Institut Galilée, université Paris 13
L1, algèbre linéaire 2012/2013 deuxième semestre
TD n^{o}4.

Indépendance linéaire et dimension

Exercice 1. Dire pour chacune des familles suivantes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ si c'est une famille libre, une famille génératrice et/ou une base de $\mathbb{R}^3$.

a) $\big((-4,-5,-2),(2,2,2),(0,-2,3)\big)$ **b)** $\big((-6,4,-16),(-9,7,-25),(3,-3,9)\big)$

c) $\big((1,0,1),(1,0,2),(0,3,-3),(1,6,-2)\big)$ **d)** $\big((m,-3,-7),(2,3,7),(2,0,m)\big)$,

où m est un paramètre réel.

Exercice 2. Dire pour chacune des familles suivantes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ si c'est une famille libre, une famille génératrice et/ou une base de $\mathbb{R}^4$.

a) $\big((-2,0,1,1),(2,-2,-2,0),(0,-3,-2,2),(-7,1,4,2)\big)$ **b)** $\big((0,1,1,-1),(-2,-2,-1,1),(4,-2,-3,2)\big)$

c) $\big((1,-2,0,1),(-2,2,4,-6),(-9,14,8,-17)\big)$ **d)** $\big((m,1,m,1);(2,m,2,m)\big)$,

où m est un paramètre réel.

Exercice 3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un espace vectoriel E.

3.1. Comparer les sous-espaces $\mathrm{vect}(\vec{u},\vec{v})$ et $\mathrm{vect}(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v})$.

3.2. Y-a-t-il un lien entre la nature (libre, liée) de la famille $(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v})$ et celle de la famille $(\vec{u},\vec{v})$?

Exercice 4. Soit $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ une famille libre d'un espace vectoriel E. les familles suivantes sont-elles libres ou liées ? $\mathcal{F}=(\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{w}+\vec{u})$, $\mathcal{G}=(\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{w}-\vec{u})$.

Exercice 5. Soit $\vec{u}_1=(0,-3,1)$, $\vec{u}_2=(-2,-4,1)$, $\vec{u}_3=(3,1,0)$.

5.1. Montrer que $\mathcal{B}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5.2. Exprimer les coordonnées d'un point (x_1,x_2,x_3) de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 6. Soit $\mathcal{B}=\big((-1,5),(1,-6)\big)$ et $\mathcal{C}=\big((-1,1);(-2,3)\big)$.

6.1. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.

6.2. Soit $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$, et (x,y) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, on appelle F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé des solutions du système (S). Donner une base et la dimension de F.

$$(S)\ x_1-3x_2+x_3+4x_4=0,\quad (S)\begin{cases}-4x_1-3x_2+6x_3+2x_4=0\\ -6x_1-8x_2+2x_3+9x_4=0\\ 2x_1+2x_2-2x_3-2x_4=0\end{cases},\quad (S)\begin{cases}x_1+2x_2+5x_3-4x_4=0\\ x_2+x_3-3x_4=0\\ -x_1-3x_3-2x_4=0\end{cases}$$

Exercice 8. Soit $\vec{u}=(-2,1,3)$ et $\vec{v}=(1,-1,-2)$. Soit $F=\mathrm{vect}(\vec{u},\vec{v})$.

8.1. Quelle est la dimension de F?

8.2. Fixons $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. A quelle condition sur (x,y,z) le système

$$a\vec{u}+b\vec{v}=(x,y,z),$$

d'inconnues réelles a et b est-il compatible? En déduire une équation cartésienne de F.

Exercice 9. En vous inspirant de l'exercice 8, décrire par une équation cartésienne (ou un système d'équations cartésiennes) chacun des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$. Donner la dimension de ces sous-espaces vectoriels.

$$F_1 = \text{vect}\Big\{(-1,2,3)\Big\}, \quad F_2 = \text{vect}\Big\{(-1,4,1,2),(3,3,2,-1)\Big\},$$
$$F_3 = \text{vect}\Big\{(1,5,2),(-1,-3,-1),(3,5,1)\Big\}, \quad F_4 = \Big\{(-\lambda-5\mu, \lambda-3\mu, 2\lambda+2\mu),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\Big\}$$

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^4$, soit F et G définis respectivement par les systèmes linéaires :

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1-2x_3+2x_4=0 \end{cases}$$

10.1. Trouver deux familles : $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ qui engendre F et $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ qui engendre G.

10.2. Trouver une équation cartésienne de $F+G$ et donner sa dimension.

Exercice 11. Soit P le plan défini par $P = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+3y-z=0\}$, et D la droite de vecteur directeur $\vec{e} = (0,1,2)$.

11.1. Montrer avec le moins de calculs possible que P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

11.2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Déterminer $\vec{v}\in P$, $\vec{w}\in D$ tels que $(x,y,z) = \vec{v}+\vec{w}$.

Exercice 12. Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

12.1. Rappeler une relation entre les dimensions de F, G, $F\cap G$ et $F+G$.

12.2. Dans chacun des cas suivants donner (avec le moins de calculs possibles) les dimensions de F, G, $F\cap G$ et $F+G$. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires dans E?

1. $E=\mathbb{R}^3$, $F = \text{vect}\Big((-1,3,2)\Big)$, $G = \text{vect}\Big((3,-8,7),(1,-3,3)\Big)$.
2. $E=\mathbb{R}^3$, $F = \text{vect}\Big((a,2,1)\Big)$, $G = \Big((x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\Big)$, où a est un paramètre réel.
3. $E=\mathbb{R}^3$, $F = \Big\{(\lambda+2\mu, 4\lambda-\mu, 3\lambda+2\mu),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\Big\}$, $G = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x=y\Big\}$.
4. $E=\mathbb{R}^4$, $F = \text{vect}\Big((-7,2,0,4),(1,-1,2,0)\Big)$. $G = \Big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x+y=0 \text{ et } z+t=0\Big\}$.

Exercice 13. Donner le rang des familles de vecteurs suivantes. En extraire une famille libre.

$$\mathcal{F}_1 = \Big((1,2,5),(-1,1,1),(0,-6,-12)\Big), \quad \mathcal{F}_2 = \Big((1,-2,-3),(2,-5,-7),(1,-3,-3)\Big),$$
$$\mathcal{F}_3 = \Big((-4,2),(3,4),(-1,2),(2,-6),(2,2)\Big).$$

Exercice 14. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\vec{v}_1 = (1,2,a)$, $\vec{v}_2 = (a,a^2,4)$, $\vec{v}_3 = (a,a^2,a+2)$, où a est un paramètre réel. Soit $E = \text{vect}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$. Déterminer la dimension de E, suivant les valeurs de a.

Exercice 15. Montrer que les familles suivantes sont libres. Les compléter en une base de $\mathbb{R}^3$ (respectivement de $\mathbb{R}^4$):

$$\mathcal{F} = \{(2,-3,1),(1,1,2)\}, \quad \mathcal{G} = \{(1,4,0,-2),(0,2,3,4)\}.$$

Exercice 16.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère un plan P d'équation $ax+by+cz=0$. Que doit vérifier (a,b,c) pour que P soit supplémentaire de l'axe $0z$?
2. Soit $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$, une base de P. Montrer qu'il existe une unique base $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ du plan $0xy$ telle que :
$(\vec{u}_1-\vec{v}_1, \vec{u}_2-\vec{v}_2)\in 0z\times 0z$.
3. Soit α et β tels que $(1,0,\alpha)$ et $(0,1,\beta)$ sont dans P. Montrer que $\Big((1,0,\alpha),(0,1,\beta)\Big)$ est une base de P. Soit $\vec{w} = (x,y,z)\in P$. Trouver les coordonnées de $\vec{w}$ dans cette base.

Exercices supplémentaires

Exercice 17. Soit E un espace vectoriel de dimension fini, F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. On suppose

$$H \subset F \cup G.$$

Montrer que $\dim H \leq \dim F$ ou $\dim H \leq \dim G$.

Exercice 18. Soit $n \geq 1$. Soit $\mathcal{M}_n$ l'espace vectoriel des matrices réelles $n \times n$, et $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{T}_n$ les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n$ formés respectivement des matrices antisymétriques (i.e. telles que $M = -{}^tM$), symétriques (telles que $M = {}^tM$) et triangulaires supérieures.

18.1. Donner les dimensions de $\mathcal{M}_n$, $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{T}_n$.

18.2. Déterminer $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{S}_n$, $\mathcal{T}_n \cap \mathcal{A}_n$ et $\mathcal{T}_n \cap \mathcal{S}_n$.

18.3. Déterminer $\mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$, $\mathcal{T}_n + \mathcal{S}_n$ et $\mathcal{T}_n + \mathcal{A}_n$. Les espaces $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ (respectivement $\mathcal{T}_n$ et $\mathcal{A}_n$, puis $\mathcal{T}_n$ et $\mathcal{S}_n$) sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{M}_n$?

18.4. Soit $M \in \mathcal{M}_n$. Déterminer $A \in \mathcal{A}_n$, $S \in \mathcal{S}_n$ tel que $M = A + S$. Même question en remplaçant $\mathcal{S}_n$ par $\mathcal{T}_n$.

Exercice 19. Soit $n \geq 2$, E un espace vectoriel de dimension finie, et E_1,...,E_n des sous-espaces vectoriels de E. On rappelle que la somme $E_1 + \ldots + E_n$ est l'espace vectoriel $\{\vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_n, \quad \vec{u}_1 \in E_1, \ldots, \vec{u}_n \in E_n\}$. Cette somme est dite *directe* quand tout élément $\vec{u}$ de $E_1 + \ldots + E_n$ s'écrit de manière unique $\vec{u} = \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_n$, avec $\vec{u}_j \in E_j$ pour tout j. Les espaces $(E_j)_{j=1\ldots n}$ sont dits supplémentaires quand leur somme est directe et égale à E. On commence par traîter le cas $n = 3$.

19.1. Montrer que la somme $E_1 + E_2 + E_3$ est directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ et $(E_1 + E_2) \cap E_3 = \{\vec{0}\}$.

19.2. Montrer que la somme $E_1+E_2+E_3$ est directe si et seulement si $\dim(E_1+E_2+E_3) = \dim E_1+\dim E_2+\dim E_3$.

19.3. Montrer que les espaces E_1, E_2 et E_3 sont supplémentaires dans E si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

1. leur somme est directe et $\dim E_1 + \dim E_2 + \dim E_3 = \dim E$.
2. $E_1 + E_2 + E_3 = E$ et $\dim E_1 + \dim E_2 + \dim E_3 = \dim E$.

19.4. Généraliser les questions précédentes au cas $n \geq 3$.

Exercice 20. Soit E un espace vectoriel et $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = \mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E, ayant la propriété suivante: si $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$, tous deux distincts de j, tels que $\vec{u}_j \in \operatorname{vect}\Big(\vec{u}_k, \vec{u}_\ell\Big)$.

20.1. Supposons $n = 3$ ou $n = 4$. Montrer que le rang de $\mathcal{F}$ est ≤ 2 et que cette majoration est optimale.

20.2. Donner de la même manière une majoration optimale du rang de $\mathcal{F}$ lorsque $n = 5$ ou $n = 6$, puis pour des n généraux (difficile).