. Fixons en une solution  $\vec{y}$ . Alors l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de (S) s'écrit :

$$(VIII.11) \quad \mathcal{S} = \{\vec{y} + \vec{x}, \quad \vec{x} \in F\},$$

En effet, on voit facilement que  $\vec{x}$  est solution de (S) si et seulement si  $\vec{x} - \vec{y}$  est solution de (H), ce qui donne exactement (VIII.11).

Le théorème du rang nous donne la relation suivante :

$$\dim F + \dim G = n.$$

Notons  $q$  la dimension de  $F$ . L'identité (VIII.11) signifie que si (S) est compatible, on peut décrire l'ensemble des solutions avec exactement  $q$  paramètres. Ce nombre  $q$  est par définition indépendant du second membre  $(b_1, \dots, b_p)$  (seule la compatibilité du système dépend de ce second membre). Rappelons (cf chapitre II), que  $q = n - p'$ , où  $p'$  est le nombre de lignes non nulles<sup>6</sup> que l'on obtient lorsque l'on échelonne le système (S) par la méthode du pivot de Gauss. Le théorème du rang implique que  $p'$  est exactement la dimension de  $G$ , l'image de  $f$ . Ce nombre est appelé rang du système linéaire.

*Exemple 4.24.* Considérons la famille de systèmes, d'inconnues  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  :

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = b_1 \\ x_1 + x_2 = b_2 \\ 2x_1 + x_2 = b_3. \end{cases}$$

6. C'est à dire autres que  $0 = 0$ .

Ici  $n = 2, p = 3$ . Il est facile de voir que le système homogène n'a que la solution nulle  $(0, 0)$ . Donc  $F = \{\vec{0}\}$  est de dimension 0. L'espace vectoriel  $G$  formé des  $(b_1, b_2, b_3)$  tels que (S) est compatible est de dimension  $2 - 0 = 2$ . Lorsque  $(b_1, b_2, b_3) \in G$ , le système (S) a une unique solution. Il est facile de déterminer  $G$  en échelonnant le système (S). Par les opérations  $(L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1)$ ,  $(L_3) \leftarrow (L_3) - 2(L_1)$ , puis  $(L_3) \leftarrow (L_3) - \frac{3}{2}(L_2)$ , on obtient le système équivalent

$$(S') \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = b_1 \\ 2x_2 = b_2 - b_1 \\ 0 = b_3 - \frac{3}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_1. \end{cases}$$

On en déduit que  $q = 0, p' = 2$  et que (S) est compatible si et seulement si  $2b_3 - 3b_2 - b_1 = 0$ , ce qui donne la représentation cartésienne de  $G$  :

$$G = \left\{ (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2b_3 - 3b_2 - b_1 = 0 \right\}.$$

## 5. Isomorphismes

### 5.a. Définition

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels

**Définition 5.1.** On appelle *isomorphisme* entre  $E$  et  $F$  une application linéaire bijective de  $E$  dans  $F$ . Lorsqu'il existe un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $E$  et  $F$  sont isomorphes. On appelle *automorphisme* de  $E$  un isomorphisme de  $E$  dans lui-même. Un automorphisme est donc un endomorphisme bijectif.

*Exemple 5.2.* L'application linéaire  $f$  de l'exemple 4.15 est, par la remarque 4.23 un isomorphisme de  $\mathbb{C}^3$  dans  $\mathbb{C}^3$ , donc un automorphisme de  $\mathbb{C}^3$ .

*Exemple 5.3.* L'identité de  $E$  est un automorphisme de  $E$  (donc  $E$  est isomorphe à lui-même).

Le fait que deux espaces vectoriels sont isomorphes signifie qu'ils ont exactement la même structure d'espace vectoriel : ce sont en quelques sortes deux copies du même espace vectoriel.

### 5.b. Application réciproque d'un isomorphisme

**Proposition 5.4.** Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels et  $f$  un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ . Alors  $f^{-1}$  est une application linéaire (donc un isomorphisme) de  $F$  dans  $E$ .

*Remarque 5.5.* Il découle de la proposition 5.4 que la relation " $E$  est isomorphe à  $F$ " est symétrique i.e. :

$$E \text{ isomorphe à } F \iff F \text{ isomorphe à } E.$$

*Exercice 5.6.* Vérifier que c'est aussi une relation transitive, i.e. :

$$(E \text{ isomorphe à } F \text{ et } F \text{ isomorphe à } G) \implies E \text{ isomorphe à } G.$$

*Démonstration de la proposition.* L'application réciproque d'une application bijective est également bijective. Si  $f^{-1}$  est une application linéaire, ce sera donc aussi un isomorphisme. Montrons que  $f^{-1}$  est linéaire.

Soit  $\vec{x}, \vec{y} \in F$ . Alors (par définition de l'application réciproque) :

$$f(f^{-1}(\vec{x} + \vec{y})) = \vec{x} + \vec{y}.$$

De plus

$$f(f^{-1}(\vec{x}) + f^{-1}(\vec{y})) = f(f^{-1}(\vec{x})) + f(f^{-1}(\vec{y})) = \vec{x} + \vec{y}.$$

En combinant ces deux lignes, on obtient :

$$f(f^{-1}(\vec{x} + \vec{y})) = f(f^{-1}(\vec{x}) + f^{-1}(\vec{y})),$$

et donc, par injectivité de  $f$ ,

$$f^{-1}(\vec{x} + \vec{y}) = f^{-1}(\vec{x}) + f^{-1}(\vec{y}).$$

On démontre de même que si  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $f^{-1}(\lambda\vec{x}) = \lambda f^{-1}(\vec{x})$ . □

*Exemple 5.7.* Soit  $f$  l'automorphisme de  $\mathbb{R}^2$  défini par

$$f((x_1, x_2)) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2).$$

Calculons l'application réciproque de  $f$ . Si  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(x_1, x_2) = f^{-1}((y_1, y_2))$  est l'unique solution du système

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 - x_2.$$

On résout ce système :

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}.$$

On a donc

$$f^{-1}((y_1, y_2)) = \left( \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2} \right).$$

Plus généralement, calculer la réciproque d'un isomorphisme  $f$  dans un système de coordonnées revient à résoudre le système de Cramer inhomogène  $f((x_1, \dots, x_n)) = (y_1, \dots, y_n)$ , d'inconnues  $(x_1, \dots, x_n)$ , de second membre  $(y_1, \dots, y_n)$ . Cela revient aussi à calculer l'inverse de la matrice de  $f$  dans une base donnée (cf plus bas le point de vue matriciel).

On rappelle qu'une application est bijective si et seulement si elle admet une application réciproque. On peut ainsi montrer qu'une certaine application linéaire est un isomorphisme en donnant son application réciproque :

*Exemple 5.8.* Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . La rotation de  $\mathbb{R}^2$  de centre  $(0, 0)$  et d'angle  $\theta$  :

$$R_\theta : (x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$  : elle admet pour application réciproque la rotation  $R_{-\theta}$ .

### 5.c. Condition sur les dimensions

**Proposition 5.9.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , où  $E$  et  $F$  sont de dimension finie.

- i. Si  $f$  est un monomorphisme,  $\dim E \leq \dim F$ .
- ii. Si  $f$  est un épimorphisme,  $\dim E \geq \dim F$ .
- iii. Si  $f$  est un isomorphisme,  $\dim E = \dim F$ .

*Démonstration.* Le point (iii) découle immédiatement des points (i) et (ii).

Si  $f$  est un monomorphisme, le noyau de  $f$  est de dimension 0 et le théorème du rang s'écrit  $\dim E = \text{rg}(f) = \dim \text{Im}(f)$ . Puisque  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ , on a  $\dim \text{Im}(f) \leq \dim F$ , et le point (i) en découle.

Supposons maintenant que  $f$  est un épimorphisme. Alors  $\dim \text{Im}(f) = \dim F$ , et le théorème du rang s'écrit :  $\dim E = \dim F + \dim \text{Ker}(f) \geq \dim F$ , ce qui donne le point (ii).  $\square$

*Remarque 5.10.* Si  $\dim F > \dim E$ , il n'existe donc aucun épimorphisme de  $E$  dans  $F$ . De même, si  $\dim F < \dim E$ , il n'existe aucun monomorphisme de  $E$  dans  $F$ .

*Exemple 5.11.* L'application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^5$  définie par

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2, x_3, x_4)) \\ = (x_1 + x_2 - \sqrt{2}x_3, x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_2 + 3x_4, \pi x_1 + e^\pi x_2 + x_3, x_1 - \sqrt{7}x_4) \end{aligned}$$

n'est pas surjective. En effet, il n'existe aucun épimorphisme de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^5$ .

La proposition suivante est une application immédiate du théorème du rang et sera démontrée en travaux dirigés (cf exercice VIII.7 p. 15).

**Proposition 5.12.** Soit  $E$  et  $F$  de dimensions finies, et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i.  $f$  est un isomorphisme.
- ii.  $f$  est un monomorphisme et  $\dim E = \dim F$ .
- iii.  $f$  est un épimorphisme et  $\dim E = \dim F$ .

*Exemple 5.13.* Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$

$$F = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4, y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0\}.$$

Considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow F \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3 - x_2, x_3 + x_2). \end{aligned}$$

L'application est bien définie : on vérifie facilement que  $(x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3 - x_2, x_3 + x_2)$  est toujours un élément de  $F$ . Montrons que  $f$  est bijective :

- L'espace vectoriel  $F$  est de dimension 3 (c'est le noyau d'une application linéaire de rang 1). Donc  $\dim F = \dim \mathbb{R}^3$ .

- On vérifie facilement que  $\ker f = \{\vec{0}\}$ , donc que  $f$  est injective.
- Par les deux points précédents et la proposition 5.12,  $f$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dans  $F$ .

*Remarque 5.14.* Soit  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$ , où  $E$ ,  $F$  et  $G$  sont des espaces vectoriels. On suppose que  $g$  est un isomorphisme. Alors le rang de  $g \circ f$  est égal au rang de  $f$ . En effet, la restriction de  $g$  à l'image de  $f$  est une application linéaire bijective de l'image de  $f$  dans l'image de  $g \circ f$ . Ces deux images ont donc même dimension. On montre de même que si  $f$  est un isomorphisme, les images de  $g$  et  $g \circ f$  sont confondues, et les rangs de  $g$  et  $g \circ f$  sont égaux.

### 5.d. Matrices inversibles et isomorphismes

**Proposition 5.15.** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces de dimension finie,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  des bases respectives de  $E$  et  $F$ , et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i. l'application  $f$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$  ;
- ii.  $\dim E = \dim F$  et la matrice  $A$  est inversible.

Sous ces conditions, on a alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}.$$

*Démonstration.* Supposons que  $f$  est un isomorphisme. Par la proposition 5.9,  $\dim E = \dim F$ . Notons  $n$  leur dimension commune.

Par la formule donnant la matrice de la composée de deux applications linéaires (point (ii) de la proposition 3.8),

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}}(f \circ f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}}(\text{Id}_F) = I_n,$$

ce qui montre que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  est inversible, d'inverse  $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)^{-1}$ .

Réciproquement, on suppose que  $\dim E = \dim F$  et que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  est inversible. Soit  $g$  l'application linéaire de  $F$  dans  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)^{-1}$ . Cette application linéaire existe par le Corollaire 1.7. Alors

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}}(f \circ g) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(g) = I_n, \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(g \circ f) &= \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = I_n, \end{aligned}$$

où  $n = \dim E = \dim F$ , ce qui montre que  $f \circ g$  est l'identité de  $F$  et  $g \circ f$  est l'identité de  $E$  :  $f$  est donc bijective, d'application réciproque  $g$ .  $\square$

### 5.e. Isomorphisme entre espaces de mêmes dimensions

Le théorème suivant est un résultat simple, mais important sur les isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie :

**Théorème 5.16.** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors  $E$  et  $F$  sont isomorphes si et seulement si  $\dim E = \dim F$ .

*Démonstration.* Si  $E$  et  $F$  sont isomorphes,  $\dim E = \dim F$  par le point (iii) de la proposition 5.9.

Réciproquement, supposons  $\dim E = \dim F$ , et notons  $n$  leur dimension commune. Soit  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  une base de  $E$ ,  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  une base de  $F$ , et  $f$  l'unique application linéaire de  $E$  dans  $F$  telle que

$$f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j, \quad j = 1 \dots n$$

(on rappelle que l'on peut définir une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie en donnant l'image d'une base, cf le corollaire 1.7). Vérifions que  $f$  est injective. Soit  $\vec{x}$  un élément de  $\text{Ker}(f)$ ,  $x_1, \dots, x_n$  ses coordonnées dans la base  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ . Alors

$$f(\vec{x}) = \vec{0}_F \text{ i.e. } f(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n) = \vec{0}_F.$$

En développant le terme de gauche de la dernière égalité par linéarité, et en utilisant que  $f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j$  pour  $j = 1 \dots n$ , on obtient

$$x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}_F,$$

et comme la famille  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  est libre,

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

On en déduit  $\vec{x} = \vec{0}_E$ . On a montré  $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$ , c'est à dire que  $f$  est injective. Par le théorème du rang,  $\dim \text{Im}(f) = \dim E - \dim \text{Ker}(f) = \dim(E)$  donc  $f$  est surjective. Finalement  $f$  est bijective.  $\square$

*Exemple 5.17.* Les espaces vectoriels  $\mathbb{R}^3$  et  $F$  de l'exemple 5.13 sont isomorphes car tous les deux de dimension 3. L'application linéaire  $f$  de l'exemple 5.13 donne un isomorphisme explicite.

*Exercice 5.18.* Montrer de la même manière que  $\dim E \leq \dim F$  si et seulement si il existe une injection de  $E$  dans  $F$ , ou encore si et seulement si il existe une surjection de  $F$  dans  $E$ .

(cf correction p. 15).

*Remarque 5.19.* Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ . Alors le rang de la matrice  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  est égal au rang de  $f$ , et ne dépend pas du choix des bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . En effet, soit  $n$  la dimension de  $E$ ,  $p$  la dimension de  $F$ , et  $g$  l'application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  qui a pour matrice  $A$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$ . Par définition, le rang de  $A$  est égal au rang de  $g$ . De plus, si  $\phi$  est l'isomorphisme de  $E$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui envoie les vecteurs de  $\mathcal{B}$  dans

ceux de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , et  $\psi$  est l'isomorphisme de  $F$  dans  $\mathbb{R}^p$  qui envoie les vecteurs de  $\mathcal{C}$  dans ceux de la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ , on a :

$$f = \psi^{-1} \circ g \circ \phi,$$

ce qui montre l'assertion proposée, puisque la composition par un isomorphisme ne change pas le rang (cf Remarque 5.14).

## 6. Complément : formule de changement de bases

On donne ici une formule générale permettant de changer les bases de la matrice de représentation d'une application linéaire. Pour déduire  $\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}}}(f)$  de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  dans l'exemple de §2.d, on a eu besoin :

- des coordonnées des vecteurs de la base  $\tilde{\mathcal{B}}$  dans la base  $\mathcal{B}$ ;
- des coordonnées des vecteurs de la base  $\mathcal{C}$  dans la base  $\tilde{\mathcal{C}}$ .

Ces informations sont données par les *matrices de passage* d'une base à une autre, que nous allons définir maintenant. La formule de changement de base proprement dite, qui utilise ces matrices de passage, sera vue en §6.b. La définition d'une matrice de passage et la formule de changement de base ne sont pas au programme du tronc commun de L1 à l'Institut Galilée, mais il est conseillé aux étudiants voulant poursuivre leurs études en mathématiques d'en connaître au moins l'existence. Elle sera par ailleurs utilisée une fois dans ce cours, au chapitre IX, pour définir le déterminant d'un endomorphisme.

### 6.a. Matrices de passage

**Définition 6.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$  et  $\tilde{\mathcal{B}} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$  deux bases de  $E$ . La *matrice de passage* de  $\mathcal{B}$  à  $\tilde{\mathcal{B}}$ , notée  $\text{Mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}}$ , est la matrice  $n \times n$  dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base  $\tilde{\mathcal{B}}$  dans la base  $\mathcal{B}$ . En d'autres termes, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}} = \text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(\text{id}_E)$$

(matrice de représentation de l'application linéaire  $\text{id}_E : E \rightarrow E$  dans les bases  $\tilde{\mathcal{B}}$  et  $\mathcal{B}$ ).

*Exemple 6.2.* Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  une autre base de  $\mathbb{K}^n$ . La matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$  est la matrice  $n \times n$  dont le  $j$ -ième vecteur colonne est constitué des coordonnées de  $\vec{u}_j$ . Supposons  $n = 3$  et considérons la famille

$$\mathcal{C} = ((1, 1, 0), (-2, 3, 0), (4, 5, 6)).$$

On vérifie facilement que  $\mathcal{C}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . On obtient sans calcul la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

*Exemple 6.3.* On reprend les notations de l'exemple de 2.d p.3. Alors, d'après la première étape de cet exemple :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

D'après la deuxième étape :

$$\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Avertissement 6.4.* L'appellation "matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\tilde{\mathcal{B}}$ " peut être source de confusion : la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\tilde{\mathcal{B}}$  permet de passer des coordonnées d'un vecteur dans  $\tilde{\mathcal{B}}$  à celles de ce même vecteur dans  $\mathcal{B}$  (et non l'inverse, comme on pourrait s'y attendre).

Le lecteur pourra vérifier que la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\tilde{\mathcal{B}}$  est en fait la matrice de représentation, dans la base  $\mathcal{B}$ , de l'application linéaire qui envoie les vecteurs de  $\mathcal{B}$  dans ceux de  $\tilde{\mathcal{B}}$ , ce qui explique son nom :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f), \quad f \in \mathcal{L}(E, E), \quad \forall i = 1 \dots n, \quad f(\vec{u}_i) = \vec{\tilde{u}}_i.$$

**Corollaire 6.5.** *Toute matrice de passage est inversible. De plus :*

$$\text{Mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}} = (\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}})^{-1}.$$

*Démonstration.* On applique la proposition 3.8 ii à l'espace vectoriel  $E$  (en posant  $F := G := E$ ), muni des bases  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C} := \tilde{\mathcal{B}}$  et  $\mathcal{D} := \mathcal{B}$ , et aux applications linéaires  $f := \text{id}_E$  et  $g := \text{id}_E$ . Alors,

$$I_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\text{id}_E \circ \text{id}_E) = \text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(\text{id}_E) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}(\text{id}_E).$$

Or, ce dernier produit est identique à  $\text{Mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}} \text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}}$ . □

*Exemple 6.6.* On revient à l'exemple de 2.d. Alors,

$$\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}} = \left( \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

En d'autres termes,

$$\vec{u}_1 = \vec{\tilde{u}}_1 \text{ et } \vec{u}_2 = -\vec{\tilde{u}}_1 + 2\vec{\tilde{u}}_2,$$

ce que l'on peut vérifier par un calcul direct à l'aide des expressions de  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$ ,  $\vec{\tilde{u}}_1$  et  $\vec{\tilde{u}}_2$ .

De même, en calculant l'inverse de la matrice  $\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}}$ , on obtient

$$\text{Mat}_{\mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 6.b. Formule de changement de bases

**Théorème 6.7.** *Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\tilde{\mathcal{B}}$  des bases de  $E$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\tilde{\mathcal{C}}$  des bases de  $F$ . Alors*

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}}}(f) &= \text{Mat}_{\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}} \\ &= (\text{Mat}_{\mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}})^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}} \end{aligned}$$

*Démonstration.* On sait déjà que  $\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}} = (\text{Mat}_{\mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}})^{-1}$ . Donc, il suffit de prouver la première des deux égalités. Par définition,

$$\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}} = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}}}(\text{id}_F) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(\text{id}_E).$$

Deux applications de la proposition 3.8 ii donnent d'abord

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}}}(\text{id}_F) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{C}}}(\text{id}_F \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{C}}}(f),$$

puis

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{C}}}(f) \text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}}}(f \circ \text{id}_E) = \text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}}}(f).$$

Ce qui montre comme annoncé :

$$\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}} = \text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}}}(f). \quad \square$$

*Remarque 6.8.* On peut résumer le théorème 6.7 par le schéma suivant

$$\begin{array}{ccc} (E, \mathcal{B}) & \xrightarrow{\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)} & (F, \mathcal{C}) \\ \uparrow P & & \downarrow Q^{-1} \\ (E, \tilde{\mathcal{B}}) & \xrightarrow{\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}}}(f)} & (F, \tilde{\mathcal{C}}) \end{array}$$

où  $P = \text{Mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}}$  permet de passer des coordonnées dans  $\tilde{\mathcal{B}}$  aux coordonnées dans  $\mathcal{B}$ , et  $Q = \text{Mat}_{\mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}}$  permet de passer des coordonnées dans  $\tilde{\mathcal{C}}$  aux coordonnées dans  $\mathcal{C}$ .

*Exemple 6.9.* On revient à l'exemple donné en 2.d. On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{Mat}_{\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

On en déduit, par le théorème 6.7, puis un calcul simple de produits matriciels :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\vec{B}, \vec{C}}(f) &= \text{Mat}_{\vec{C} \rightarrow \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \vec{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{5}{2} \\ 3 & 1 \\ 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat de l'exemple 2.d, p.3.

## 7. Correction de quelques exercices

### Correction de l'exercice 1.5

Soit  $R$  la distance entre l'origine et  $M$ , et  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $M$  et de rayon  $R$ . Notons  $O = (0, 0)$  l'origine,  $A = f((0, 0))$ . Par définition d'une rotation,  $A$  est le point de  $\mathcal{C}$  tel que l'angle  $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA})$  soit égal à  $\theta$ . Puisque  $\theta$  n'est pas congru à 0 modulo  $2\pi$ , on en déduit que  $O$  et  $A$  ne sont pas confondus, et donc que  $f(0, 0) \neq (0, 0)$ . Par la proposition 1.4, l'application  $f$  n'est pas linéaire.

### Correction de l'exercice 1.9.

On exprime les vecteurs de la base canonique en fonction de  $\vec{u} = (1, 3)$  et  $\vec{v} = (1, 4)$ . En résolvant deux systèmes linéaires à deux équations et deux inconnues, on obtient :

$$(1, 0) = 4\vec{u} - 3\vec{v}, \quad (0, 1) = -\vec{u} + \vec{v}.$$

D'où

$$f((x, y)) = f(x(1, 0) + y(0, 1)) = f(x(4\vec{u} - 3\vec{v}) + y(-\vec{u} + \vec{v})) = (4x - y)(-1, 2, 3),$$

où pour la dernière égalité on a utilisé que  $f(\vec{u}) = (-1, 2, 3)$  et  $f(\vec{v}) = (0, 0, 0)$ .

### Correction de l'exercice 3.6.

$$g \circ f((x_1, x_2)) = (x_1 + x_2, -2(x_1 + x_2), 3(x_1 + x_2)).$$

### Correction de l'exercice 3.7.

Par des considérations géométriques élémentaires (ou un calcul utilisant les formules trigonométriques), on obtient  $R_\theta \circ R_\sigma = R_{\theta+\sigma}$ .

La symétrie orthogonale de  $\mathbb{R}^2$  d'axe  $Ox$  est l'application  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ . La symétrie orthogonale de  $\mathbb{R}^2$  d'axe  $Oy$  est l'application  $(x, y) \mapsto (-x, y)$ . La composée de ces deux symétries (dans n'importe quel ordre) est l'application  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ , c'est à dire la symétrie de centre  $(0, 0)$ .

### Correction de l'exercice 3.11.

a. Par la proposition 3.8,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = BA = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

b. On a envie de dire que  $AB$  est une matrice de représentation de l'application  $f \circ g$  (qui est bien définie, comme application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ ). Mais

$$AB = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g),$$

la base  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^2$  considéré comme l'"espace d'arrivée" de  $g$  n'est donc pas la même que la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^2$  considéré comme "espace de départ" de  $f$ . Le produit  $AB$  n'a donc pas d'interprétation particulière en terme de composition d'applications linéaires.

### Correction de l'exercice 4.2.

L'application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est injective si et seulement si pour tout  $y$  de  $F$ ,  $f^{-1}(\{y\})$  est vide ou réduit à un point. Elle est surjective si et seulement si pour tout  $y$  de  $F$ ,  $f^{-1}(\{y\})$  est non vide. Elle est bijective si et seulement si pour tout  $y$  de  $F$ ,  $f^{-1}(\{y\})$  est un singleton.

### Réponses à l'exercice 4.6.

$f^{-1}(-\infty, 0] = \emptyset$ ,  $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}([0, +\infty[) = \mathbb{R}$ ,  $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ ,  $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$ ,  $f(f^{-1}(\mathbb{R})) = [0, +\infty[$  et  $f^{-1}(f([0, +\infty[)) = \mathbb{R}$ .

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  n'est pas injective :  $f(1) = 1 = f(-1)$ . Elle n'est pas surjective car  $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ .
- $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$  n'est toujours pas injective (pour la même raison) mais elle est bien surjective.
- $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est injective : en effet, si  $x$  est positif,  $x = \sqrt{x^2} = \sqrt{f(x)}$ , donc  $x$  est uniquement déterminé par  $f(x)$ . Elle n'est pas surjective, car  $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$ .
- En combinant les arguments des points précédents, on montre que  $f$  est un bijection de  $[0, +\infty[$  sur lui-même. Son application réciproque est  $x \mapsto \sqrt{x}$ .

### Correction de l'exercice 4.12.

Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + x_2, x_3 - x_4, x_1 - x_3).$$

Soit

$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  (c'est le noyau d'une application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}$ ). On a

$$A = f(G).$$

Donc  $A$  est l'image d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  par l'application linéaire  $f$ , ce qui montre que c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

*Correction de l'exercice 5.18.*

Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels, de dimensions respectives  $n$  et  $p$ .

On sait déjà (proposition 5.9) que s'il existe un monomorphisme de  $E$  dans  $F$  ou un épimorphisme de  $F$  dans  $E$ ,  $n \leq p$ . Montrons la réciproque. On note  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  une base de  $E$ , et  $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une base de  $F$ . Supposons  $n \leq p$ . Construisons un monomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et un épimorphisme  $g \in \mathcal{L}(F, E)$ .

— Soit  $f$  l'application linéaire de  $E$  dans  $F$  définie par

$$f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

La famille  $(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)) = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ , extraite d'une famille libre, est libre. Par la proposition 4.16,  $f$  est un monomorphisme.

— Soit  $g$  l'application linéaire de  $F$  dans  $E$  définie par

$$g(\vec{v}_j) = \vec{u}_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad g(\vec{v}_j) = \vec{0}, \quad j = n+1, \dots, p.$$

La famille  $(g(\vec{v}_1), \dots, g(\vec{v}_n)) = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n, 0, \dots, 0)$ , qui complète la base  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  est génératrice. Par la proposition 4.16,  $g$  est un épimorphisme.

## 8. Travaux dirigés

*Exercice VIII.1.* Les applications suivantes de  $\mathbb{K}^n$  dans  $\mathbb{K}^p$  sont-elles linéaires? Si oui, déterminer leur matrice de représentation dans les bases canoniques de  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathbb{K}^p$ .

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $n = p = 2$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f((x, y)) = (5yx, 6xy)$ .
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $n = p = 2$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f((x, y)) = (3x + 4y, x + 3y)$ .
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $n = p = 2$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f((x, y)) = (x + 2y, 2x - 4y + 3)$ .
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $n = 3$ ,  $p = 2$ ,  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ ,  $f((x, y, z)) = (4x + (2 - i)y - (2 + i)z, (1 - i)x + 2y - 4iz)$ .
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $n = 1$ ,  $p = 4$ ,  $f(x) = (3x, 0, 0, -x)$ .

*Exercice VIII.2.* Soient  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  et  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  définies par :  $f((x, y, z)) = (x + y, -x - 2z)$  et  $g((x, y)) = (x - y, 2x + y, x)$ .

- Déterminer les matrices de  $f$  et  $g$  dans les bases canoniques.
- Déterminer  $f \circ g$  et  $g \circ f$  en utilisant le calcul matriciel.
- Mêmes questions avec les applications linéaires de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définies par

$$f((x, y)) = (x + y, x - 2y), \quad g((x, y)) = (x + 2y, 2x + y).$$

*Exercice VIII.3.* Soit  $\vec{u}_1 = (6, -6, -1)$ ,  $\vec{u}_2 = (-3, 2, 1)$ ,  $\vec{u}_3 = (2, -2, 0)$ , et  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ .

- Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{C}^3$ .
- Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^3$  défini par

$$f((x, y, z)) = ((9 + 4i)x + (9 + 3i)y + (6 + 6i)z, -(8 + 4i)x - (8 + 3i)y - (6 + 6i)z, -2x - 2y - z).$$

Déterminer la matrice  $A$  de représentation de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$

- Calculer  $A^6$ . Soit  $\vec{v} = (0, 0, -i)$ . Donner les coordonnées de  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}$ . En déduire  $f^6(\vec{v})$ .

*Exercice VIII.4.* Soit  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y + z = 0\}$ .

- Soit  $\vec{u}_1 = (1, 2, -4)$ ,  $\vec{u}_2 = (0, 1, -1)$ . Justifier que  $E$  est un espace vectoriel et montrer que  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  est une base de  $E$ .
- Soit  $(x, y, z) \in E$ . Exprimer les coordonnées  $(a_1, a_2)$  de  $(x, y, z)$  dans la base  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
- Pour  $(x, y, z) \in E$ , on pose

$$f((x, y, z)) = (-x + 2y, -3x + 4y, 5x - 8y).$$

Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , puis déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ .

*Exercice VIII.5.*

- Soit  $f$  une application linéaire d'un espace vectoriel  $E$  dans un espace vectoriel  $F$ . Rappeler une relation entre les dimensions de l'image et du noyau de  $f$  et la dimension de  $E$ .

- Donner pour les applications linéaires suivantes une base de l'image et une base du noyau. Ces applications sont-elles injectives? surjectives?

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f((x, y)) = (x + 3y, 2x + y)$ .
- $g : \mathbb{C}^2$  dans  $\mathbb{C}^3$  définie par  $g((x, y)) = (ix + y, 2ix + 2y, x - iy)$ .

- Existe-t-il une application linéaire :

- de  $\mathbb{R}^5$  dans  $\mathbb{R}^3$  dont le noyau est de dimension 1?
- de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  dont le noyau est de dimension 2 et l'image de dimension 1?
- de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  dont l'image de dimension 2?
- de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  dont l'image est de dimension 3?

Si oui, donner un exemple d'une telle application.

*Exercice VIII.6.* Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3,  $F$  un espace vectoriel de dimension 2,  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  une base de  $F$ . Soit  $f$  l'unique application linéaire de  $E$  dans  $F$  telle que

$$f(\vec{u}_1) = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad f(\vec{u}_2) = 3\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad f(\vec{u}_3) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

- Justifier l'existence de  $f$  à l'aide d'un théorème du cours. Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ .

- Donner une base de l'image et une base du noyau de  $f$ .

*Exercice VIII.7.* Montrer la proposition 5.12 p. 11.

Exercice VIII.8. Soit  $P$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x = y - z\},$$

et  $Q$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  :

$$Q = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \text{ et } x_1 + 2x_3 = x_2\}.$$

Justifier qu'il existe un isomorphisme entre  $P$  et  $\mathbb{R}^2$ , entre  $Q$  et  $\mathbb{R}^2$  et entre  $P$  et  $Q$ . Donner des isomorphismes explicites entre ces trois espaces.

Exercice VIII.9. Soit  $E$  un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , supplémentaires dans  $E$ . Tout vecteur  $\vec{u}$  de  $E$  s'écrit donc de manière unique  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ , avec  $\vec{v} \in F$  et  $\vec{w} \in G$ . La *projection*  $p$  sur  $F$  parallèlement à  $G$  est par définition l'application  $\vec{u} \mapsto \vec{v}$ .

a. Vérifier que  $p$  est une application linéaire. Calculer  $p^2 = p \circ p$ . Donner le noyau et l'image de  $p$ .

b. On note  $n$  la dimension de  $E$  et  $q$  celle de  $F$ . Quelle est la dimension de  $G$ ? Soit  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ ,  $\mathcal{D}$  une base de  $G$ . Vérifier que  $\mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$  est une base de  $E$ . Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(p)$ .

c. Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$  telle que  $f \circ f = f$ . Montrer que l'image et le noyau de  $f$  sont supplémentaires et que  $f$  est la projection sur  $\text{Im } f$ , parallèlement à  $\text{Ker } f$ .

d. On suppose  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$ ,  $G = \{(x, y, 0), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ ,  $H = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ . Montrer que  $F$  et  $G$  (respectivement  $F$  et  $H$ ) sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $p_1$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ ,  $p_2$  la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$  et  $p_3$  la projection sur  $H$  parallèlement à  $F$ . Exprimer, pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $p_i(x, y, z)$  en fonctions de  $x, y$  et  $z$ .

Exercice VIII.10. Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels. On suppose  $E$  de dimension  $n$ . Soit  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base de  $E$ , et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Montrer que l'application  $f$  est un monomorphisme si et seulement si  $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$  est une famille libre.

## 9. Exercices à préparer pour le contrôle continu

Exercice VIII.11. Soit l'espace vectoriel  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y\}$ .

a. Soit  $\vec{u}_1 = (3, 1, 0)$ ,  $\vec{u}_2 = (0, 0, 1)$ ,  $\vec{u}_3 = (1, -1, 0)$ . Montrer que  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , et que  $\mathcal{C} = (\vec{u}_2, \vec{u}_3)$  est une base de  $E$ .

b. Soit  $f$  l'unique application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $E$  tel que  $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_2$ ,  $f(\vec{u}_2) = \vec{u}_3$  et  $f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 - \vec{u}_3$ . Donner  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ .

c. Soit  $\mathcal{D} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Donner  $\text{Mat}_{\mathcal{D}, \mathcal{C}}(f)$ .

Exercice VIII.12 (Questions de cours). Soit  $E, F$  des  $\mathbb{K}$ -espace vectoriels.

a. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Montrer que  $f$  est une injection si et seulement si  $\text{Ker } f = \{\vec{0}_E\}$ .

b. Soit  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base de  $E$ . Montrer que  $f$  est surjective si et seulement si  $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$  est une famille génératrice de  $F$ .

c. Démonstration du théorème du rang.

Exercice VIII.13. Pour toutes les applications de l'exercice VIII.1 qui sont des applications linéaires, déterminer une base de leur image et une base de leur noyau, et leur rang. Ces applications sont-elles des monomorphismes ? Des épimorphismes ?

## IX. Déterminant

La référence pour ce chapitre est encore le livre de Liret-Martinais<sup>1</sup>, dont on suit la présentation générale. On fixe un corps  $\mathbb{K}$ .

### 1. Définition du déterminant d'une matrice. Exemples

#### 1.a. Définition

Soit  $n \geq 1$ . Le *déterminant* d'une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , noté  $\det A$ , est un scalaire (un élément de  $\mathbb{K}$ ), défini par récurrence sur  $n$  de la manière suivante.

Si  $A = [a]$  est une matrice  $1 \times 1$ ,  $\det A = a$ .

Fixons  $n \geq 2$  et supposons le déterminant défini pour les matrices  $(n-1) \times (n-1)$ . Soit  $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Notons, pour  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $A_{i,j}$  la matrice  $(n-1) \times (n-1)$  obtenue à partir de  $A$  en retirant à  $A$  la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ième colonne. Alors par définition :

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1}.$$

Remarquons que  $\det A_{i,1}$  est le déterminant d'une matrice  $(n-1) \times (n-1)$ , qui est donc bien défini par hypothèse de récurrence.

On note parfois

$$\det A = |A|, \quad \det[a_{i,j}]_{1 \leq i \leq n} = |a_{i,j}|_{1 \leq i \leq n}.$$

#### 1.b. Formules pour les petites matrices

On peut facilement calculer le déterminant des matrices  $2 \times 2$  et  $3 \times 3$ .

Matrice  $2 \times 2$ . Soit  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  une matrice  $2 \times 2$ . On a donc :

$$A_{1,1} = [d], \quad A_{2,1} = [b], \quad A_{1,2} = [c], \quad A_{2,2} = [a].$$

Par définition du déterminant,

$$\det(A) = a(\det[d]) - c(\det[b])$$

et donc

$$\det(A) = ad - bc.$$

<sup>1</sup> François Liret et Dominique Martinais. *Algèbre 1ère année - Cours et exercices avec solutions*. Dunod, deuxième édition, 2003

On retrouve la formule utilisée au chapitre III (cf p. 30) pour étudier l'inversibilité des matrices  $2 \times 2$ .

Matrices  $3 \times 3$ . Soit  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq 3}$  une matrice  $3 \times 3$ . Par définition du déterminant :

$$\det A = a_{1,1} \det A_{1,1} - a_{2,1} \det A_{2,1} + a_{3,1} \det A_{3,1},$$

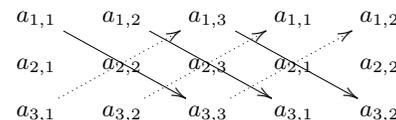
Soit, en utilisant la formule pour les déterminants  $2 \times 2$ ,

$$\det A = a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{2,3}) - a_{2,1}(a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{1,3}) + a_{3,1}(a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3}).$$

En développant, on obtient que le déterminant de  $A$  vaut :

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}.$$

Cette formule peut se retenir avec le schéma suivant (*règle de Sarrus*) :



Dans ce schéma, on a mis deux copies de la matrice  $[a_{i,j}]$  côte à côte (la 3ème colonne de la deuxième copie, inutile, a été omise). Les flèches représentent un produit de trois facteurs, qui apparaît avec un signe  $+$  dans la formule si la flèche est pleine, et un signe  $-$  si la flèche est en pointillés.

Exercice 1.1. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

(cf Réponse p. 23)

On peut bien entendu obtenir (par récurrence sur  $n$ ) une formule exacte du même type pour un déterminant  $n \times n$  pour tout entier  $n$ . Mentionnons toutefois qu'une telle formule est somme de  $n!$  termes, chacun produit de  $n$  coefficients de  $A$ . Par exemple, pour  $n = 20$ , il s'agit de faire la somme d'environ  $2,4 \times 10^{18}$  produits de 20 nombres. Une telle formule est bien entendu inutilisable, même informatiquement, pour  $n$  grand. Nous verrons dans la suite de ce chapitre des méthodes permettant

de calculer plus simplement les déterminant. Pour mémoire, la formule générale d'un déterminant  $n \times n$  est :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)},$$

où  $\mathfrak{S}_n$  désigne le groupe symétrique et  $\varepsilon(\sigma)$  la signature de la permutation  $\sigma$ . Le lecteur n'ayant jamais rencontré les termes *groupe symétrique*, *signature* et *permutation* peut ignorer pour l'instant cette formule, qui ne sera pas utilisée dans la suite.

### 1.c. Cas des matrices triangulaires supérieures

On renvoie le lecteur à la définition 3.12 du Chapitre III (p. 33) des matrices triangulaires supérieures.

**Proposition 1.2.** *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit de ses termes diagonaux.*

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur la taille  $n$  de la matrice. C'est évident pour  $n = 1$ .

Soit  $n \geq 2$ . Supposons le résultat vrai pour les matrices  $(n-1) \times (n-1)$ . Soit  $A$  une matrice triangulaire supérieure  $n \times n$ . Alors, par définition du déterminant, puisque  $a_{2,1} = a_{3,1} = \dots = a_{n,1} = 0$ ,

$$\det A = a_{1,1} \det A_{1,1}.$$

Puisque  $A_{1,1}$  est une matrice triangulaire supérieure  $(n-1) \times (n-1)$ , on obtient par hypothèse de récurrence

$$\det A_{1,1} = a_{2,2} \dots a_{n,n},$$

ce qui donne la formule voulue :

$$\det A = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}.$$

*Remarque 1.3.* Nous verrons plus loin que le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée. La formule précédente est donc également valable pour les matrices triangulaires inférieures.

*Exemple 1.4.*

$$\det I_n = 1, \quad \det(\lambda I_n) = \lambda^n, \quad \det D_k(\lambda) = \lambda,$$

où  $D_k(\lambda)$  est une matrice de dilatation (cf définition 3.1 du Chapitre III)

*Exemple 1.5.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1+i & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{vmatrix} = -8i$$

## 2. Manipulations sur les lignes

On étudie maintenant l'effet sur le déterminant des opérations élémentaires sur les lignes. Ceci nous permettra d'une part de calculer plus facilement des déterminants explicites, et d'autre part de montrer que le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants de ces matrices (cf 3).

### 2.a. Echange de deux lignes

**Proposition 2.1.** *Soit  $A$  une matrice carrée  $n \times n$ ,  $1 \leq i < k \leq n$ , et  $A'$  la matrice obtenue à partir de  $A$  en échangeant les lignes  $i$  et  $k$ . Alors  $\det(A') = -\det(A)$ .*

*Exemple 2.2.*

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18.$$

On obtient cette valeur en échangeant les lignes 1 et 2, et les lignes 3 et 4, puis en utilisant la formule du déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.

*Exemple 2.3.*

$$\det R_{k\ell} = -1,$$

où  $R_{k\ell}$  est la matrice élémentaire donnée par la définition 3.1 du Chapitre III (cette matrice est obtenue à partir de  $I_n$  en échangeant les lignes  $k$  et  $\ell$ ).

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $n$ . Le résultat est facile pour  $n = 2$ . Le seul échange de lignes possible est celui des lignes 1 et 2. Or ;

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Soit  $n \geq 2$ . On suppose la conclusion de la proposition connue pour les matrices  $(n-1) \times (n-1)$ . Soit  $A = [a_{i,j}]$  une matrice  $n \times n$ . Par définition du déterminant,

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1},$$

où, comme auparavant,  $A_{i,1}$  est la matrice  $(n-1) \times (n-1)$  obtenue à partir de  $A$  en retirant la  $i$ -ème ligne et la première colonne.

On commence par traiter le cas de l'échange de deux lignes successives : on fixe  $i_0 \in \{1, \dots, n-1\}$  et on suppose que  $A'$  est obtenue à partir de  $A$  en échangeant les lignes  $i_0$  et  $1+i_0$ . En notant  $A' = [a'_{i,n}]$ , on a :

$$(IX.1) \quad \det A' = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a'_{i,1} \det A'_{i,1}.$$

La démonstration repose sur une analyse élémentaire, mais minutieuse, des termes de cette somme, en distinguant plusieurs cas selon les valeurs de  $i$ .

Si  $i \neq i_0$  et  $i \neq 1 + i_0$ ,  $a'_{i,1} = a_{i,1}$ , et  $A'_{i,1}$  est la matrice obtenue en enlevant la  $i$ -ème ligne et la première colonne à  $A'$ . On en déduit que si  $i > 1 + i_0$ , la matrice  $A'_{i,1}$  est obtenue à partir de la matrice  $A_{i,1}$  en échangeant les lignes  $i_0$  et  $1 + i_0$ . Si  $i < i_0$ , le retrait de la ligne  $i$  a décalé la numérotation des lignes  $i_0$  et  $1 + i_0$ , et on vérifie que cette fois  $A'_{i,1}$  est obtenue à partir de  $A_{i,1}$  en échangeant les lignes  $i_0 - 1$  et  $i_0$ . Dans tous les cas, par hypothèse de récurrence,

$$\det A'_{i,1} = -\det A_{i,1}.$$

Il reste à considérer les indices  $i = i_0$  et  $i = 1 + i_0$  dans la somme (IX.1). Puisque  $A'$  est obtenu à partir de  $A$  en échangeant les lignes  $i_0$  et  $1 + i_0$ , on a :

$$a'_{i_0,1} = a_{1+i_0,1} \text{ et } a'_{1+i_0,1} = a_{i_0,1}.$$

De plus,  $A'_{i_0,1}$  est obtenu à partir de  $A'$  en retirant la ligne  $i_0$  et la première colonne. En utilisant la définition de  $A'$ , on voit que  $A'_{i_0,1}$  est obtenu à partir de  $A$  en retirant la ligne  $i_0 + 1$  et la première colonne. De même,  $A'_{1+i_0,1}$  est obtenu à partir de  $A$  en retirant la ligne  $i_0$  et la première colonne. On en déduit :

$$A'_{i_0,1} = A_{1+i_0,1} \text{ et } A'_{1+i_0,1} = A_{i_0,1}.$$

En revenant à la formule (IX.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \det A' &= - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \notin \{i_0, 1+i_0\}}} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} \\ &\quad + (-1)^{1+i_0} a_{1+i_0,1} \det A_{1+i_0,1} + (-1)^{2+i_0} a_{i_0,1} \det A_{i_0,1} \\ &= - \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} = -\det A. \end{aligned}$$

Il reste à traiter le cas de l'échange de deux lignes non successives ( $L_{i_0}$ ) et ( $L_{k_0}$ ), avec  $1 \leq i_0 < k_0 \leq n$ . On raisonne pour cela par récurrence sur la distance  $k_0 - i_0$  entre ces lignes. Le cas  $k_0 - i_0 = 1$  vient d'être traité. Pour traiter le cas  $k_0 - i_0 > 1$ , on remarque que pour échanger les lignes  $i_0$  et  $k_0$ , il suffit de faire les opérations suivantes

- $(L_{1+i_0}) \leftrightarrow (L_{k_0})$ , échange de deux lignes de distance  $k_0 - 1 - i_0$ , qui multiplie le déterminant par  $-1$  par hypothèse de récurrence.
- $(L_{i_0}) \leftrightarrow (L_{1+i_0})$ , échange de deux lignes successives, qui multiplie le déterminant par  $-1$  par le calcul précédent.
- $(L_{1+i_0}) \leftrightarrow (L_{k_0})$ , échange de deux lignes de distance  $k_0 - 1 - i_0$ , qui multiplie le déterminant par  $-1$  par hypothèse de récurrence.

Finalement, on a montré qu'en échangeant les lignes  $i_0$  et  $k_0$ , on a multiplié le déterminant par  $-1$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

## 2.b. Linéarité par rapport à une ligne

**Proposition 2.4.** Soit  $A, B, C$  trois matrices  $n \times n$  et  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ . On suppose :

- si  $i \in \{1, \dots, n\}$  avec  $i \neq i_0$ , les  $i$ -èmes lignes de  $A, B$  et  $C$  sont identiques ;
- la ligne  $i_0$  de  $A$  est la somme des lignes  $i_0$  de  $B$  et de  $C$ .

Alors

$$\det A = \det B + \det C.$$

Exemple 2.5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

*Démonstration.* On raisonne de nouveau par récurrence sur la dimension  $n$  des matrices. Le résultat est évident pour  $n = 1$ .

On fixe un entier  $n \geq 2$ . On suppose le résultat vrai pour les matrices  $(n-1) \times (n-1)$ . On se donne trois matrices  $n \times n$ ,  $A = [a_{i,j}]$ ,  $B = [b_{i,j}]$  et  $C = [c_{i,j}]$  qui vérifient les hypothèses de la proposition. Quitte à échanger les lignes 1 et  $i_0$  de  $A, B$  et  $C$  (cf proposition 2.1), on peut supposer  $i_0 = 1$ . On a

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1}.$$

Si  $i \geq 2$ ,  $a_{i,1} = b_{i,1} = c_{i,1}$ . De plus, par hypothèse de récurrence,

$$\det A_{i,1} = \det B_{i,1} + \det C_{i,1}.$$

Par ailleurs  $A_{1,1} = B_{1,1} = C_{1,1}$ , et  $a_{1,1} = b_{1,1} + c_{1,1}$ . Donc dans les deux cas ( $i \geq 2$  et  $i = 1$ ) :

$$a_{i,1} \det A_{i,1} = b_{i,1} \det B_{i,1} + c_{i,1} \det C_{i,1}.$$

On en déduit

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (b_{i,1} \det B_{i,1} + c_{i,1} \det C_{i,1}) = \det B + \det C.$$

$\square$

Par un raisonnement analogue, on montre

**Proposition 2.6.** Soit  $A$  et  $B$  des matrices  $n \times n$ ,  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On suppose que  $B$  est obtenue à partir de  $A$  en multipliant par  $\lambda$  la ligne  $i_0$ . Alors

$$\det B = \lambda \det A.$$

Exemple 2.7. Si  $A$  est une matrice  $n \times n$ ,  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ .

## IX. Déterminant

*Remarque 2.8.* Fixons  $1 \leq i_0 \leq n$  et des vecteurs lignes (des éléments de  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ )  $(L_i)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq i_0}}$ , et considérons l'application  $f$  de  $\mathbb{K}^n$  dans  $\mathbb{K}$  qui à  $(x_1, \dots, x_n)$  associe le déterminant de la matrice dont les lignes sont les lignes  $L_i$ , sauf la ligne  $i_0$  qui vaut  $[x_1 \dots x_n]$ . Les propositions 2.4 et 2.6 signifient exactement que  $f$  est linéaire. On dit que le déterminant est *linéaire par rapport à une ligne*, où encore que l'application qui à  $n$  vecteurs lignes associe le déterminant correspondant est  $n$ -linéaire ou multilinéaire. Par exemple, l'application

$$g : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

est une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  (*exercice* : calculer  $g((x_1, x_2, x_3))$  et vérifier que c'est bien une application linéaire).

Donnons maintenant trois conséquences importantes des Propositions 2.4 et 2.6.

**Corollaire 2.9.** *Soit  $A$  une matrice carrée ayant une ligne nulle. Alors  $\det A = 0$ .*

*Démonstration.* En effet, on obtient  $A$  à partir de  $A$  en multipliant par 0 la ligne nulle. La proposition 2.6 donne donc :

$$\det A = 0 \times \det A = 0.$$

□

**Proposition 2.10.** *Soit  $A$  une matrice ayant deux lignes identiques. Alors  $\det A = 0$ .*

*Démonstration.* La stratégie de la preuve est la même que pour la proposition 2.1. On raisonne par récurrence sur  $n$ . Le résultat est facile pour  $n = 2$  :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0.$$

Soit  $n \geq 3$ . On suppose la conclusion de la proposition connue pour les matrices  $(n-1) \times (n-1)$ . Soit  $A = [a_{i,j}]$  une matrice  $n \times n$ . Par définition du déterminant,

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1}.$$

On commence par traiter le cas de deux lignes successives : on fixe  $i_0 \in \{1, \dots, n-1\}$ , et on suppose que les lignes  $i_0$  et  $i_0+1$  de  $A$  coïncident. Si  $i \neq i_0$  et  $i \neq i_0+1$ , alors la matrice  $A_{i,1}$  a toujours deux lignes identiques ; par hypothèse de récurrence, on a donc  $\det A_{i,1} = 0$ . Il en résulte que

$$\det A = (-1)^{i_0+1} a_{i_0,1} \det A_{i_0,1} + (-1)^{i_0+2} a_{i_0+1,1} \det A_{i_0+1,1}.$$

Or,  $a_{i_0+1,1} = a_{i_0,1}$  et  $A_{i_0+1,1} = A_{i_0,1}$ . Donc,

$$\det A = (-1)^{i_0+1} (a_{i_0,1} \det A_{i_0,1} - a_{i_0,1} \det A_{i_0,1}) = 0.$$

Il reste à traiter le cas de deux lignes non successives  $(L_{i_0})$  et  $(L_{k_0})$ . On définit  $A'$  comme étant la matrice obtenue à partir de  $A$  en échangeant  $(L_{i_0+1})$  et  $(L_{k_0})$ . D'après la proposition 2.1, on a  $\det A = -\det A'$ . Mais  $A'$  a deux lignes successives identiques. Donc, d'après le calcul précédent,  $\det A' = 0$ . Au total,

$$\det A = -\det A' = -0 = 0.$$

□

**Corollaire 2.11.** *Soit  $A$  et  $A'$  deux matrices  $n \times n$ , et  $i, k \in \{1, \dots, n\}$  avec  $i \neq k$ . On suppose que  $A'$  est obtenue à partir de  $A$  par le remplacement  $(L_i) \leftarrow (L_i) + \lambda(L_k)$ . Alors  $\det(A) = \det(A')$ .*

*Démonstration.* En effet, par les propositions 2.4 et 2.6,

$$\det A' = \det A + \lambda \det B,$$

où  $B$  est la matrice dont toutes les lignes sont égales à celle de  $A$ , sauf la  $i$ -ème ligne qui est égale à la  $k$ -ième ligne de  $A$ . Par la proposition 2.10,  $\det B = 0$ , ce qui conclut la preuve. □

*Exemple 2.12.* Le déterminant d'une matrice de transvection (cf Chapitre III §3.a, p. 31)  $T_{k\ell}(\lambda)$  est 1. En effet  $T_{k\ell}(\lambda) = T_{k\ell}(\lambda)I_n$  est obtenu à partir de  $I_n$  par le cadrage  $(L_k) \leftarrow (L_k) + \lambda(L_\ell)$ , et le résultat découle du Corollaire 2.11.

Pour résumer, on a déterminé l'effet sur un déterminant des opérations élémentaires sur les lignes : la multiplication d'une ligne par un scalaire multiplie le déterminant par ce même scalaire, l'échange de deux lignes multiplie le déterminant par  $-1$ , et un remplacement ne change pas le déterminant. Puisqu'on connaît le déterminant d'une matrice échelonnée (une telle matrice est triangulaire supérieure), on peut utiliser la phase de descente de la méthode du pivot de Gauss du chapitre II pour calculer un déterminant.

*Exercice 2.13.* Calculer, en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -2 & -4 & -2 \\ 3 & 6 & 9 & 14 \end{vmatrix}$$

(cf réponse p. 23).

### 3. Déterminant, produit de matrices et matrices inversibles

L'objet de cette partie est de montrer deux théorèmes fondamentaux sur le déterminant d'un produit de matrices et sur la caractérisation des matrices inversibles par le déterminant, et de donner quelques applications.

#### 3.a. Résultats principaux

**Théorème 3.1.** *Soit  $A$  et  $B$  deux matrices  $n \times n$ . Alors*

$$\det(AB) = \det A \times \det B.$$

**Théorème 3.2.** *Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Alors  $A$  est inversible si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ .*

*Preuve des théorèmes 3.1 et 3.2.* La stratégie de la preuve est simple : lorsque  $A$  est une matrice élémentaire, la multiplication par  $A$  se réduit à une opération sur les lignes, et la formule du déterminant de  $AB$  se ramène aux résultats que l'on vient de démontrer dans la section 2. On utilise ensuite que toute matrice est produit de matrices élémentaires et d'une matrice échelonnée réduite pour montrer les deux théorèmes dans le cadre général.

*Étape 1. Multiplication par une matrice élémentaire.* On montre ici que la formule  $\det(AB) = \det A \times \det B$  est valable lorsque  $A$  est une matrice élémentaire (cf Chapitre III, §3.a pour la définition de ces matrices et les notations  $D_k(\lambda)$ ,  $T_{k\ell}(\lambda)$ ,  $R_{k\ell}$ ).

Si  $A$  est une matrice de dilatation  $D_k(\lambda)$ , on a  $\det A = \lambda$ . De plus,  $AB$  est obtenu à partir de  $B$  en multipliant sa  $k$ -ième ligne par  $\lambda$ . On a donc, par la proposition 2.6,  $\det(AB) = \lambda \det B = (\det A)(\det B)$ .

Si  $A$  est une matrice de transvection,  $\det(A) = 1$  (cf Exemple 2.12). Par ailleurs,  $AB$  est obtenu à partir de  $B$  par un remplacement. Par le corollaire 2.11,  $\det(AB) = \det B = (\det A)(\det B)$ .

Enfin, si  $A$  est une matrice de transposition  $R_{k,\ell}$ , on a  $\det(A) = -1$  (cf exemple 2.3) et, par la proposition 2.1,  $\det(AB) = -\det B = (\det A)(\det B)$ .

*Étape 2.* On montre le théorème 3.2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Par la méthode du pivot de Gauss appliquée aux matrices (cf Chapitre III, §3),

$$E_k \dots E_1 A = A',$$

où les  $E_j$  sont des matrices élémentaires, et  $A'$  est une matrice échelonnée réduite. Par l'étape 1, et une récurrence élémentaire

$$(IX.2) \quad \det(E_k) \dots \det(E_1) \det(A) = \det(A').$$

On rappelle que toutes les matrices élémentaires sont inversibles, et que les déterminants des matrices élémentaires, calculés plus hauts, sont tous non nuls. Par

ailleurs la seule matrice échelonnée réduite  $n \times n$  inversible est la matrice  $I_n$ , et toute autre matrice échelonnée réduite a au moins une ligne nulle (cf Théorème 3.16 du chapitre III sur les matrices).

On distingue deux cas. Si  $A$  est inversible,  $A'$  doit être inversible (c'est le produit de matrices inversibles), et donc  $A' = I_n$ . La formule (IX.2) se lit  $\det(E_k) \dots \det(E_1) \det(A) = 1$ , ce qui montre que le déterminant de  $A$  est non nul.

Si  $A$  est non-inversible, alors  $A'$  ne l'est pas non plus : sinon  $A$  pourrait s'écrire comme produit des matrices élémentaires  $E_1^{-1}, \dots, E_k^{-1}$  (inversibles) et de la matrice inversible  $A'$ , et serait donc aussi inversible. Puisque  $A'$  est échelonnée réduite, on en déduit que  $A'$  a une ligne nulle. Par le Corollaire 2.9,  $\det A' = 0$ . Par la formule IX.2, puisque tous les déterminants  $\det(E_j)$  sont non nuls, on en déduit  $\det A = 0$ . Le théorème 3.2 est démontré.

*Étape 3. Fin de la preuve du théorème 3.1.* On suppose maintenant que  $A$  et  $B$  sont des matrices  $n \times n$  quelconques. On veut montrer  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ . On distingue deux cas :

- Si  $A$  est non inversible,  $AB$  ne l'est pas non plus (sinon  $A$  serait inversible, d'inverse  $B(AB)^{-1}$ , par la formule  $AB(AB)^{-1} = I_n$ ). Par l'étape 2,  $\det(A) = 0$  et  $\det(AB) = 0$ , ce qui montre la formule  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$  dans ce cas.
- Si  $A$  est inversible, on sait que  $A$  est produit de matrices élémentaires : avec les notations de l'étape 2,  $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1}$ . Par l'étape 1 et une récurrence immédiate

$$\det(AB) = \det(E_1^{-1}) \dots \det(E_k^{-1}) \det(B)$$

et

$$\det A = \det(E_1^{-1}) \dots \det(E_k^{-1}),$$

ce qui donne à nouveau  $\det(AB) = \det A \times \det B$ , concluant la preuve du théorème 3.1.  $\square$

Remarquons que si  $A$  est inversible, on a

$$1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}),$$

et donc

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

*Exercice 3.3.* A quelle condition sur  $\lambda \in \mathbb{R}$  le système suivant est-il un système de Cramer ?

$$(S_\lambda) \quad \begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

(cf correction p. 23).

*Remarque 3.4.* On peut utiliser le déterminant pour établir qu'une famille de vecteurs est ou n'est pas une base. On rappelle qu'une matrice carrée  $A$  est inversible si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est de rang  $n$ . On en déduit qu'une famille de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{K}^n$  est une base si et seulement si le déterminant de la matrice carrée dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs dans la base canonique est non nul.

*Exemple 3.5.* On considère la famille de trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  :  $((1, 2, 3), (0, 1, 4), (2, 4, 8))$ . Par la règle de Sarrus, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 2.$$

### 3.b. Déterminant d'une transposée

**Proposition 3.6.** *Soit  $A$  une matrice  $n \times n$ . Alors*

$$\det A = \det {}^t A.$$

*Démonstration.* Si  $A$  n'est pas inversible,  ${}^t A$  ne l'est pas non plus, et donc, par le théorème 3.2,  $\det A = 0 = \det {}^t A$ .

Si  $A$  est inversible,  $A$  est produit de matrices élémentaires. D'après le théorème 3.1, il suffit donc de montrer la formule  $\det A = \det {}^t A$  lorsque  $A$  est une matrice élémentaire. Or :

$${}^t D_k(\lambda) = D_k(\lambda), \quad {}^t T_{k\ell}(\lambda) = T_{\ell k}(\lambda), \quad {}^t R_{k\ell} = R_{k\ell},$$

ce montre le résultat désiré (rappelons que toutes les matrices de transvection sont de déterminant 1).  $\square$

Dans tous les résultats qui précèdent, on peut donc remplacer "ligne" par "colonne". On peut par exemple calculer un déterminant en faisant des manipulations élémentaires sur les colonnes. Le déterminant d'une matrice dont une colonne est nulle ou deux colonnes égales vaut zéro, etc...

### 3.c. Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou par rapport à une colonne

**Proposition 3.7.** *Soit  $A = [a_{i,j}]_{i,j}$  une matrice  $n \times n$ . Soit  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Alors (en notant comme précédemment  $A_{i,j}$  la matrice obtenue à partir de  $A$  en retirant la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne),*

$$(IX.3) \quad \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}.$$

De même, si  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$(IX.4) \quad \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}.$$

Dans le cas (IX.3), on dit qu'on a développé le déterminant par rapport à la  $j$ -ième colonne. Dans le cas (IX.4), qu'on l'a développé par rapport à la  $i$ -ième ligne.

*Démonstration.* On commence par montrer la formule (IX.3). Lorsque  $j = 1$ , cette formule est exactement la définition du déterminant. Si  $j \geq 2$ , on se ramène au cas  $j = 1$ , en remplaçant la matrice  $A$  par la matrice  $A' = [a'_{i,j}]_{i,j}$  obtenue à partir de  $A$  en mettant la  $j$ -ième colonne de  $A$  en premier, et donc en décalant les colonnes  $1, 2, \dots, j-1$  d'un rang vers la droite. En notant  $(C_k)_{k=1\dots n}$  les colonnes de  $A$  et  $(C'_k)_{k=1\dots n}$  les colonnes de  $A'$ , on a donc :

$$\begin{aligned} (C'_1) &= (C_j) \\ (C'_2) &= (C_1), \dots, (C'_j) = (C_{j-1}) \\ (C'_{j+1}) &= (C_{j+1}), \dots, (C'_n) = (C_n). \end{aligned}$$

La matrice  $A'$  est obtenue à partir de  $A$  par  $j-1$  échanges de colonnes : on échange les colonnes  $j$  et  $j-1$ , puis  $j-1$  et  $j-2$ , etc... jusqu'aux colonnes 2 et 1. Le déterminant de  $A'$  est donc égal au déterminant de  $A$  multiplié par  $(-1)^{j-1}$ . On déduit alors la formule (IX.3) de la définition du déterminant de  $A'$  :

$$\det A' = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a'_{i,1} \det A'_{i,1},$$

en remarquant que, par définition de  $A'$ ,

$$a_{i,j} = a'_{i,1} \text{ et } A_{i,j} = A'_{i,1}.$$

La formule (IX.4) se déduit de la formule (IX.3) par transposition.  $\square$

La formule précédente peut s'avérer très utile pour calculer un déterminant : on choisit la ligne ou la colonne qui a le plus de zéro, puis on développe par rapport à cette ligne pour réduire la taille du déterminant.

*Exemple 3.8.* En développant par rapport à la deuxième ligne, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \times (-4) + 2 \times 14 = 40,$$

en calculant les déterminants  $3 \times 3$  par la règle de Sarrus.

#### 4. Déterminant d'un endomorphisme

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ ,  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base de  $E$ . Rappelons que  $f$  est représenté dans la base  $\mathcal{B}$  par la matrice  $n \times n$   $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ , matrice de représentation de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ , dont la  $j$ -ième colonne est formée des coordonnées de  $f(\vec{e}_j)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Lemme 4.1.** *Le déterminant de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  ne dépend pas du choix de la base  $\mathcal{B}$  de  $E$ .*

**Définition 4.2.** La valeur commune de tous ces déterminants est appelée le déterminant de l'endomorphisme  $f$  et noté  $\det(f)$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Par la formule de changement de base (cf §6),

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P,$$

où  $P$  est une matrice inversible  $n \times n$ , la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . On en déduit, par le théorème 3.1 sur le déterminant d'un produit de matrices :

$$\begin{aligned} \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) &= \det(P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P) = \det(P^{-1}) \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \det P \\ &= \frac{1}{\det(P)} \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \det P. \end{aligned}$$

On a bien montré :

$$\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)).$$

□

*Exercice 4.3.* Calculer le déterminant de la rotation  $R_\theta$  de  $\mathbb{R}^2$  de centre  $(0,0)$  et d'angle  $\theta$ . (Correction p. 23).

*Exercice 4.4.* Soit  $e_1 = (1, 1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 1)$ ,  $e_3 = (2, 0, 1)$ . Vérifier que  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f$  l'unique endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $f(e_1) = (2, 2, 0)$ ,  $f(e_2) = (1, 2, 1)$ ,  $f(e_3) = (2, 1, 2)$ . Exprimer la matrice de  $f$  dans cette base, puis calculer le déterminant de  $f$ . (Correction p. 23).

#### Réponse à quelques exercices

Exercice 1.1. Le premier déterminant vaut 2, le deuxième  $-4$  et le troisième 14.

Exercice 2.13. Par les remplacements  $(L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1)$ ,  $(L_3) \leftarrow (L_3) + (L_1)$  et  $(L_4) \leftarrow 3(L_1)$ , qui ne changent pas le déterminant d'après le corollaire 2.11, on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -2 & -4 & -2 \\ 3 & 6 & 9 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

(Pour la deuxième égalité on a utilisé que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit de ses termes diagonaux).

Exercice 3.3.

La matrice des coefficients du système est :

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

On sait que le système est un système de Cramer si et seulement si cette matrice est inversible. De plus, cette condition est équivalente à la condition  $\det(A_\lambda) \neq 0$ . Par un calcul direct (par exemple à l'aide de la règle de Sarrus), on obtient

$$\det(A_\lambda) = 4 - 4\lambda.$$

Le système est donc un système de Cramer si et seulement si  $\lambda \neq 1$ .

Exercice 4.3.

En utilisant les coordonnées polaires du plan complexe, on voit que  $R_\theta$  correspond à l'application qui au point d'affixe  $z$  associe le point d'affixe  $e^{i\theta} z = x \cos \theta - y \sin \theta + i(x \sin \theta + y \cos \theta)$ . On en déduit la formule

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

La matrice de  $R_\theta$  dans la base canonique est donc :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de  $R_\theta$  est  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ .

Exercice 4.4.

On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

La famille  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est donc une base de  $\mathbb{R}^3$ .

On vérifie facilement :

$$f(e_1) = 2e_1, \quad f(e_2) = e_1 + e_2, \quad f(e_3) = e_2 + e_3.$$

La matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est donc

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de  $f$  est égal au déterminant de cette matrice triangulaire supérieure, soit le produit de ses termes diagonaux, qui vaut 2.

## 5. Travaux dirigés

Exercice IX.1. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} i & 2 & -i \\ -i & 0 & 1 \\ -1 & 3 & i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 117 & 1 \\ 3 & 116 & 1 \\ -3 & 122 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice IX.2. Calculer les déterminants suivants en développant par rapport à une ligne ou une colonne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -6 \end{vmatrix}.$$

Exercice IX.3. Calculer les déterminants suivants par des manipulations sur les lignes ou les colonnes :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 11 & -7 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & c & d \\ a & a & a & c \\ a & b & a & c \end{vmatrix},$$

où  $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ .

Exercice IX.4. En raisonnant par récurrence sur la taille  $n$  de la matrice, et en utilisant la définition du déterminant, montrer la proposition 2.6.

Exercice IX.5. Soit  $\vec{x} = (1, 2, a)$ ,  $\vec{y} = (0, 1, 3)$  et  $\vec{z} = (-1, 2, 1)$ . Pour quelles valeurs du paramètre  $a \in \mathbb{R}$  la famille  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  forme-t-elle une base de  $\mathbb{R}^3$  ?

Exercice IX.6. Pour quelles valeurs de  $m \in \mathbb{R}$  les matrices suivantes sont-elles inversibles :

$$A_m = \begin{bmatrix} m & 2 & m+1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & m & 2m+2 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -m \\ 1 & m & 1 \\ -m & 1 & 1 \end{bmatrix}?$$

Exercice IX.7. On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  défini par

$$f((x, y)) = (4x + 6y, -3x - 5y).$$

a. Calculer

$$P(\lambda) = \det(f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^2}).$$

Déterminer les zéros de  $P$  et leurs ordres de multiplicité.

b. Lorsque  $\lambda$  est un zéro de  $P$ , déterminer le noyau de  $f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ .

c. Utiliser les questions précédentes pour trouver une base  $\mathcal{B}$  telle que la matrice de représentation de  $f$  dans  $\mathcal{B}$  est diagonale.

d. Soit

$$g((x, y)) = (3x + 4y, -x - y).$$

Calculer

$$Q(\lambda) = \det(g - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^2}).$$

Déterminer les zéros de  $Q$  et leurs ordres de multiplicité. Peut-on trouver une base  $\mathcal{C}$  telle que la matrice de représentation de  $g$  dans  $\mathcal{C}$  est diagonale ?

# Table des matières

<b>VIII Applications linéaires</b>	<b>1</b>
1. Définitions et premières propriétés	1
1.a. Définitions et exemples	1
1.b. Quelques propriétés	1
2. Applications linéaires et matrices	2
2.a. Matrice de représentation d'une application linéaire	2
2.b. Exemple : cas des bases canoniques	2
2.c. Cas général	3
2.d. Un exemple de changement de base	3
2.e. Applications linéaires et multiplication par une matrice	4
3. Opérations sur les applications linéaires	4
3.a. Addition et multiplication par un scalaire	4
3.b. Composition	5
3.c. Effet des opérations sur les matrices	5
4. Applications linéaires et sous-espaces vectoriels	6
4.a. Rappels	6
4.b. Image et noyau d'une application linéaire	6
4.c. Injectivité et surjectivité des applications linéaires	7
4.d. Rang d'une application linéaire	8
4.e. Retour sur les systèmes linéaires	9
5. Isomorphismes	10
5.a. Définition	10
5.b. Application réciproque d'un isomorphisme	10
5.c. Condition sur les dimensions	11
5.d. Matrices inversibles et isomorphismes	11
5.e. Isomorphisme entre espaces de mêmes dimensions	11
6. Complément : formule de changement de bases	12
6.a. Matrices de passage	12
6.b. Formule de changement de bases	13
7. Correction de quelques exercices	14
8. Travaux dirigés	15
9. Exercices à préparer pour le contrôle continu	16
<b>IX. Déterminant</b>	<b>17</b>
1. Définition du déterminant d'une matrice. Exemples	17
1.a. Définition	17

1.b.	Formules pour les petites matrices . . . . .	17
1.c.	Cas des matrices triangulaires supérieures . . . . .	18
2.	Manipulations sur les lignes . . . . .	18
2.a.	Echange de deux lignes . . . . .	18
2.b.	Linéarité par rapport à une ligne . . . . .	19
3.	Déterminant, produit de matrices et matrices inversibles . . . . .	21
3.a.	Résultats principaux . . . . .	21
3.b.	Déterminant d'une transposée . . . . .	22
3.c.	Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou par rapport à une colonne . . . . .	22
4.	Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	23
5.	Travaux dirigés . . . . .	24