Matrices

Exercice 1 Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix} 3i \\ 5 \\ 2+2i \end{pmatrix}$ et
$U = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 5 & 5+\sqrt{7} \end{pmatrix}$.
(a) Calculer, si c'est possible, $C+E; A+C; AC; CA; -7CD$.
(b) Calculer les coefficients de la matrice H définie par la combinaison linéaire suivante : $H = 2C - 3F$.
(c) Quels sont les produits de deux matrices issues de la liste que l'on peut faire ? Quelle est la taille des matrices obtenues ?
(d) Vérifier que $(CA)B = C(AB)$
(e) Calculer EF et FE. A-t-on $(E+F)^2 = E^2 + 2EF + F^2$?
(f) Calculer CX et déterminer X tel que $CX = D$.

Exercice 2 Résoudre l'équation $XC = 0$, d'inconnu $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; où C est la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$. Même question pour $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Quelles sont les matrices X de taille 3×3 qui vérifient $XC = 0$, où C est la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$?

Exercice 3 Déterminer toutes les matrices 2×2 qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Remarquer qu'il s'agit de l'ensemble $\{\lambda I + \mu A,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Est-ce que pour toute A de taille 2×2, l'ensemble des matrices 2×2 qui commutent avec A est toujours de cette forme ?

Exercice 4 Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer toutes les puissances de chaqu'une des trois matrices.

Exercice 5 Démontrer que deux matrices carrés de mêmes tailles A et B commutent si et seulement si leurs transposées commutent.

Exercice 6 Fixons un entier positif n qui sera la taille des matrices carrés qu'on va considérer dans cet exercice (dans un premier temps on pourra fixer $n = 3$). Rappeler les définitions des matrices élémentaires de dilatation $D_k(\lambda)$, de transvection $T_{kl}(\lambda)$ et de transposition R_{kl}. Quelle est la matrice obtenue par le produit $T_{kl}(\lambda)T_{kl}(\mu)$? Et la matrice $R_{kl}R_{lm}$? Calculer le produit d'une matrice de dilatation avec une de transvection. Pour tout couple de matrices élémentaires, en faire le produit. Question bonus : décrire toutes les matrices qui s'écrivent comme produit d'un certain nombre de matrices de transposition. Combien de telles matrices a-t-on ?

Exercice 7 Soit A une matrice carrée. On dit que B est une racine carrée de A si $BB = A$. Donner des racines carrées de $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Est-ce que toute matrice 2×2 possède une racine carrée ?

Exercice 8 Résoudre, en fonction des réels a, b, c, le système linéaire suivant $\begin{cases} -x + 2y - 4z = a \\ \quad\;\; y + 3z \quad = b \\ -x + 3y - z = c \end{cases}$

Est-ce que la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible ? Si oui donner une inverse.

Exercice 9 Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles ? Quand elles le sont donner une inverse.

Exercice 10 Est-ce qu'une matrice dont une ligne n'est constituée que de zéro est inversible ? Même question pour une matrice ayant la première ligne égale à la deuxième. De même pour une matrice ayant la première ligne proportionnelle à la dernière. Que dire dans le cas d'une matrice ayant la première ligne égale à la somme de la deuxième et de la troisième ?

Exercice 11 Soient A et B deux matrices carrés de même taille. Est-ce que si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$? Est-ce que si $AB = 0$ et A est inversible alors $B = 0$?

Exercice 12 Déterminer K, L, M matrices 4×4 telles que pour toute matrice A de même taille on ait :
- KA est la matrice qui a la même première ligne et la même dernière ligne que A mais dont la deuxième ligne est obtenue comme somme de la première et la deuxième ligne de A et dont la troisième ligne est 4 fois la troisième ligne de A.
- LA est la matrice qui a la même première ligne et la même troisième ligne que A mais dont la deuxième ligne et la quatrième ont été échangées.
- AM est la matrice qui a la même première colonne que A mais dont la deuxième colonne est obtenue comme somme de la première colonne et la deuxième colonne de A et dont la troisième colonne et la quatrième colonne ont été échangées.

Démontrer que des telles K, L, M sont uniques. Déterminer leurs transposée ${}^tK, {}^tL, {}^tM$ et décrire pour tout A les matrices ${}^tKA, {}^tLA, {}^tMA$ et A^tK, A^tL, A^tM en fonction de A.