CP2i2. Mathématiques.
Quelques exercices de révision sur la réduction des endomorphismes

Exercice 1. Apprendre parfaitement toutes les définitions du cours.

Exercice 2. Donner un exemple:

- D'un endomorphisme trigonalisable mais non diagonalisable.
- D'un endomorphisme non-trigonalisable.

A quelle condition nécessaire et suffisante sur son polynôme caractéristique un endomorphisme est-il trigonalisable?

Donner une condition suffisante sur son polynôme caractéristique pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable. Est-ce une condition suffisante? Donner un exemple.

Exercice 3. Calculer les polynômes caractéristique des matrices suivantes. Donner leur valeurs propres. Dire si ils elles sont diagonalisables (le cas échéant trigonalisables). Si c'est le cas, donner une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$).

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -12 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la trace de D^n pour tout n.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout n.

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (E espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$), $P \in \mathbb{K}[X]$ et λ une valeur propre de f. Montrer que $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$.

Exercice 6. Soit $(y_k)_{k\geq 0}$ la suite définie par

$$y_0 = a, \ y_1 = b, \quad \forall k \geq 0, \ y_{k+2} = -2y_{k+1} - 3y_k,$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En utilisant la méthode vue en cours, calculer y_k pour tout k. Donner la limite de y_k quand $k \to \infty$ selon les paramètres a et b.

Exercice 7. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'un des systèmes d'équations différentielles:

$$(S_1) \qquad \begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) + 3y_2(t), \end{cases}$$

ou

$$(S_2) \qquad \begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) + 7y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_1(t) - 3y_2(t) \end{cases}$$

avec condition initiale $(y_1(0), y_2(0)) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. En utilisant la méthode vue en travaux dirigés, calculer les solutions de (S_1) (respectivement (S_2)). Déterminer, selon les paramètres a et b, la limite de $y_1(t)$ et $y_2(t)$ quand $t \to \infty$.