

Questions à préparer sur les matrices

Exercice 1 Décrire l'ensemble des $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que le système linéaire suivant $\begin{cases} -x + 2y - 4z = a \\ y + 3z = b \\ -2x + 7y + z = c \end{cases}$

ait au moins une solution. Est-ce que la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible? Si oui donner une inverse.

Exercice 2 Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles? Quand elles le sont donner une inverse.

Exercice 3 Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$D = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix} 3i \\ 5 \\ 2 + 2i \end{pmatrix}$ et

$U = (\sqrt{2} \ 5 \ 5 + \sqrt{7})$.

- Calculer, si c'est possible, $C + E$; $A + C$; AC ; CA ; $-7CD$.
- Calculer les coefficients de la matrice H définie par la combinaison linéaire suivante : $H = 2C - 3F$.
- Quels sont les produits de deux matrices issues de la liste que l'on peut faire? Quelle est la taille des matrices obtenues?
- Vérifier que $(CA)B = C(AB)$
- Calculer EF et FE . A-t-on $(E + F)^2 = E^2 + 2EF + F^2$?
- Calculer CX et déterminer X tel que $CX = D$.

Exercice 4 Quelles sont les matrices X de taille 3×3 qui vérifient $XC = 0$, où C est la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$?

Exercice 5 Déterminer en fonction de $a, b \in \mathbb{R}$ toutes les matrices 2×2 qui commutent avec $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Exercice 6 Pour chaque matrice élémentaire E de taille $n \times n$ déterminer les matrices A de même taille qui commutent avec E.