

Corrigé du Devoir III d'Algèbre et Topologie Faisceaux et cohomologie...

Grégory Ginot

Dans ce devoir, k désigne un corps (commutatif).

Exercice 1 (Examen de Mai 2005). Soit P le polynôme $P(z) = (z(1-z))^2$, définissant donc une application continue de $Y = \mathbb{C}$ dans $X = \mathbb{C}$. On note $Z = \{y \in Y ; P'(y) = 0\}$ et $S = P(Z) \subset X$. Montrer que la restriction à $X \setminus S$ du faisceau $P_*(k_Y)$ est localement constant de rang 4 et n'est pas un faisceau constant.

Solution 1. Déterminons Z et S pour commencer. On a $P'(y) = 2y(1-y)(1-2y)$, d'où $Z = \{0, 1, 1/2\}$. Il suit que $S = P(Z) = \{0, 1/16\}$. Comme S est fermé, $X \setminus S$ est un ouvert. Par définition,

$$P_*(k_Y)_{|X \setminus S}(U) = k_Y(P^{-1}(U)) = \{s : P^{-1}(U) \rightarrow k \text{ loc. constante}\}.$$

Soit x un point de $X \setminus S$. Par définition, l'équation $P(z) = x$ a exactement 4 solutions puisque $P'(z) \neq 0$. Il existe alors un voisinage suffisamment petit U_x de x tel que $P^{-1}(U_x)$ a 4 composantes connexes, toutes homéomorphes à $U - x$ (c'est le théorème d'inversion locale...). Il suit que, pour tout ouvert $V \subset U_x \subset X \setminus S$, $P^{-1}(V)$ est une réunion disjointe d'ouverts $V_1, \dots, V_4$ homéomorphes à V , d'où un isomorphisme naturel

$$\begin{aligned} P_*(k_Y)_{|U_x}(V) &\cong \{s : P^{-1}(V) \cong \coprod_{i=1}^4 V_i \rightarrow k \text{ loc. constante}\} \cong \{s : V \rightarrow k \text{ loc. constante}\}^4 \\ &\cong \{s : V \rightarrow k^4 \text{ loc. constante}\}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P_*(k_Y)$ est localement constant de rang 4. Si $P_*(k_Y)$ était constant, par connexité de $X \setminus S$, on aurait $P_*(k_Y)_{|X \setminus S}(X \setminus S) \cong k^4$. Mais $P_*(k_Y)_{|X \setminus S}(X \setminus S) \cong k$ car $Y \setminus P^{-1}(S)$ est connexe. Donc $P_*(k_Y)_{|X \setminus S}$ n'est pas constant.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ l'application naturelle $t \mapsto f(t) = \exp(2i\pi t)$. Soit $E \in \text{mod}(k)$ et φ un automorphisme de E . Pour tout ouvert U de S^1 , on pose

$$F_{E,\varphi}(U) = \{s \in f_*E_X(U), \forall x \in X : s(x+1) = \varphi(s(x))\}.$$

- (1) Montrer que $U \mapsto F_{E,\varphi}(U)$ est un faisceau sur S^1 .
- (2) Montrer que $F_{E,\varphi}$ est constant si et seulement si φ est l'identité.
- (3) Esquisser une preuve du fait que tout faisceau localement constant d'espaces vectoriels sur S^1 est isomorphe à un faisceau du type $F_{E,\varphi}$ (on ne demande pas d'écrire tous les détails techniques; seulement les grandes lignes du raisonnement).

Solution 2. Commençons par quelques remarques. Un ouvert U de S^1 est l'image par f d'un ouvert V de $\mathbb{R}$. En particulier, tout ouvert de S^1 est

- (a) soit l'image d'une réunion disjointe d'intervalles ouverts de $]0, 1[$;
- (b) soit l'image de $]b-1, a]$ avec $0 < a < b < 1$ et d'une réunion disjointe d'intervalles ouverts de $]a, b[$;
- (c) soit S^1 tout entier.

Notons que f est injective sur les ouverts de la forme (a) et (b) ci-dessus et que les cas (a), (b), (c) s'excluent mutuellement. On identifiera donc par la suite un ouvert de S^1 du type (a) ou (b) avec un ouvert $U = \coprod_{i \in \mathcal{I}} U_i$ de $\mathbb{R}$ avec les $U_i =]x_i, y_i[$ connexes, et tels que $]x_i + n, y_i + n[\cap]x_j + m, y_j + m[= \emptyset$ si $i \neq j$ ou $n \neq m$. En particulier f est injective sur U et les U_i sont disjoints. Dans le cas (c), on identifie U avec $[0, 1]$ par la suite.

Le faisceau $f_*E_{\mathbb{R}}$ est le faisceau sur S^1 défini par $f_*E_{\mathbb{R}}(U) = E_{\mathbb{R}}(U + \mathbb{Z})$, en suivant la convention précédente pour U . On remarque qu'il n'y a aucune ambiguïté dans la définition même si $U = [0, 1]$ (c'est à dire dans le cas (c)) puisque $[0, 1] + \mathbb{Z} = \mathbb{R}$ est bien ouvert dans $\mathbb{R}$. Dans les cas (a) ou (b), on a alors, en écrivant $U = \coprod_{i \in \mathcal{I}} U_i$ comme ci-dessus,

$$f_*E_{\mathbb{R}}(U) = \left\{ s : \left(\coprod_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ n \in \mathbb{Z}}}]x_i + n, y_i + n[\right) \longrightarrow E \text{ localement constantes} \right\} \cong E^{\mathcal{I} \times \mathbb{Z}}.$$

Enfin si U est S^1 tout entier, on a

$$f_*E_{\mathbb{R}}(S^1) = \{ s : \mathbb{R} \rightarrow E \text{ localement constantes} \} \cong E.$$

- (1) On a $F_{E,\varphi}(U) \subset f_*E_{\mathbb{R}}(U)$ et $F_{E,\varphi}(U)$ est le k -module des fonctions localement constantes $s : f^{-1}(U) \rightarrow E$ qui vérifient $s(x+1) = \varphi(s(x))$ pour tout $x \in f^{-1}(U)$. Notons que les remarques faites au début de cette solution assurent que cette condition a du sens. De plus il est clair que si U est de type (a) ou (b), alors $F_{E,\varphi}(U) \cong \left\{ s : \left(\coprod_{i \in \mathcal{I}}]x_i, y_i[\right) \longrightarrow E \text{ localement constantes} \right\} \cong E^{\mathcal{I}}$.

Il est clair que si $s \in F_{E,\varphi}(U)$ et $V \subset U$ alors, pour tout $x \in f^{-1}(V)$, on a

$$s|_V(x+1) = s(x+1) = \varphi(s(x)) = \varphi(s|_V(x)).$$

D'où il suit que $U \mapsto F_{E,\varphi}(U)$ est un préfaisceau. Il reste à vérifier que c'est bien un faisceau. La condition de séparation (S1) d'un faisceau est claire, puisqu'elle est satisfaite pour $f_*E_{\mathbb{R}}(U)$. L'axiome (S2) est tout aussi aisé à vérifier: si $(s_i \in F_{E,\varphi}(U_i))$ est une famille de sections (donc d'applications localement constantes $f^{-1}(U_i) \rightarrow E$...) telles que $s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}}$ pour tout i, j alors il existe $s \in f_*E_{\mathbb{R}}(\bigcup U_i)$ telle que $s|_{U_i} = s_i$. En particulier $s : f^{-1}(\bigcup U_i) \rightarrow E$ est localement constante et si $x \in U_i$, $s(x) = s_i(x)$. Mais pour tout $x \in U$, il existe U_i contenant x d'où $s(x+1) = s_i(x+1) = \varphi(s_i(x)) = \varphi(s(x))$ ce qui assure que $s \in F_{E,\varphi}(\bigcup U_i)$.

- (2) Supposons que $F_{E,\varphi}$ est un faisceau constant. C'est à dire qu'il existe $M \in \text{Mod}(k)$ tel que $F_{E,\varphi} \cong M_{S^1}$. Regardons les sections globales $F_{E,\varphi}(S^1)$ de $F_{E,\varphi}$. Par définition ce sont les fonctions localement constantes $s : \mathbb{R} \rightarrow E$, donc constante (puisque S^1 est connexe), qui vérifient $s(x+1) = \varphi(s(x))$ pour tout x , c'est à dire $e = \varphi(e)$ (en notant $e = s(x)$ la valeur de la fonction constante s). Donc $F_{E,\varphi}(S^1) \cong \ker(\varphi - \text{Id})$. Puisque S^1 est connexe et $F_{E,\varphi} \cong M_{S^1}$, on a aussi $F_{E,\varphi}(S^1) \cong M$; donc $M \cong \ker(\varphi - \text{Id})$.

Etudions maintenant le germe en un point x de S^1 , supposons $x = 0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pour fixer les idées. Comme $F_{E,\varphi} \cong M_{S^1}$, on a $(F_{E,\varphi})_x \cong M$. Mais tout ouvert $U \subset S^1$ contenant 0 contient un ouvert $f(]-\epsilon, \epsilon[)$ pour un $0 < \epsilon < 1/2$ suffisamment petit (remarquons que $f(]-\epsilon, \epsilon[)$ est un ouvert de type (b) que l'on identifie donc avec $] - \epsilon, \epsilon[$ par injectivité de f). Il en résulte que $(F_{E,\varphi})_0 = \varinjlim_{0 < \epsilon < 1/2} F_{E,\varphi}(]-\epsilon, \epsilon[)$. Or d'après les calculs du (1), $F_{E,\varphi}(]-\epsilon, \epsilon[) \cong E$ et si $\epsilon' < \epsilon$,

alors le morphisme de restriction $F_{E,\varphi}(]-\epsilon, \epsilon[) \rightarrow F_{E,\varphi}(]-\epsilon', \epsilon'[)$ est l'identité. Par conséquent on a $(F_{E,\varphi})_0 = E$. On en conclut que $M \cong E$, ce qui donne $\ker(\varphi - \text{Id}) \cong E$ c'est à dire $\varphi = \text{Id}$.

Réciproquement, si $\varphi = \text{Id}$, alors d'après les calculs du (1), pour tout ouvert $U \subset S^1$, $F_{E,\varphi}(U) \cong \{ s : U \rightarrow E \text{ localement constantes} \} = E_{S^1}(U)$. Donc $F_{E,\varphi} \cong E_{S^1}$ est un faisceau constant.

- (3) Pour commencer, on remarque que $F_{E,\varphi}$ est localement constant. En effet tout point de S^1 admet un voisinage ouvert connexe U du type (b) et d'après les calculs des questions précédentes, $F_{E,\varphi|_U} \cong E_U$ est constant et son germe en tout point est E .

Montrons maintenant que tout faisceau localement constant sur S^1 est isomorphe à un $F_{E,\varphi}$. On va utiliser les résultats du TD 6, Exercice 3 et du TD 7, Exercice 1. Et on commence par simplifier le problème pour pouvoir justement s'y ramener. Soit F un faisceau localement constant. Par hypothèse, pour tout $x \in S^1$, il y a un voisinage $U_x \ni x$ ouvert et $E_x \in \text{Mod}(k)$ tels que $F|_{U_x} \cong E_x|_{U_x}$. On en déduit un isomorphisme de germes $F_x \cong F|_{U_{xx}} \cong (E_x)|_{U_{xx}} = E_x$. On est donc ramené au cas où $F|_{U_x} \cong F_x|_{U_x}$. Commençons par montrer que F_x ne dépend pas de x . Il s'agit là bien entendu d'une propriété provenant de la connexité de S^1 . En effet, l'application $S^1 \ni x \mapsto F_x \in \text{Mod}(k)$ (muni de la topologie discrète) est continue (puisque si $y \in U_x$, alors $F_y = \lim_{\substack{\rightarrow \\ y \in V \subset U_x}} F(V) \cong \lim_{\substack{\rightarrow \\ y \in V \subset U_x}} F_x|_{U_x}$). Comme $\text{Mod}(k)$ est discret et S^1 connexe, l'application $x \mapsto F_x$ est constante; on note E sa valeur. Conclusion : il existe $E \in \text{Mod}(k)$ tel que pour tout $x \in S^1$, il existe un voisinage $U_x \ni x$ ouvert et un isomorphisme $F|_{U_x} \cong E|_{U_x}$.

Si $V \subset U$, alors clairement $(E_U)|_V \cong E_V$. Quitte à passer à la composante connexe de U_x contenant x (qui est ouverte puisque S^1 est localement connexe cf Remarque 2 du corrigé du TD 6), on peut supposer que les U_x sont connexes (donc des intervalles). Il est temps d'utiliser la compacité de S^1 : comme $\bigcup U_x \supset \bigcup \{x\} = S^1$, il existe un recouvrement de S^1 par un nombre fini de U_x . Quitte à restreindre ces ouverts connexes et à éventuellement les subdiviser, on peut supposer qu'il n'y a pas d'intersections triples et qu'en plus, chaque intervalle intersecte seulement deux autres intervalles et de manière connexe. Conclusion : on est ramené au cas où S^1 est recouvert par la réunion (finie) d'ouverts connexes $U_1, \dots, U_n$ tels que $U_i \cap U_j \cap U_k = \emptyset$ si i, j, k distincts et $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j \pm 1$ modulo n et $U_i \cap U_{i+1}$ est connexe; on peut de plus supposer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni 0 \in U_n \cap U_1$. Il est *fortement conseillé* de faire un dessin pour se rendre compte de la situation; c'est beaucoup plus parlant. Rappelons qu'on a des isomorphismes $\psi_i : F|_{U_i} \rightarrow E_{U_i}$ et en particulier des isomorphismes $\varphi_{ij} : (E_{U_j})|_{U_{ij}} \rightarrow (E_{U_i})|_{U_{ij}}$ donné par $\varphi_{ij} = (\psi_i^{-1})|_{U_{ij}} \circ (\psi_j)|_{U_{ij}}$. Comme les U_{ij} sont connexes, les isomorphismes φ_{ii+1} sont donnés par un automorphisme de E , encore noté $\varphi_{ii+1} : E \rightarrow E$: c'est le résultat de l'exercice 3 de la feuille de TD 6 (et plus précisément de la Remarque 3 du corrigé de la feuille de TD 6). Si $n = 3$, on est donc dans la situation de l'exercice 1 de la feuille de TD 7. Conclusion : F est isomorphe au faisceau obtenu par recollement des faisceaux constants E_{U_i} via les isomorphismes $(E_{U_j})|_{U_{ij}} \rightarrow (E_{U_i})|_{U_{ij}}$ donnés par des automorphismes $\varphi_{ij} \in \text{aut}(E)$.

En reprenant la démonstration de la feuille de TD 7, exercice 3.(2), on obtient facilement que F est isomorphe au faisceau obtenu en recollant les E_{U_i} par des isomorphismes β_{ij} tels que $\beta_{ii+1} = \text{Id}$ si $i < n$ et $\beta_{n1} = \varphi_{n1} \circ \varphi_{n-1n} \circ \dots \circ \varphi_{12}$. En d'autres termes on peut se ramener au cas où tous les φ_{ij} sont l'identité sauf (éventuellement) le dernier $\varphi_{n1} \in \text{aut}(E)$. On note simplement $\varphi \in \text{aut}(E)$ cet automorphisme. Le faisceau F est constant si et seulement si φ est l'identité; encore une fois le raisonnement de l'exercice 3.(2) de la feuille de TD 7 s'applique. Il nous reste à montrer que $F \cong F_{E,\varphi}$.

On a vu dans la question (2) que $F_{E,\varphi}(S^1) = 0$ si $\varphi \neq \text{Id}$ et est isomorphe à E sinon. C'est aussi le cas de F puisque $F(S^1) = 0$ si F est non-constant (car S^1 est connexe, localement connexe cf exercice 2 du TD 6). Il reste donc à considérer le cas des ouverts U de type (a) et (b).

Soit $U = \coprod_{j \in \mathcal{J}}]x_j, y_j[$ de type (a). Les ouverts U_i étant connexes, ils s'écrivent $U_i =]a_i, b_i[$ avec $1 < a_i < b_i < 1$ pour $1 < i < n$, $1 + a_n < b_{n-1}$, $0 < b_n < a_2$ et $a_n < a_1 < 0 < b_n < a_2 < b_1 < a_2 < b_2$. On peut partitionner $\mathcal{J}$ en $\coprod_{l \leq n} \coprod \mathcal{J}_p^l$ où $\mathcal{J}_p^l$ est l'ensemble des $j \in \mathcal{J}$ tels que $]x_j, y_j[$ à une intersection non-vide avec exactement l ouverts du recouvrement (U_i) qui sont les ouverts $U_p, U_{p+1}, \dots, U_{p+l-1}$ (l'indice doit bien sûr être pris modulo n). Là aussi il vaut mieux faire un

dessin si on veut comprendre quelque chose... Or $F(U) = \ker \left(\prod F(U \cap U_i) \xrightarrow{\rho} \prod F(U \cap U_i \cap U_j) \right)$ (cf le chapitre sur le recollement ou la feuille de TD 6 pour les détails). Avec les notations précédentes on a

$$\prod F(U \cap U_i) \cong \prod_{l,i} \prod_{j \in \coprod_p \mathfrak{J}_p^l} F([x_j, y_j[\cap U_i) \cong \prod_{l,j \in \coprod_p \mathfrak{J}_p^l} E^l$$

puisque les $]x_j, y_j[\subset]0, 1[$ sont connexes et $F|_{U_p} \cong E_{U_p}$. Notons que le terme E^l correspondant à un $j \in \mathfrak{J}_p^l$ est identifié avec le sous module $Ee_p \oplus \dots \oplus Ee_{p+l-1}$ de E^n muni de sa base canonique $e_1, \dots, e_l$. De même on a un isomorphisme canonique

$$\prod F(U \cap U_i \cap U - j) \cong \prod_{l \geq 2, j \in \coprod_p \mathfrak{J}_p^l} (Ee_p \wedge e_{p+1} \oplus \dots \oplus Ee_{p+l-2} \wedge e_{p+l-1})$$

Le morphisme $\rho : \prod F(U \cap U_i) \rightarrow \prod F(U \cap U_i \cap U_j)$ envoie alors Ee_s dans $Ee_{s-1} \wedge e_s \oplus Ee_s \wedge e_{s+1}$ de la manière suivante $xe_s \mapsto xe_s \wedge e_{s+1} - xe_{s-1} \wedge e_s$, si $s < n$, et $xe_n \mapsto \varphi(x)e_1 \wedge e_n - xe_{n-1} \wedge e_n$ si $s = n$. On vérifie alors immédiatement que $\ker(\rho) \cong E^{\mathfrak{J}}$ car les ouverts contenus dans un $\mathfrak{J}_p^{l \geq 2}$ qui sont dans le noyau sont déterminés uniquement par leur intersection avec U_p , qui peut être quelconque. Le raisonnement s'applique encore pour un ouvert de type (b) ce qui donne la conclusion.

Exercice 3. Soit F, G deux faisceaux abéliens sur un espace X et $(F_i)_{i \in \mathfrak{J}}$ une famille de faisceaux abéliens sur X .

- (1) Montrer que, pour tout $x \in X$, il y a un isomorphisme naturel $(F \oplus G)_x \cong F_x \oplus G_x$
- (2) On va montrer, qu'en général, $\left(\prod_{i \in \mathfrak{J}} F_i \right)_x \not\cong \prod_{i \in \mathfrak{J}} (F_i)_x$. On considère les faisceaux $k_{\mathbb{R}] - 1/n, 1/n[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
 - i) Montrer que le germe en 0 du produit est $\left(\prod_{n \in \mathbb{N}^*} k_{\mathbb{R}] - 1/n, 1/n[\right)_0 \cong k^{(\mathbb{N}^*)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} k$.
 - ii) Calculer le produit des germes en 0 $\prod_{n \in \mathbb{N}^*} (k_{\mathbb{R}] - 1/n, 1/n[)_0$ et en déduire le résultat demandé.
- (3) On suppose désormais que $(F_i)_{i \in \mathfrak{J}}$ est localement finie, c'est à dire que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U_x tel que seul un nombre fini de $F_i|_{U_x}$ sont non nuls.
 - i) Montrer qu'alors il y a un isomorphisme naturel $\left(\prod_{i \in \mathfrak{J}} F_i \right)_x \cong \prod_{i \in \mathfrak{J}} (F_i)_x$.
 - ii) Montrer que si chaque F_i est injectif, alors $\prod_{i \in \mathfrak{J}} F_i$ est injectif.
 - iii) Montrer qu'on peut trouver des résolutions injectives $F_i^\bullet$ de chaque F_i telles que $\prod_{i \in \mathfrak{J}} F_i^\bullet$ soit une résolution injective de $\prod_{i \in \mathfrak{J}} F_i$ (on pourra reprendre la démonstration du théorème du cours assurant que $\text{mod}(k_X)$ a assez d'injectifs et vérifier que l'on peut prendre une résolution localement finie).
 - iv) Montrer que $H^\bullet(X, \prod_{i \in \mathfrak{J}} F_i) \cong \prod_{i \in \mathfrak{J}} H^\bullet(X, F_i)$.

Solution 3. (1) On a

$$\begin{aligned}
(F \oplus G)_x &= \lim_{\substack{\rightarrow \\ x \in U}} F(U) \oplus G(U) \quad \text{par définition de } \oplus \text{ et du foncteur } (-)_x \\
&= \lim_{\substack{\rightarrow \\ x \in U}} F(U) \oplus \lim_{\substack{\rightarrow \\ x \in U}} G(U) \quad \text{car une limite filtrante commute aux produits finis} \\
&= F_x \oplus G_x
\end{aligned}$$

par définition.

(2) Si on prend un produit infini, le raisonnement précédent ne marche plus. Soit $i_n :] - 1/n, 1/n[\hookrightarrow \mathbb{R}$ les inclusions naturelles et $j_n : \mathbb{R} \rightarrow] - 1/n, 1/n[$ le morphisme de sites canoniques qui envoie un ouvert U de $] - 1/n, 1/n[$ sur le même ouvert U vu dans $\mathbb{R}$. Le faisceau $k_{\mathbb{R}] - 1/n, 1/n[}$ est égal à $j_n^{-1}(j_n)_* k_{\mathbb{R}} = j_n^{-1} i_n^{-1} k_{\mathbb{R}}$ par définition. En particulier $k_{\mathbb{R}] - 1/n, 1/n[}(V) = 0$ si $V \not\subset] - 1/n, 1/n[$ et $k_{\mathbb{R}] - 1/n, 1/n[}(V) = k_{\mathbb{R}}(V)$ si $V \subset] - 1/n, 1/n[$. Il suit que $(k_{\mathbb{R}] - 1/n, 1/n[})_0 \cong k$.

i) Le germe en 0 du produit est donné par $\left(\prod_{n \in \mathbb{N}^*} k_{\mathbb{R}] - 1/n, 1/n[} \right)_0 = \lim_{\substack{\rightarrow \\ 0 \in V}} \left(\prod_{n \in \mathbb{N}^*} k_{\mathbb{R}] - 1/n, 1/n[} \right)(V)$.

Or quel que soit V ouvert, il existe N suffisamment grand tel que pour tout $n > N$, $0 \in] - 1/n, 1/n[\subset V$. En particulier pour $V =] - 1/N, 1/N[$ on a

$$\left(\prod_{n \in \mathbb{N}^*} k_{\mathbb{R}] - 1/n, 1/n[} \right)(] - 1/N, 1/N[) = k^N.$$

Comme tout V contient un sous-ensemble $] - 1/N, 1/N[$, on a une égalité de limite inductive filtrante

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ 0 \in V}} \left(\prod_{n \in \mathbb{N}^*} k_{\mathbb{R}] - 1/n, 1/n[} \right)(V) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ N > 0}} \left(\prod_{n \in \mathbb{N}^*} k_{\mathbb{R}] - 1/n, 1/n[} \right)(] - \frac{1}{N}, \frac{1}{N}[) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ N > 0}} k^N = k^{(\mathbb{N}^*)}$$

qui est isomorphe à $\bigoplus_{\mathbb{N}^*} k$. L'égalité des limites inductives filtrantes vient du fait que le

foncteur de la sous-catégorie des ouverts $] - 1/N, 1/N[$ dans celle des ouverts contenant 0 est cofinal (Definition 2.5.8; c'est évident vu ci-dessus), d'après la proposition 2.5.9 du polycopié du cours. On ne détaillera plus cet argument par la suite !

ii) Comme $(k_{\mathbb{R}] - 1/n, 1/n[})_0 \cong k$, on a $\prod_{n \in \mathbb{N}^*} (k_{\mathbb{R}] - 1/n, 1/n[})_0 = \prod_{n \in \mathbb{N}^*} k = k^{\mathbb{N}^*}$ qui est différent de

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} k.$$

(3) i) Soit $x \in X$ et $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{J}$ un sous-ensemble fini tel que $F_i|_{U_x} = 0$ si $i \notin \mathfrak{K}$. Il suit que $F_{i_x} = 0$ si $x \notin \mathfrak{K}$. Donc $\prod_{i \in \mathfrak{J}} \lim_{\rightarrow} F_{i_x} \cong \prod_{i \in \mathfrak{K}} \lim_{\rightarrow} F_{i_x}$. On a une suite d'isomorphismes :

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i \in \mathfrak{J}} F_i \right)_x &\cong \lim_{\substack{\rightarrow \\ x \in V \subset U_x}} \left(\prod_{i \in \mathfrak{J}} F_i(V) \right) \quad (\text{car pour tout } V \cap U_x \subset V, U_x \text{ pour tout } V) \\
&\cong \lim_{\substack{\rightarrow \\ x \in V}} \left(\prod_{i \in \mathfrak{J}} F_i|_{U_x}(V) \right) \\
&\cong \lim_{\substack{\rightarrow \\ x \in V}} \left(\prod_{i \in \mathfrak{K}} F_i|_{U_x}(V) \right) \\
&\cong \left(\prod_{i \in \mathfrak{K}} \lim_{\substack{\rightarrow \\ x \in V}} F_i|_{U_x}(V) \right) \quad (\text{car une limite filtrante commute aux produits finis}) \\
&\cong \prod_{i \in \mathfrak{K}} \lim_{\rightarrow} F_{i_x} \cong \prod_{i \in \mathfrak{J}} \lim_{\rightarrow} F_{i_x}
\end{aligned}$$

ii) On a $\text{hom}(-, \prod_{i \in \mathfrak{I}} F_i) \cong \prod_{i \in \mathfrak{I}} \text{hom}(-, F_i)$ est exact puisque le produit est exact (dans une catégorie abélienne, cf le cours et le TD 5) et les F_i sont injectifs. Donc $\text{hom}(-, \prod_{i \in \mathfrak{I}} F_i)$ est exact et $\prod_{i \in \mathfrak{I}} F_i$ est injectif.

iii) On reprend la démonstration du cours pour l'existence d'une résolution injective.

- On munit d'abord X de la topologie discrète. On note $\widehat{X}$ cet espace topologique. On a alors une application continue $\widehat{X} \rightarrow X$ induite par l'identité.
- On démontre le résultat pour $\widehat{X}$. Comme sa topologie est discrète, chaque point est une composante connexe et pour tout faisceaux F, G on a un isomorphisme de faisceaux :

$$\text{Hom}(F, G) \cong \prod_{x \in X} \text{Hom}(F_x, G_x)$$

et G est injectif si et seulement si chaque G_x est injectif. Soit maintenant F_i un faisceau, U un ouvert avec $F_i|_U = 0$. Pour $y \in U$, on prend $F_i^0|_y = 0$. Si $y \notin U$, on choisit $F_i^0|_y$ un module injectif tel que $(F_i)_y \hookrightarrow F_i^0|_y$. Soit F_i^0 le faisceau $V \mapsto \prod_{y \in V} F_i^0|_y$ (il est immédiat de vérifier que c'est bien un faisceau...). Vu-cidessus, F_i^0 est injectif et vérifie $F_i^0|_U = 0$.

- D'après l'étape précédente et le ii), pour tout $i \in \mathfrak{I}$, on peut construire un faisceau injectif localement fini $\prod_{i \in \mathfrak{I}} F_i^0$ et une injection $\prod_{i \in \mathfrak{I}} F_i \hookrightarrow \prod_{i \in \mathfrak{I}} F_i^0$. On peut alors étendre cette application en une résolution injective par des faisceaux localement finis par récurrence (comme lorsqu'on étend $0 \rightarrow M \rightarrow I$ en une résolution injective de M).
- On raisonne maintenant sur X . Pour tout faisceau F_i , on a un monomorphisme $0 \rightarrow f^{-1}F_i \rightarrow F_i$. De plus si $F_i|_U = 0$, alors $f^{-1}F_i|_{\widehat{U}} = 0$. Soit F_i^0 un injectif sur $\widehat{X}$ avec $0 \rightarrow f^{-1}F_i \rightarrow F_i^0$ et $F_i^0|_{\widehat{U}} = 0$ (d'après les étapes précédentes). On a alors une suite exacte $0 \rightarrow f_*f^{-1}F_i \rightarrow f_*F_i^0$ et $f_*F_i^0$ est injectif (car f_* admet un adjoint à gauche qui est exact). De plus $f_*(F_i^0)|_U(V) = F_i^0(\widehat{(V)}) = 0$. Enfin $F_i \rightarrow f_*f^{-1}F_i$ est un monomorphisme puisque pour tout ouvert V c'est donné par $F_i(V) \rightarrow \prod_{v \in V} (F_i)_v$. Par conséquent, on a un monomorphisme $F_i \hookrightarrow f_*(F_i^0)$ avec $f_*(F_i^0)$ injectif et localement fini. On peut alors étendre ce résultat en une résolution injective par des faisceaux localement fini de manière habituelle.
- On vérifie enfin que $\prod_{i \in \mathfrak{I}} F_i^\bullet$ est une résolution (injective d'après ii)) de $\prod_{i \in \mathfrak{I}} F_i$. Il suffit de montrer que $0 \rightarrow \prod_{i \in \mathfrak{I}} F_i \rightarrow \prod_{i \in \mathfrak{I}} F_i^\bullet$ est exacte ce qui est équivalent à

$$0 \rightarrow (\prod_{i \in \mathfrak{I}} F_i)_x \rightarrow (\prod_{i \in \mathfrak{I}} F_i^\bullet)_x$$

est exacte pour tout $x \in X$. Mais comme tous les faisceaux sont localement finis, par i), la suite précédente est isomorphe à $0 \rightarrow \prod_{i \in \mathfrak{I}} F_{i,x} \rightarrow \prod_{i \in \mathfrak{I}} F_{i,x}^\bullet$ qui est exacte par construction.

iv) On a

$$\begin{aligned}
H^j(X, \prod_{i \in \mathcal{I}} F_i) &\cong H^j(\Gamma(X, \prod_{i \in \mathcal{I}} F_i^\bullet)) \\
&\cong H^j(\prod_{i \in \mathcal{I}} \Gamma(X, F_i^\bullet)) \\
&\cong \prod_{i \in \mathcal{I}} H^j(\Gamma(X, F_i^\bullet)) \text{ (par exactitude du produit)} \\
&\cong \prod_{i \in \mathcal{I}} H^j(X, F_i).
\end{aligned}$$

Exercice 4 (Sphères et tores, I). Rappelons que $H^i(S^n, k_{S^n}) = 0$ si $i \neq 0, n$ et $H^0(S^n, k_{S^n}) = H^n(S^n, k_{S^n}) = k$.

- (1) Quelle est la cohomologie $H^j(T_n, k_{T_n})$ d'un "tore" $T_n = S^1 \times \dots \times S^1 = (S^1)^n$. Pour quelles valeurs de n, m , existe-t-il un homéomorphisme entre T_n et S^m ?
- (2) Soit $X = S^1 \times S^2 \times S^3 \dots \times S^{2008}$. Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $H^j(X, k_X) \cong k^{c(j)}$ où $c(j)$ est le nombre de façons d'écrire j comme une somme $j = n_1 + \dots + n_r$ avec $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_r \leq 2008$ (le nombre r n'est pas fixé).
- (3) Soit $Y = S^0 \times S^1 \times S^2 \times S^3 \dots \times S^{2008}$. Montrer que $H^j(Y, k_Y) \cong H^j(X, k_X) \oplus H^j(X, k_X)$.

Solution 4. Cet exercice est un prétexte à utiliser le Théorème de Künneth.

- (1) T_n est parfois qualifié de tore de dimension n (é ne pas confondre avec un tore à n -trous). On note $\binom{n}{k}$ le binomial $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ représentant le nombre de k -uplets parmi n éléments. Par extension, on pose $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$. En appliquant $n-1$ fois le Théorème de Künneth, on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$H^k(T_n, k_{T_n}) \cong \bigoplus_{p_1 + \dots + p_n = k} H^{p_1}(S^1, k_{S^1}) \otimes \dots \otimes H^{p_n}(S^1, k_{S^1}).$$

Mais $H^p(S^1, k_{S^1}) = 0$ si $p > 1$ et vaut k sinon. D'où $H^k(T_n, k_{T_n}) \cong \bigoplus k \otimes \dots \otimes k$ où la somme se fait sur tous les n -uplets d'indice $(p_1, \dots, p_n)$ avec $p_i = 0$ ou 1 et $p_1 + \dots + p_n = k$. Par conséquent, dans chaque uplet, il doit y avoir exactement k p_i qui valent 1 . D'où la somme se fait sur toutes les façons de choisir k éléments parmi n , c'est à dire $\binom{n}{k}$. Conclusion : $H^k(T_n, k_{T_n}) \cong k^{\binom{n}{k}}$.

- (2) En appliquant le Théorème de Künneth 2007-fois, on obtient

$$H^k(X, k_X) \cong \bigoplus_{p_1 + \dots + p_{2008} = k} H^{p_1}(S^1, k_{S^1}) \otimes \dots \otimes H^{p_{2008}}(S^{2008}, k_{S^{2008}}).$$

Comme $H^k(S^n, k_{S^n}) = 0$ si $k \neq 0, n$ et k sinon, on a $H^k(X, k_X) \cong \bigoplus k \otimes \dots \otimes k$ où la somme se fait sur tous les 2008-uplets $(p_1, \dots, p_{2008})$ tels que $p_i = i$ ou 0 et $p_1 + \dots + p_{2008} = k$. Chacun de ces uplets donne donc une écriture $k = n_1 + \dots + n_r$ avec $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_r \leq 2008$ où r est le nombre de $p_i \neq 0$ et $n_1, \dots, n_r$ est la suite (ordonnée) des p_i pour lesquels $p_i \neq 0$. Deux uplets distincts donnent deux suites $n_1, \dots, n_r$ distinctes et donc deux écritures distinctes. Réciproquement, à toute écriture $k = n_1 + \dots + n_r$ (pour un $r \in \mathbb{Z}$) avec $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_r \leq 2008$, on associe le 2008-uplet obtenu en prenant $p_{n_k} = n_k$ et $p_i = 0$ si i est différent de $n_1, \dots, n_r$. Deux telles écritures donnent des uplets distincts et de plus un tel uplet vérifie bien $p_i = i$ ou 0 et $p_1 + \dots + p_{2008} = k$.

Conclusion : $H^j(X, k_X) \cong k^{c(j)}$ où $c(j)$ est le nombre de façons d'écrire j comme une somme $j = n_1 + \dots + n_r$ avec $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_r \leq 2008$.

- (3) On a $S^0 \cong \{x, y\}$ où x, y sont deux points distincts. Il suit que $H^i(S^0, k_{S^0}) \cong k \oplus k$. On a $S^0 \times S^1 \times \dots \times S^{2008} \cong S^0 \times X$ (avec les notations de (2)). On obtient alors par Künneth,

$$H^i(S^0 \times X, k_{S^0 \times X}) \cong \bigoplus_{p+q=i} H^p(S^0, k_{S^0}) \otimes H^q(X, k_X) \cong (k \oplus k) \otimes H^k(X) \cong H^k(X) \oplus H^k(X).$$

On aurait pu aussi remarquer que $S^0 \times X = \{x\} \times X \coprod \{y\} \times X$, d'où $H^i(S^0 \times X, k_{S^0 \times X}) \cong H^i(\{x\} \times X, k_{\{x\} \times X}) \oplus H^i(\{y\} \times X, k_{\{y\} \times X})$ et on conclut puisque $\{x\} \times X \cong X \cong \{y\} \times X$.

Exercice 5 (Sphères et tores, II (Examen de Mai 2007)). Soit D^1 , le disque fermé (dans $\mathbb{R}^2$) de bord S^1 et soit $S^1 \times D^1$ le tore plein que l'on pourra considéré comme plongé dans $\mathbb{R}^3$. Considérons quatre points distincts $\{a, b, c, d\}$ de S^1 et posons $X = S^1 \times S^1 \cup \{a, b, c, d\} \times D^1$. Autrement dit, X est l'espace obtenu en collant quatre disques disjoints dans le tore T_2 .

- (i) Calculer pour tout i les groupes $H^i(X; k_X)$.
- (ii) Soit $\{p\}$ un point de X n'appartenant à aucun des cercles $\{x\} \times S^1$, $x = a, b, c, d$. Calculer $H^i(X - \{p\}; k_X)$.
- (iii) Soit $e \in S^1$ avec $e \neq a, b, c, d$. On considère les applications suivantes de S^1 dans X :

$$f_1 : p \mapsto (a, p), \quad f_2 : p \mapsto (e, p).$$

Calculer les applications $f_i^{\#1} : H^1(X; k_X) \longrightarrow H^1(S^1; k_{S^1})$ pour $i = 1, 2$.

Solution 5. i) On peut contracter les 4 disques inclus dans X de manière continue. On obtient alors que X est homotope à un "bouquet" de 4 sphères S^2 (qui sont recollées deux à deux en les points a, b, c, d). On note S_1, S_2, S_3 et S_4 (où $S_1 \cap S_2 = a, \dots, S_4 \cap S_1 = d$) ces sphères. On applique Mayer Vietoris à la réunion de fermés $F_1 = S_1 \cup S_2$ et $F_2 = S_3 \cup S_4$. Notons que $F_1 \cap F_2 = \{b, d\}$ est une réunion de deux points.

Rappelons que la cohomologie de $F_1 = S_1 \cup S_2 \cong S^2 \vee S^2$ (et de même pour F_2) se calcule facilement en appliquant Mayer-Vietoris aux fermés S_1 et S_2 . On trouve $H^{i \neq 0, 2}(F_1, k) \cong 0$, $H^0(F_1, k) \cong k$ et $H^2(F_1, k) \cong k \oplus k$. Sachant que X est connexe, la suite exacte de Mayer-Vietoris pour $X = F_1 \cup F_2$ s'écrit :

$$0 \rightarrow k \rightarrow k \oplus k \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} k \oplus k \longrightarrow H^1(X, k) \longrightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow H^2(X, k) \longrightarrow k^2 \oplus k^2 \rightarrow 0 \dots$$

Il suit que $H^0(X, k) \cong k$, $H^1(X, k) \cong k$, $H^2(X, k) \cong k^4$ et $H^{i>2}(X, k) \cong 0$.

ii) On distingue 2 cas.

- : Si $p \in \{x\} \times D^2$, $x \in \{a, b, c, d\}$. Pour simplifier, on suppose que $x = d$. Un disque privé d'un point est homotope à son bord ce qui nous assure que X est homotope à un Tore auquel on a ajouté les disques $\{y\} \times D^2$, $y = b, c, d$. De même qu'en i), on est ramené à un bouquet de 3 sphères (recollées deux à deux).
- : Si $p \notin \{x\} \times D^2$, $x \in \{a, b, c, d\}$. On peut contracter les 4 disques en un point comme dans la question i). On obtient que X est homotope à un bouquet de 4 sphères consécutives dont l'une est privée d'un point. Mais une sphère privée d'un point est homéomorphe au plan $\mathbb{R}^2$, qui est contractile. On en déduit finalement que X est encore homotope à un bouquet de 3 sphères comme dans le premier cas.

Un raisonnement similaire à la question 1) donne alors que

$$H^0(X - \{p\}, k) \cong k, \quad H^1(X - \{p\}, k) \cong k, \quad H^2(X - \{p\}, k) \cong k^3 \quad \text{et} \quad H^{i>2}(X, k) \cong 0.$$

iii) Les applications f_1 et f_2 décrivent des parallèles distincts de X . L'astuce consiste à remarquer que f_1 et f_2 sont homotopes dans X (il suffit de faire une rotation ramenant e sur a). On en déduit que $f_1^\# = f_2^\#$. Remarquons que f_1 se factorise sous la forme $f_1 : S^1 \xrightarrow{g} D^2 \cong \{a\} \times D^2 \xrightarrow{i} X$. Donc, $f_1^\# = i^\# \circ g^\#$. Comme le disque D^2 est contractile, $g^\#$ est nulle en degré $n > 0$, donc $f_1^\#$ aussi. Il reste à calculer $f_1^\# : H^0(X, k) \cong k \rightarrow k \cong H^0(S^1)$ qui est l'application envoyant une fonction localement constante s sur X sur la fonction localement constante $s \circ f_1$. Clairement, $f_1^\#$ est l'identité en degré 0.