

Corrigé du Devoir II d'Algèbre et Topologie

Grégory Ginot

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif et M, L, K des A -modules. On note $\mathcal{C}$ la catégorie des A -modules.

- (1) Montrer que $\mathcal{C} \ni N \mapsto \text{Hom}_A(M \otimes_A \text{Hom}_A(N, L), K)$ induit un foncteur (covariant) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.
- (2) i) Donner des conditions sur L, M pour que F soit exact à gauche.
 ii) Donner des conditions sur K, M pour que F soit exact à droite.
 iii) Donner des conditions sur K, L, M pour que F soit exact.
- (3) On suppose $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$ et $K = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
 i) Montrer que F est exact à droite.
 ii) Soit $m \geq 1$ et $L = \mathbb{Z}$. Calculer $L^i(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
 iii) Soit $m, n \geq 1$ et $L = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Calculer $L^i(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Solution 1. (1) Rappelons que la composée de deux foncteurs covariants ou de deux foncteurs contravariant est un foncteur covariant. La composée d'un foncteur covariant et d'un foncteur contravariant (ou le contraire) est un foncteur contravariant. Or pour tout objet N de $\mathcal{C}$, $F(N) = \text{Hom}_A(M \otimes_A \text{Hom}_A(N, L), K)$ est la composée des foncteurs $\text{Hom}_A(-, K) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ (donc contravariant), $M \otimes_A - : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ (covariant) et $\text{Hom}_A(-, L) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ (donc contravariant). C'est donc un foncteur covariant.

- (2) i) Par définition F est exact à gauche s'il transforme toute suite exacte $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X''$ en une suite exacte $0 \rightarrow F(X') \rightarrow F(X) \rightarrow F(X'')$. En appliquant le foncteur $\text{Hom}_A(-, L)$ à la suite exacte $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X''$, on obtient le complexe

$$\text{Hom}_A(X'', L) \rightarrow \text{Hom}_A(X, L) \rightarrow \text{Hom}_A(X', L) \rightarrow 0.$$

On sait que ce complexe est une suite exacte lorsque $\text{Hom}_A(-, L)$ est exact à droite, c'est à dire si L est injectif. En ce cas, comme $M \otimes_A -$ est exact à droite, et $\text{Hom}_A(-, K)$ exact à gauche, on obtient que $0 \rightarrow F(X') \rightarrow F(X) \rightarrow F(X'')$ est exacte. Conclusion : Il suffit que L soit injectif pour que F soit exact à droite.

- ii) Un raisonnement analogue assure que F est exact à gauche si M est plat (auquel cas $M \otimes_A -$ est exact à gauche) et K injectif.
- iii) De i), ii), on déduit que F est exact si K, L sont injectifs et M plat.
- (3) On remarque que $M = \mathbb{Z}$ est libre sur $\mathbb{Z}$, donc plat et $K = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est injectif (voir la feuille de TD 5; ça ne peut pas faire de mal de s'en rappeler).
- i) Les hypothèses de (2).ii) sont satisfaites, donc F est exact à droite. En particulier il admet des foncteurs dérivés à gauche (puisque la catégorie $\text{Mod}(\mathbb{Z})$ admet assez d'objets projectifs).
- ii) Il faut trouver une résolution projective de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. On utilise la résolution libre (en particulier projective) déjà vue en TD : $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z}$. On alors que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, les groupes de cohomologie $L_i(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ sont donnés par la formule :

$$L_i(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = H^{-i}(\cdots \rightarrow 0 \rightarrow F(\mathbb{Z}) \xrightarrow{F(\times m)} F(\mathbb{Z})).$$

Ceci donne immédiatement $L^{i>1}(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = 0$. Comme $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} X \cong X$ (l'isomorphisme étant donné par $k \otimes_{\mathbb{Z}} x \mapsto kx$) et $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, X) \cong X$ (l'isomorphisme étant donné par $\varphi \mapsto \varphi(1)$), on obtient $F(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $F(\times m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est divisible (c'est à dire que pour tout x , $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, il existe $y \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ avec $ny = x$), on en déduit que

$$L^0(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \text{coker}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0.$$

Il reste à calculer $L^1(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \ker(\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Tout élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est représenté par la classe d'un élément $p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p \wedge q = 1$ (en notant $p \wedge q$ le pgcd de p et q). On obtient que $mp/q = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ si $q|m$. La réciproque est immédiate. Il en découle que

$$L^1(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

- ii) Evidemment, on utilise la même résolution projective de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Avec $L = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a $F(\mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Un morphisme $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est uniquement déterminé par l'image $\varphi(1)$ qui en outre doit vérifier $0 = \varphi(n) = n\varphi(1)$. On en déduit que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \ker(\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Par conséquent on doit calculer la cohomologie du complexe

$$\dots 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

On obtient alors par des calculs similaires à ceux fait en TD

$$L^0(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n \wedge m\mathbb{Z}, \quad L^1(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n \wedge m\mathbb{Z}, \quad L^{i>1}(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = 0.$$

Exercice 2. Soit A un anneau unitaire et M', M'' deux A -modules.

- (1) On suppose que $\text{Ext}_A^1(M'', M') = 0$. Montrer que toute suite exacte $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ est scindée (on pourra appliquer le foncteur $\text{Ext}_A^\bullet(M'', -)$ à la suite exacte pour trouver une section).
- (2) On se propose d'étendre le résultat précédent et de montrer qu'il y a un isomorphisme naturel

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{classes d'isomorphismes de suites exactes} \\ 0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0 \end{array} \right\} \cong \text{Ext}_A^1(M'', M').$$

- i) Soit $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ une suite exacte. On note $\xi_{f,g}$ cette suite exacte. Montrer qu'il existe un morphisme naturel $\partial_{\xi_{f,g}} : \text{Hom}_A(M', M') \rightarrow \text{Ext}_A^1(M'', M')$ tel que $\partial_{\xi_{f,g}} \circ \psi \circ f = 0$ pour tout $\psi \in \text{Hom}_A(M, M')$.
- ii) Soit $0 \xrightarrow{j} K \xrightarrow{p} P \rightarrow M''$ une suite exacte avec P projectif. Montrer que l'on a une suite exacte naturelle $\text{Hom}_A(P, M') \xrightarrow{j^*} \text{Hom}_A(K, M') \xrightarrow{\partial} \text{Ext}_A^1(M'', M') \xrightarrow{p^*} 0$.
- iii) Montrer que pour tout $\beta : K \rightarrow M'$, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{j} & P & \xrightarrow{p} & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \beta \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & \text{coker}(K \xrightarrow{(j, -\beta)} P \oplus M') & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes.

- iv) Dédurre de ii) et iii) que pour tout $x \in \text{Ext}_A^1(M'', M')$, il existe une suite exacte $\xi_{f,g} : 0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ telle que $\partial_{\xi_{f,g}}(\text{Id}_{M'}) = x$.

- v) Montrer que si deux suites exactes $\xi_{f,g} : 0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ et $\xi_{h,k} : 0 \rightarrow M' \xrightarrow{h} N \xrightarrow{k} M'' \rightarrow 0$ sont isomorphes, alors $\partial_{\xi_{f,g}}(\text{Id}_{M'}) = \partial_{\xi_{h,k}}(\text{Id}_{M'})$. En déduire que $\xi_{f,g} \mapsto \partial_{\xi_{f,g}}(\text{Id}_{M'})$ induit une surjection Θ de l'ensemble des classes d'isomorphismes de suites exactes $\xi_{f,g} : 0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ vers $\text{Ext}_A^1(M'', M')$.
- vi) Montrer que Θ est un isomorphisme (on pourra reprendre la construction de iii) et iv) pour trouver un inverse.) A quel élément de $\text{Ext}_A^1(M'', M')$ correspond la suite exacte scindée $0 \rightarrow M' \rightarrow M' \oplus M'' \rightarrow M'' \rightarrow 0$?

Remarque 1. L'énoncé de ce corrigé a été modifié par rapport à celui distribué, dans lequel il y avait une erreur de notation (j'en suis désolé...) rendant la question iv) bien plus ardue qu'escompté. Plus précisément M'' a été remplacé par M' dans les questions i), ii). Pour pouvoir résoudre la question iv) à partir de l'énoncé distribué en classe (dont les questions sont malgré tout correctes), il fallait non pas appliquer le résultat de iii) mais une version duale avec une résolution injective de M'' (qui s'obtient de manière analogue).

Solution 2. (1) Une suite $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ est scindée si et seulement si il existe une section $s : M'' \rightarrow M$ telle que $g \circ s = \text{Id}_{M''}$. Une telle suite exacte induit une longue suite exacte en passant au foncteur $\text{Ext}_A^\bullet(M'', -)$ qui, en utilisant $\text{Ext}_A^0(M'', X) = \text{Hom}_A(M'', X)$, se lit

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M'', M') \rightarrow \text{Hom}_A(M'', M) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_A(M'', M'') \rightarrow 0 \rightarrow \text{Ext}_A^1(M'', M) \rightarrow \dots$$

puisque $\text{Ext}_A^1(M'', M') = 0$. En particulier $g_* : \varphi \mapsto g \circ \varphi$ est surjective. D'où il existe $s \in \text{Hom}_A(M'', M)$ telle que $g \circ s = \text{Id}_{M''}$ ce qui donne le résultat.

- (2) i) Le résultat est une conséquence immédiate de la longue suite exacte en cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_A(M'', M') \rightarrow \text{Hom}_A(M, M') \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_A(M', M') \xrightarrow{\partial_{\xi_{f,g}}} \text{Ext}_A^1(M'', M') \\ \rightarrow \text{Ext}_A^1(M, M') \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

induite par $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ en appliquant les foncteurs $\text{Ext}_A^\bullet(-, M')$.

- ii) Si P est projectif, on a $\text{Ext}_A^1(P, M') = 0$. La suite exacte (2.1) appliquée à la suite exacte $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M'' \rightarrow 0$ donne alors immédiatement le résultat.

- iii) On commence par définir des applications $j' : M' \rightarrow \text{coker}(K \xrightarrow{(j, -\beta)} P \oplus M')$, $\beta' : P \rightarrow$

$\text{coker}(K \xrightarrow{(j, -\beta)} P \oplus M')$ et $p' : \text{coker}(K \xrightarrow{(j, -\beta)} P \oplus M') \rightarrow M''$. Le morphisme $\tilde{p} : P \oplus M' \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{coker}(K \xrightarrow{(j, -\beta)} P \oplus M')$ vérifie $\tilde{p} \circ (j, -\beta) = p \circ j = 0$, d'où par propriété universelle du conoyau on obtient un morphisme $p' : \text{coker}(K \xrightarrow{(j, -\beta)} P \oplus M') \rightarrow M''$. Par composition, on définit $\beta' : P \xrightarrow{(1, 0)} P \oplus M' \rightarrow \text{coker}(K \xrightarrow{(j, -\beta)} P \oplus M')$ et $j' : M' \xrightarrow{(0, 1)} P \oplus M' \rightarrow \text{coker}(K \xrightarrow{(j, -\beta)} P \oplus M')$. On note $q : P \oplus M' \rightarrow \text{coker}(K \xrightarrow{(j, -\beta)} P \oplus M')$ l'application canonique. Par définition, pour tout $k \in K$, on a $q(j(k)) = q(\beta(k))$ d'où il découle que le carré de gauche du diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{j} & P & \xrightarrow{p} & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \beta \downarrow & & \beta' \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{j'} & \text{coker}(K \xrightarrow{(j, -\beta)} P \oplus M') & \xrightarrow{p'} & M'' \longrightarrow 0. \end{array} \quad (2.2)$$

De plus, par définition du conoyau, $p' \circ \beta' = p$. Il reste à voir que la suite du bas est exacte. Comme p est surjective, p' aussi puisque $p' \circ \beta' = p$. Par ailleurs $j'(m') = 0$ implique $(0, m') = (j(k), -\beta(k))$. Comme j est injective, $k = 0$ d'où $m' = \beta(0) = 0$. Conclusion,

j' est injective. Il est immédiat que $p' \circ j' = 0$. Il reste à voir que $\ker(p') \subset \text{im}(j')$. Soit $(x, m') \in \text{coker}(K \xrightarrow{(j, -\beta)} P \oplus M')$ tel que $0 = p'(x, m') = p(x)$. Par exactitude de la ligne du haut, on a $x = j(k)$. D'où $(x, m') = (j(k), -\beta(k)) + j'(\beta(k) + m') = j'(\beta(k) + m')$ puisque $(j(k), -\beta(k)) = 0$ dans le conoyau. Conclusion : le diagramme (2.2) est commutatif à lignes exactes.

- iv) Pour tout $x \in \text{Ext}_A^1(M'', M')$, par ii), il existe $\beta : K \rightarrow M'$ telle que $\partial(\beta) = x$. On applique maintenant le foncteur $\text{Hom}_A(-, M')$ au diagramme (2.2) de la question iii), en notant $M = \text{coker}(K \xrightarrow{(j, -\beta)} P \oplus M')$. Par functorialité du morphisme de connexion dans la longue suite exacte (cf le cours...) on obtient un diagramme de commutatifs dont les lignes sont des longues suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M'', M') & \longrightarrow & \text{Hom}_A(P, M') & \longrightarrow & \text{Hom}_A(K, M') & \xrightarrow{\partial} & \text{Ext}_A^1(M'', M') & \longrightarrow & \cdots \\ & & \parallel & & \uparrow \beta'^* & & \uparrow \beta^* & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M'', M') & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, M') & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M', M') & \xrightarrow{\partial_{\xi_{j', p'}}} & \text{Ext}_A^1(M'', M') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

On déduit de la commutativité du diagramme que $\partial_{\xi_{j', p'}}(\text{Id}_{M'}) = \partial(\beta^*(\text{Id}_{M'})) = \partial(\beta) = x$ par hypothèse. Il suit que la suite exacte horizontale du bas du diagramme (2.2) (avec le β choisi) répond à la question.

- v) Soit $\xi_{f,g} : 0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ et $\xi_{h,k} : 0 \rightarrow M' \xrightarrow{h} N \xrightarrow{k} M'' \rightarrow 0$ deux suites exactes et

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \psi & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{h} & N & \xrightarrow{k} & M'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

un isomorphisme entre $\xi_{f,h}$ et $\xi_{h,k}$. On raisonne comme dans la question précédente : on applique le foncteur $\text{Hom}_A(-, M')$ et du diagramme de longues suites exactes associé on obtient immédiatement $\partial_{\xi_{f,g}} = \partial_{\xi_{h,k}}$, d'où $\partial_{\xi_{h,k}}(\text{Id}_{M'}) = \partial_{\xi_{f,g}}(\text{Id}_{M'})$. Par conséquent, l'application $\xi_{f,g} \mapsto \partial_{\xi_{f,g}}(\text{Id}_{M'})$ ne dépend que des classes d'isomorphismes de suites exactes. De plus par iv), cette application est surjective.

- vi) On fixe P et K comme dans la question ii). Pour tout $x \in \text{Ext}_A^1(M'', M')$, on choisit $\beta_x \in \text{Hom}_A(K, M')$ tel que $\partial(\beta_x) = x$. Par iv), on obtient une suite exacte

$$\xi_{f_x, g_x} := 0 \longrightarrow M' \longrightarrow \text{coker}(K \xrightarrow{(j, -\beta_x)} P \oplus M') \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

telle que $\Theta(\xi_{f_x, g_x}) = x$. On note désormais $M_x = \text{coker}(K \xrightarrow{(j, -\beta_x)} P \oplus M')$ pour alléger les notations. On note aussi $\gamma : x \mapsto \xi_{f_x, g_x}$ le morphisme induit de $\text{Ext}_A^1(M'', M')$ vers l'ensemble des classes d'isomorphismes de suites exactes $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$. On vient de voir que $\Theta \circ \gamma = \text{Id}$. Il reste à montrer que $\gamma \circ \Theta = \text{Id}$; c'est à dire que si $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ vérifie $\partial_{\xi_{f,g}} = x$ alors $\xi_{f,g} \cong \xi_{f_x, g_x}$. Il suffit de trouver un morphisme de A -modules $\psi : M_x \rightarrow M$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f_x} & M_x & \xrightarrow{g_x} & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \psi & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2.3)$$

commutatif. Alors par le lemme des 5, ψ est un isomorphisme et les suites exactes ξ_{f_x, g_x} , $\xi_{f,g}$ sont isomorphes.

On reprend la construction de ξ_{f_x, g_x} . L'idée est d'utiliser que P est projectif pour construire ψ . En effet, P projectif et $g : M \rightarrow M''$ surjective implique qu'il existe $\nu : P \rightarrow M$ tel que

$p = g \circ \nu : P \rightarrow M''$. Par propriété universelle du noyau il existe un morphisme $\beta : K \rightarrow M'$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{j} & P & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \beta \downarrow & & \downarrow \nu & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.4)$$

commutatif. Comme dans **iv)** on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M'', M') & \xrightarrow{p^*} & \mathrm{Hom}_A(P, M') & \xrightarrow{j^*} & \mathrm{Hom}_A(K, M') & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Ext}_A^1(M'', M') & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \uparrow \nu^* & & \uparrow \beta^* & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M'', M') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M, M') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M', M') & \xrightarrow{\partial_{\xi_{f,g}}} & \mathrm{Ext}_A^1(M'', M') & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

En particulier, on a $x = \partial_{\xi_{f,g}}(\mathrm{Id}_{M'}) = \partial(\beta)$. De plus $x = \partial(\beta_x)$ par définition de β_x ; donc $\beta - \beta_x \in \ker(\partial)$. D'où par exactitude de la ligne du haut du diagramme précédent, il existe $h : P \rightarrow M'$ tel que $h \circ j = \beta_x - \beta$. On a tous les ingrédients pour construire ψ . Par propriété universelle d'un conoyau, il est équivalent de construire $\tilde{\psi} : P \oplus M' \rightarrow M$ telle que $\tilde{\psi} \circ (j, -\beta_x) = 0$. On définit $\tilde{\psi}$ comme la composée

$$P \oplus M' \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}} P \oplus M' \xrightarrow{(\nu, f)} M.$$

C'est à dire pour tout $(z, m') \in P \oplus M'$, on pose $\tilde{\psi}(z, m') = \nu(z) + f(m') + f(h(z))$. On a

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ (j, -\beta_x) &= \nu \circ j + f \circ h \circ j - f \circ \beta_x \\ &= \nu \circ j + f \circ (\beta_x - \beta) - f \circ \beta_x \\ &= 0 \quad (\text{par commutativité de (2.4)}); \end{aligned}$$

d'où $\psi : M_x \rightarrow M$ est bien défini. Il reste à montrer la commutativité de (2.3). On a $\psi \circ f_x = \psi \circ (0, \mathrm{Id}_{M'}) = f$. Et, comme $g \circ f = 0$, on a $g \circ \tilde{\psi} = g \circ \nu = p$ (par commutativité de (2.4)). D'où $g \circ \psi = p_x$ par unicité de la factorisation au travers d'un conoyau. Ceci termine la preuve de la commutativité du diagramme; donc Θ est un isomorphisme. L'astuce (qui est en fait "forcée") ici est d'introduire le morphisme h pour passer de β à β_x et ainsi utiliser le morphisme ψ donné par la projectivité de P (notons que le fait que ψ ne soit pas uniquement déterminé n'a aucune importance).

Il reste à calculer $\Theta(0 \rightarrow M' \rightarrow M' \oplus M'' \rightarrow M'' \rightarrow 0)$. On raisonne comme dans la question (1) : il existe une rétraction $r : M \rightarrow M'$ telle que $r \circ i_{M'} = \mathrm{Id}_{M'}$ (en notant $i_{M'} : M' \rightarrow M' \oplus M''$ l'injection canonique). De l'exactitude de la suite (2.1), on obtient que $\partial_{0 \rightarrow M' \rightarrow M' \oplus M'' \rightarrow M'' \rightarrow 0}(\mathrm{Id}_{M'}) = \partial_{0 \rightarrow M' \rightarrow M' \oplus M'' \rightarrow M'' \rightarrow 0} \circ i_{M'}(r) = 0$; c'est à dire que les suites exactes scindées correspondent à la classe nulle de $\mathrm{Ext}_1^A(M'', M')$.

Exercice 3 (partiel 2007). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne qui admet des produits indexés par un ensemble I . On suppose de plus que $\mathcal{C}$ admet assez d'objets injectifs.

1) Montrer que $\prod_{i \in I} X_i$ est injectif si chaque X_i est un objet injectif.

2) Soit $\mathcal{C}'$ une autre catégorie abélienne admettant des produits indexés par I . On suppose de plus que les foncteurs $\prod : \mathcal{C}^I \rightarrow \mathcal{C}$ et $\prod : \mathcal{C}'^I \rightarrow \mathcal{C}'$ sont exacts. Soit enfin $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur additif exact à gauche et commutant aux produits indexés par I . Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, le j -ème foncteur dérivé $R^j F$ commute aux produits indexés par I , c'est à dire:

$$R^j F \left(\prod_{i \in I} X_i \right) \cong \prod_{i \in I} R^j F(X_i).$$

Solution 3. 1) Supposons que chaque objet X_i est injectif, alors les foncteurs $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_i)$ sont exacts. Par définition du produit on a un isomorphisme de foncteurs

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \prod_{i \in I} X_i) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_i).$$

Mais puisque $\mathcal{C}$ est abélienne, le foncteur $\prod_{i \in I}$ est exact. Alors, pour toute suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow 0$, on obtient que les suites

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M'', X_i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X_i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M', X_i) \rightarrow 0$$

sont exactes et par suite $0 \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M'', X_i) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X_i) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M', X_i) \rightarrow 0$ est exacte. Par conséquent, le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \prod_{i \in I} X_i)$ est exact. En particulier $\prod_{i \in I} X_i$ est un objet injectif.

2) Pour $i \in I$, on choisit une résolution injective $N_i^\bullet$ de X_i ; en d'autres termes chaque N_i^n est injectif et on a une suite exacte $0 \rightarrow X_i \rightarrow N_i^0 \rightarrow N_i^1 \rightarrow \dots$. Montrons que $\prod_{i \in I} N_i^\bullet$ est une résolution injective de $\prod_{i \in I} X_i$. D'après la question 1), pour tout n , $\prod_{i \in I} N_i^n$. Comme le produit $\prod_{i \in I}$ est un foncteur exact, on obtient que la suite

$$0 \rightarrow \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} N_i^0 \rightarrow \prod_{i \in I} N_i^1 \rightarrow \prod_{i \in I} N_i^2 \dots$$

est exacte ce qui finit de prouver que $\prod_{i \in I} N_i^\bullet$ est une résolution injective de $\prod_{i \in I} X_i$. On a donc des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} R^j F \left(\prod_{i \in I} X_i \right) &\cong H^j \left(F \left(\prod_{i \in I} N_i^0 \rightarrow \prod_{i \in I} N_i^1 \rightarrow \prod_{i \in I} N_i^2 \dots \right) \right) \\ &\cong H^j \left(\prod_{i \in I} F(N_i^0) \rightarrow \prod_{i \in I} F(N_i^1) \rightarrow \prod_{i \in I} F(N_i^2) \dots \right) \text{ car } F \text{ commute aux produits} \\ &\cong \prod_{i \in I} H^j \left(F(N_i^0) \rightarrow F(N_i^1) \rightarrow F(N_i^2) \dots \right) \text{ car } \prod_{i \in I} \text{ est exact} \\ &\cong \prod_{i \in I} R^j F(X_i) \end{aligned}$$

puisque les $N_i^\bullet$ sont des résolutions injectives des objets X_i .