Master 1 — Mathématiques — 2008

Corrigé du devoir d'Algèbre et Topologie I

Grégory Ginot

Exercice 1 (Produit tensoriel des $\mathbb{Z}$-modules de type fini). *Le but de cet exercice est de déterminer le produit tensoriel de deux groupes abéliens de type fini.*

(1) *Montrer qu'il y a un isomorphisme canonique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\gcd(n,m)\mathbb{Z}$ où $\gcd(n,m)$ désigne le plus grand diviseur commun de n et m.*

(2) *Soit M et N deux groupes abéliens de type fini. En utilisant le théorème de structure, déterminer à quel $\mathbb{Z}$-module de type fini est isomorphe $M \otimes N$.*

Solution 1. (1) On note $m : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\gcd(n,m)\mathbb{Z}$ la "multiplication" $(\overline{x}^n, \overline{y}^m) \mapsto \overline{xy}^{\gcd(n,m)}$. Cette application est bien définie puisque n et m sont nuls dans $\mathbb{Z}/\gcd(n,m)\mathbb{Z}$. Elle est aussi bilinéaire. Il suffit maintenant de vérifier que $\mathbb{Z}/\gcd(n,m)\mathbb{Z}$ est une solution du problème universel définissant le produit tensoriel; c'est à dire que toute application bilinéaire $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to A$ vers un groupe abélien A se factorise d'une unique manière sous la forme $f = g \circ m$ où $g : \mathbb{Z}/\gcd(n,m)\mathbb{Z} \to A$ est linéaire. Par bilinéarité on a

$$f(\overline{x}^n, \overline{y}^m) = xyf(1,1) = f(\overline{xy}^n, 1) = f(1, \overline{xy}^m). \tag{0.1}$$

Soit $g : \mathbb{Z}/\gcd(n,m)\mathbb{Z} \to A$ l'application $\overline{k}^{\gcd(n,m)} \mapsto f(\overline{k}^n, 1)$ est bien définie puisque $\gcd(n,m)$ divise n. Elle est de plus linéaire (puisque f l'est en chaque variable) et satisfait $g \circ m = f$ par (0.1). Réciproquement soit g, linéaire, vérifiant $g \circ m = f$. Comme $m(\overline{k}^n, 1)) = \overline{k}^{\gcd(n,m)}$, l'équation (0.1) donne $g(\overline{k}^{\gcd(n,m)}) = g\big(m(\overline{k}^n, 1)\big) = f(\overline{k}^n)$. D'où l'unicité de g.

Conclusion : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\gcd(n,m)\mathbb{Z}$.

(2) Le théorème de structure énonce que M est isomorphe à un unique groupe fini de la forme $\mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \oplus \dots \mathbb{Z}/p_r\mathbb{Z}$ où $p_1 \backslash p_2 \backslash \dots \backslash p_r$. De même N est isomorphe à un unique groupe fini de la forme $\mathbb{Z}^l \oplus \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \oplus \dots \mathbb{Z}/q_s\mathbb{Z}$ où $q_1 \backslash q_2 \backslash \dots \backslash q_s$. Comme le produit tensoriel commute à la somme directe, on en déduit $\mathbb{Z}^l \otimes M \cong M^l$. D'où en utilisant la question**(1)**,

$$M \otimes N \cong \mathbb{Z}^{kl} \oplus (\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \oplus \dots \mathbb{Z}/p_r\mathbb{Z})^l \oplus (\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \oplus \dots \mathbb{Z}/q_s\mathbb{Z})^k \oplus \bigoplus_{\substack{i \le r \\ j \le s}} \mathbb{Z}/\gcd(p_i, q_j)\mathbb{Z}.$$

Remarque 1. Il n'est pas très difficile de mettre le groupe abélien trouvé en **(2)** sous sa forme canonique; mais ce n'était pas demandé.

Exercice 2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et X, Y deux objets de $\mathcal{C}$. On considère la catégorie $\mathcal{C}_{XY}$ dont les objets sont les paires $(Z \xrightarrow{f} X, Z \xrightarrow{g} Y)$ de flèches de $\mathcal{C}$ avec la même source. Un morphisme de $\mathcal{C}_{XY}$ entre $(Z_1 \xrightarrow{f_1} X, Z_1 \xrightarrow{g_1} Y)$ est la donnée d'un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
& X \\
Z_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g_1"'] & Z_2 \arrow[u, "f_2"'] \arrow[d, "g_2"] \\
& Y
\end{tikzcd}.$$

(1) *Montrer que $\mathcal{C}_{XY}$ est bien une catégorie.*

(2) *Montrer le produit $X \times Y$ existe dans $\mathcal{C}$ si et seulement si la catégorie $\mathcal{C}_{XY}$ a un objet terminal. Expliciter l'objet terminal quand $X \times Y$ existe.*

(3) *Enoncer et démontrer un résultat analogue pour le coproduit.*

Solution 2. **(1)** Il est clair que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{XY}}(Z_1, Z_2)$ est un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z_1, Z_2)$ qui contient l'identité lorsque $Z_2 = Z_1$. La commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
Z_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "h_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & Z_2 \arrow[u, "f_2"'] \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "g_2"] & Z_3 \arrow[ul, "f_3"'] \arrow[dl, "g_3"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

assure que la composition de morphismes dans la catégorie $\mathcal{C}$ induit une composition dans $\mathcal{C}_{XY}$. L'associativité découle immédiatement de celle de $\mathcal{C}$.

(2) Un objet terminal de $\mathcal{C}_{XY}$ est une paire $(Z_t \xrightarrow{f_t} X, Z_t \xrightarrow{g_t} Y)$ telle que pour tout objet $(Z \xrightarrow{f} X, Z \xrightarrow{g} Y)$, il existe une unique diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& X \\
Z \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & Z_t \arrow[u, "f_t"'] \arrow[d, "g_t"] \\
& Y
\end{tikzcd} .$$

L'existence d'un tel diagramme est équivalente à l'existence de h le faisant commuter. Par conséquent, un objet terminal de $\mathcal{C}_{XY}$ satisfait la propriété universelle du produit $X \times Y$ dans $\mathcal{C}$ et réciproquement. L'objet terminal est évidemment $X \xleftarrow{p_X} X \times Y \xrightarrow{p_Y} Y$.

(3) Une preuve analogue à celle de la question **((2)** donne que l'existence du coproduit $X \coprod Y$ dans $\mathcal{C}$ est équivalente à l'existence d'un objet initial dans la catégorie $\mathcal{C}^{XY}$ qui a pour objet les paires $(Z \xleftarrow{f} X, Z \xleftarrow{g} Y)$ de flèches de $\mathcal{C}$. Un morphisme de $\mathcal{C}^{XY}$ est la donnée d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f_2"'] \arrow[d, "f_1"] \\
Z_2 & Z_1 \arrow[l, "h"] \\
& Y \arrow[ul, "g_2"] \arrow[u, "g_1"']
\end{tikzcd} .$$

.

Exercice 3. *Soit G un groupe et k un anneau. On note $k[G]$ le k-module libre de base $\{g \in G\}$. il est canoniquement muni d'une structure de k-algèbre (non commutative si G n'est pas abélien) par la formule*

$$\sum \lambda_i g_i * \sum \nu_j h_j = \sum \lambda_i \nu_j g_i h_j$$

dont l'unité est l'èlèment $e \in k[G]$ (on ne demande pas de le démontrer). Si A est une k-algèbre, on note $A^\times$ le sous-ensemble des éléments inversibles. La structure multiplicative de A donne une structure de groupe à $A^\times$. Montrer que $G \mapsto k[G]$ est un foncteur $\mathrm{Gps} \to k - \mathrm{alg}$ de la catégorie des groupes vers la catégorie des k-algèbres (associatives, non nécessairement commutatives) et que $A \mapsto A^\times$ est un foncteur $k - \mathrm{alg} \to \mathrm{Gps}$. Montrer ensuite que $G \to k[G]$ est adjoint à gauche de $A \mapsto A^\times$.

Solution 3. Pour commencer, vérifions que $L : G \mapsto k[G]$ est un foncteur. Il nous faut définir $L(\phi)$ pour tout morphisme de groupes $\phi : G \to H$. Une application linéaire dont la source est un module libre est uniquement déterminée par l'image de sa base. Ceci permet de définir $L(\phi) : k[G] \to k[H]$ comme l'application linéaire vérifiant, pour tout $g \in G$, $L(\phi)(g) = \phi(g) \in k[H]$. On a alors $L(\mathrm{Id}_G) = \mathrm{Id}_{k[G]}$ et, pour tout morphisme de groupes $\psi : H \to K$, $L(\psi \circ \phi)(g) = \psi(\phi(g)) = L(\psi)\big(L(\phi)(g)\big)$ ce qui garantit que L est un foncteur. Intéressons nous maintenant à $R : k-\mathrm{alg} \to \mathrm{Gps}$ donné, sur les objets, par $R(A) = A^\times$. Si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux unitaires, alors quel que soit $a \in A^\times$, $1 = f(aa^{-1}) = f(a)f(a^{-1})$ ce qui prouve que $f(A^\times) \subset B^\times$. Et de plus $f(aa') = f(a)f(a')$ assure que la restriction de f à $A^\times$ est un morphisme de groupes. On définit donc $R(f) = f_{|A^\times} : A^\times \to B^\times$. Il est immédiat que $R(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$ et $R(f \circ g) = R(f) \circ R(g)$. En particulier, R ainsi défini est un foncteur.

Démontrons que les foncteurs L, R sont adjoints. C'est à dire qu'il existe un isomorphisme de bifoncteurs $\mathrm{Hom}_k(L(\cdot), \cdot) \underset{\mathrm{Ad}}{\overset{\mathrm{Ag}}{\underset{\sim}{\rightleftarrows}}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gps}}(\cdot, R(\cdot))$. En d'autres termes pour $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gps}}(G, H)$ et $f \in \mathrm{Hom}_k(A, B)$ on doit avoir un diagramme commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_k(L(G),A) \arrow[r, shift left, "\mathrm{Ag}(G{,}A)"] \arrow[r, phantom, "\sim"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gps}}(G,R(A)) \arrow[l, shift left, "\mathrm{Ad}(G{,}A)"] \arrow[d, "R(f)_*"] \\
\mathrm{Hom}_k(L(G),B) \arrow[r, shift left, "\mathrm{Ag}(G{,}B)"] \arrow[r, phantom, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gps}}(G,R(B)) \arrow[l, shift left, "\mathrm{Ad}(G{,}B)"] \\
\mathrm{Hom}_k(L(H),B) \arrow[r, shift left, "\mathrm{Ag}(H{,}B)"] \arrow[r, phantom, "\sim"] \arrow[u, "L(\phi)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gps}}(H,R(B)) \arrow[l, shift left, "\mathrm{Ad}(H{,}B)"] \arrow[u, "\phi^*"']
\end{tikzcd}
\tag{Adj}
$$

.

dont les flèches horizontales sont des isomorphismes. Une application linéaire $\alpha : k[G] \to A$ est uniquement déterminée par l'image de sa base; c'est à dire par les $\alpha(g) \in A$. Si en plus α est un morphisme d'anneaux, alors $\alpha(gh) = \alpha(g)\alpha(h)$ et, en prenant $h = g^{-1}$, on récupère immédiatement que la restriction de α à la base de $k[G]$ est un morphisme de groupes. Il en découle que, pour tout G, A, $\mathrm{Ag}(G, A)(\alpha) := \alpha_{|G}$ est un isomorphisme. Son inverse est donné par $\mathrm{Ad}(G, A)(\psi) := \big(\sum \lambda_i g_i \mapsto \sum \lambda_i \psi(g_i)\big)$. Il reste à vérifier que c'est bien un isomorphisme de bifoncteurs. On a

$$\mathrm{Ag}(G, B) \circ f_*(\alpha) = (f \circ \alpha)_{|G} = f_{|G} \circ \alpha_{|G} = R(f)_* \circ \mathrm{Ag}(G, A)(\alpha).$$

La commutativité des autres diagrammes se montre de la même façon.

Exercice 4 (Utilisation du lemme du serpent). *Le but de cet exercice est d'utiliser le lemme du serpent pour redémontrer des résultats de la feuille de TD 2. Soit A un anneau commutatif unitaire.*

(1) *(Exercice 3.(1)) Soit A un anneau et $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M''$ une suite exacte de A-modules. Soit N, P deux sous-modules de M tels que $i^{-1}(N) = i^{-1}(P)$ et $\pi(N) = \pi(P)$. On suppose que $N \subset P$. Déduire du lemme du serpent que $N = P$ (on pourra considérer* $\mathrm{coker}(N \subset P)$*).*

(2) *(Exercice 4.(3)) Soit A un anneau, M un A-module et N et P des sous-modules de M.*
Soit $f : N \cap P \longrightarrow N \oplus P$, $x \longmapsto (x, x)$ et $g : N \oplus P \longrightarrow N + P$, $(y, z) \longmapsto y - z$. Rappelons que la suite suite $0 \longrightarrow N \cap P \xrightarrow{f} N \oplus P \xrightarrow{g} N + P \longrightarrow 0$ est exacte. En déduire en utilisant le lemme du serpent l'existence d'une suite exacte $0 \longrightarrow \dfrac{M}{N \cap P} \longrightarrow \dfrac{M}{N} \oplus \dfrac{M}{P} \longrightarrow \dfrac{M}{N+P} \longrightarrow 0$.

Solution 4. **(1)** La suite $i^{-1}(N) \xrightarrow{i_{|i^{-1}(N)}} N \xrightarrow{\pi_{|N}} \pi(N) \longrightarrow 0$ est exacte : la surjectivité de $N \xrightarrow{\pi_{|N}} \pi(N)$ est évidente ; de plus $\ker \pi_{|N} = \ker \pi \cap N = \mathrm{im}\, i \cap N = \mathrm{im}\, i_{|i^{-1}(N)}$. On a aussi la même suite exacte avec P.

On a donc le diagramme commutatif suivant dans lequel toutes les lignes verticales et les deux premières lignes horizontales sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
i^{-1}(N) \arrow[r, "i_{|i^{-1}(N)}"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "\pi_{|N}"] \arrow[d, hook] & \pi(N) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
i^{-1}(P) \arrow[r, "i_{|i^{-1}(P)}"] \arrow[d] & P \arrow[r, "\pi_{|P}"] \arrow[d] & \pi(P) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r, dotted] & P/N \arrow[r, dotted] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

On conclut au fait que $P/N \simeq 0$, c'est à dire $N = P$, grâce à l'exactitude de la dernière ligne, $0 \longrightarrow P/N \longrightarrow 0$, qui est un des résultats du lemme du serpent puisque $P/N \cong \mathrm{coker}(N \hookrightarrow P)$.

(2) On part du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N \cap P \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \oplus P \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N + P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \oplus M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \dfrac{M}{N \cap P} \arrow[d] & \dfrac{M}{N} \oplus \dfrac{M}{P} \arrow[d] & \dfrac{M}{N + P} \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent donne immédiatement l'existence et l'exactitude de la suite cherchée; le morphsime du serpent δ étant ici nul puisque les noyaux sont tous réduits à 0 .

Exercice 5. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie munie d'un objet initial $\emptyset$ et d'un objet final* pt*. On suppose que* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{pt}, \emptyset)$ *est non vide. Montrer que $\emptyset \cong \mathrm{pt}$, autrement dit qu'il y a un objet nul.*

Solution 5. On note $h : \emptyset \to \mathrm{pt}$ l'unique élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\emptyset, \mathrm{pt})$. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{pt}, \emptyset)$. Montrons que $f \circ h = \mathrm{Id}_{\emptyset}$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{pt}}$. L'application $f \circ h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\emptyset, \emptyset)$ qui est réduit à un seul élément par définition d'un élément initial. Donc c'est l'identité. De même $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{pt}, \mathrm{pt})$ est réduit à l'identité; d'où $h \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{pt}}$. Conclusion f est un isomorphisme.