THÉORIE DES DISTRIBUTIONS
EXAMEN DE RATTRAPAGE

INSTITUT GALILÉE.
SUP GALILÉE, MACS 2, 2020-2021

Durée : 3 heures. Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Sauf mention contraire, toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués.

Dans tout l'examen, d est un entier naturel non nul, et Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Les notations utilisées ($\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ etc...) sont les mêmes que dans le cours.

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ et K un compact de Ω, on pose

$$p_{m,K}(\varphi) = \max_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq m}} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

On admet l'inégalité suivante : $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \leq |t|$.

Exercice 1.

1.1) Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C^\infty(\Omega)$, et $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Donner la définition de

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \text{ dans } C^\infty(\Omega).$$

1.2) On suppose maintenant que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Donner la définition de

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega).$$

1.3) Soit pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right)$. Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout x de K, pour tout $n \geq 1$, $|\varphi_n'(x)| \leq \frac{C_1}{n^2}$. En déduire qu'il existe $C_0 > 0$ tel que tel que pour tout x de K, pour tout $n \geq 1$, $|\varphi_n(x) - 1| \leq \frac{C}{n^2}$. Montrer enfin que pour tout entier $j \geq 2$, pour tout réel x, pour tout $n \geq 2$, $\left|\frac{d^j}{dx^j}\left(\varphi_n(x) - 1\right)\right| \leq \frac{1}{n^j}$. On pourra admettre les résultats de cette question pour traiter la suivante.

1.4) Montrer que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend dans $C^\infty(\Omega)$ vers une limite φ que l'on précisera.

1.5) Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\psi_n = \varphi_n\psi$. Montrer que la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers une limite que l'on précisera.

Exercice 2.

2.1) Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Donner une définition de “T est une distribution sur Ω” qui utilise la notion de convergence vue en 1.2).

2.2) Donner une définition équivalente de cette notion qui utilise la notation $p_{m,K}$ introduite au début de l'énoncé.

2.3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ et } 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Date: Jeudi 21 Janvier 2021.

En d'autres termes, f est la fonction indicatrice de $[0,1]^2$. Justifier que f définit une distribution T_f sur $\mathbb{R}^2$. On explicitera $\langle T_f, \varphi\rangle$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Comme dans le cours, on notera simplement f la distribution T_f.

2.4) Pour $a \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on note

$$\langle P_a, \varphi\rangle = \int_0^1 \varphi(x_1, a)dx_1.$$

Montrer que P_a ainsi définie est une distribution sur $\mathbb{R}^2$. Donner (sans démonstration) le support de cette distribution. Quel est l'ordre de P_a ?

2.5) Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ au sens des distributions.

2.6) Déterminer $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ au sens des distributions. On exprimera cette distribution en fonction de masses de Dirac.

Exercice 3.

3.1) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et

$$\widetilde{\varphi}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}, x \neq 0.$$

Rappeler la formule de Taylor à l'ordre 1 pour φ, entre $x \in \mathbb{R}$ et 0, puis montrer que $\widetilde{\varphi}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\widetilde{\varphi}(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)|.$$

3.2) Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle A, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{x}\varphi(x)dx + (\log\varepsilon)\varphi(0).$$

Montrer que A est une distribution sur $\mathbb{R}$.

3.3) Soit $G(x) = \begin{cases} \log x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$ Calculer la dérivée de G au sens des distributions.

Exercice 4.

4.1) Donner la définition de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, puis dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

4.2) Calculer la transformation de Fourier de la fonction constante égale à 1. On pourra noter simplement 1 cette fonction.

4.3) Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = e^{-|x|/n}$. Montrer

$$\lim_{n\to\infty} g_n = 1 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

4.4) Calculer la transformée de Fourier $\widehat{g_n}$ de g_n.

4.5) Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$,

$$h_n(x) = \frac{1}{ix + 1/n} + \frac{1}{-ix + 1/n}.$$

Déduire des questions précédentes la limite de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

4.6) Calculer g_n' au sens des distributions.

4.7) Déterminer $\lim_{n\to\infty} ng_n'$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

4.8) Déterminer $\widehat{g_n'}$. On pourra utiliser la question 4.4).

4.9) **Difficile !** Calculer $\lim_{n\to\infty} \widehat{g_n'}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On exprimera cette limite à l'aide d'une distribution vue dans le cours. En déduire la transformation de Fourier de la fonction de Heaviside.