L1, algèbre linéaire
2011/2012 Université
Mathématiques Paris 13

Examen de rattrapage du 14 juin 2012

Durée: 3h. Tout document et appareil électronique est interdit.
Barême indicatif: **1:** 3 **2:** 4 **3:** 5 **4:** 3, **5:** 5

Exercice 1.
a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et M_a la matrice

$$M_a = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & 2a & a \\ 3a & 0 & -a \end{bmatrix}.$$

(i) Calculer le déterminant de M_a.
(ii) Déterminer le rang de M_a en fonction de $a \in \mathbb{R}$.

b) Soit $b \in \mathbb{R}$ et N_b la matrice

$$N_b = \begin{bmatrix} b & b & 2 & 0 \\ 1 & b & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Calculer le déterminant de N_b.
(ii) Déterminer le rang de N_b en fonction de $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.
a) Soit E et F des espaces vectoriels de dimensions finies. Soit f une application linéaire de E dans F. On note $\mathrm{rg}(f)$ le rang de f. Rappeler une relation entre $\dim E$, $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ et $\mathrm{rg}(f)$.
b) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = \left(2x + y + z, 10x + 5y + 5z, -x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right).$$

(i) Déterminer une base du noyau de f.
(ii) Déterminer le rang de f (on pourra bien sûr utiliser la relation rappelée à la question a).
(iii) L'application f est-elle injective? surjective? bijective?

c) Soit h l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques est:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(i) Exprimer $h(x, y)$ en fonction de x et y.
(ii) Déterminer le noyau de h.
(iii) Déterminer le rang de h.
(iv) L'application h est-elle injective? surjective? bijective?

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
a) Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E. Rappeler une relation entre $\dim F$, $\dim G$, $\dim(F + G)$ et $\dim(F \cap G)$.
b) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, 1, 3)$ et $(2, 0, 4)$.

(i) La famille $\{(1,1,3),(2,0,4)\}$ est-elle libre? Donner une base et la dimension de F.
(ii) Décrire F par un système d'une ou plusieurs équations linéaires.

c) Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $(1,2,4)$.
(i) Donner une base et la dimension de G.
(ii) Donner une base et la dimension de $F \cap G$.
(iii) Déterminer la dimension de $F+G$.
(iv) La somme $F+G$ est-elle directe? Ces espaces sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

d) Soit

$$H = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x+z=0\Big\}.$$

(i) Donner une base et la dimension de H.
(ii) Donner une base et la dimension de $G \cap H$.
(iii) Donner la dimension de $G+H$.
(iv) La somme $G+H$ est-elle directe? Ces espaces sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Calculer A^2.

b) Montrer que $A^3 = 0$. La matrice A est-elle inversible?

c) Soit I_3 la matrice identité de $\mathbb{R}^3$.
(i) Donner une expression simple de $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$.
(ii) Montrer que la matrice $I_3 - A$ est inversible.

Exercice 5.

a) Soit P la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 7 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

b) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $\widetilde{\mathcal{B}}$ la famille

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \Big((3,-2,1),(-8,3,-2),(7,-3,2)\Big).$$

Justifier que $\widetilde{\mathcal{B}}$ est une base. Donner les matrices de passage

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} \text{ et } \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}}.$$

c) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x,y,z) = (-x - 18y - 27z, 11y + 18z, -6y - 10z)$$

(i) Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ dans la base canonique.
(ii) Soit $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{B}}}(f)$ la matrice de f dans la base $\widetilde{\mathcal{B}}$. Donner une relation entre $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{B}}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}$ et $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}}$.
(iii) Calculer $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{B}}}(f)$.
(iv) Donner, sans calcul, les valeurs propres de f et des vecteurs propres correspondants.