Corigé du Devoir III d'Algèbre et Topologie
Faisceaux et cohomologie...

Grégory Ginot

Dans ce devoir, k désigne un corps (commutatif).

Exercice 1 (Examen de Mai 2005). *Soit P le polynôme $P(z) = (z(1-z))^2$, définissant donc une application continue de $Y = \mathbb{C}$ dans $X = \mathbb{C}$. On note $Z = \{y \in Y\,;\, P'(y) = 0\}$ et $S = P(Z) \subset X$. Montrer que la restriction à $X\backslash S$ du faisceau $P_*(k_Y)$ est localement constant de rang 4 et n'est pas un faisceau constant.*

Solution 1. Déterminons Z et S pour commencer. On a $P'(y) = 2y(1-y)(1-2y)$, d'où $Z = \{0, 1, 1/2\}$. Il suit que $S = P(Z) = \{0, 1/16\}$. Comme S est fermé, $X\backslash S$ est un ouvert. Par définition,

$$P_*(k_Y)_{|X\backslash S}(U) = k_Y(P^{-1}(U)) = \{s : P^{-1}(U) \to k \text{ loc. constante}\}.$$

Soit x un point de $X\backslash S$. Par définition, l'équation $P(z) = x$ a exactement 4 solutions puisque $P'(z) \neq 0$. Il existe alors un voisinage suffisament petit U_x de x tel que $P^{-1}(U_x)$ a 4 composantes connexes, toutes homéomorphes à $U - x$ (c'est le théorème d'inversion locale...). Il suit que, pour tout ouvert $V \subset U_x \subset X\backslash S$, $P^{-1}(V)$ est une réunion disjointe d'ouverts $V_1, \ldots, V_4$ homéomorphes à V, d'où un isomorphisme naturel

$$\begin{aligned} P_*(k_Y)_{|U_x}(V) \cong \{s : P^{-1}(V) \cong \coprod_{i=1}^{4} V_i \to k \text{ loc. constante}\} &\cong \{s : V \to k \text{ loc. constante}\}^4 \\ &\cong \{s : V \to k^4 \text{ loc. constante}\}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P_*(k_Y)$ est localement constant de rang 4. Si $P_*(k_Y)$ était constant, par connexité de $X\backslash S$, on aurait $P_*(k_Y)_{|X\backslash S}(X\backslash S) \cong k^4$. Mais $P_*(k_Y)_{|X\backslash S}(X\backslash S) \cong k$ car $Y\backslash P^{-1}(S)$ est connexe. Donc $P_*(k_Y)_{|X\backslash S}$ n'est pas constant.

Exercice 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ l'application naturelle $t \mapsto f(t) = \exp(2i\pi t)$. Soit $E \in \mathrm{mod}(k)$ et φ un automorphisme de E. Pour tout ouvert U de S^1, on pose*

$$F_{E,\varphi}(U) = \big\{s \in f_*E_X(U),\ \forall x \in X : s(x+1) = \varphi\big(s(x)\big)\big\}.$$

(1) *Montrer que $U \mapsto F_{E,\varphi}(U)$ est un faisceau sur S^1.*

(2) *Montrer que $F_{E,\varphi}$ est constant si et seulement si φ est l'identité.*

(3) *Esquisser une preuve du fait que tout faisceau localement constant d'espaces vectoriels sur S^1 est isomorphe à un faisceau du type $F_{E,\varphi}$ (on ne demande pas d'écrire tous les détails techniques; seulement les grandes lignes du raisonnement).*

Solution 2. Commençons par quelques remarques. Un ouvert U de S^1 est l'image par f d'un ouvert V de $\mathbb{R}$. En particulier, tout ouvert de S^1 est

(a) soit l'image d'une réunion disjointe d'intervalles ouverts de $]0, 1[$;

(b) soit l'image de $]b-1, a]$ avec $0 < a < b < 1$ et d'une réunion disjointe d'intervalles ouverts de $]a, b[$;

(c) soit S^1 tout entier.

Notons que f est injective sur les ouverts de la forme (a) et (b) ci-dessus et que les cas (a), (b), (c) s'excluent mutuellement. On identifiera donc par la suite un ouvert de S^1 du type (a) ou (b) avec un ouvert $U = \coprod_{i\mathfrak{I}} U_i$ de $\mathbb{R}$ avec les $U_i =]x_i, y_i[$ connexes, et tels que $]x_i + n, y_i + n[\cap]x_j + m, y_j + m[= \emptyset$ si $i \neq j$ ou $n \neq m$. En particulier f est injective sur U et les U_i sont disjoints. Dans le cas (c), on identifie U avec $[0, 1]$ par la suite.

Le faisceau $f_*E_{\mathbb{R}}$ est le faisceau sur S^1 défini par $f_*E_{\mathbb{R}}(U) = E_{\mathbb{R}}(U + \mathbb{Z})$, en suivant la convention précédente pour U. On remarque qu'il n'y a aucune ambiguité dans la définition même si $U = [0, 1]$ (c'est à dire dans le cas (c)) puisque $[0, 1] + \mathbb{Z} = \mathbb{R}$ est bien ouvert dans $\mathbb{R}$. Dans les cas (a) ou (b), on a alors, en écrivant $U = \coprod_{i\in\mathfrak{I}} U_i$ comme ci-dessus,

$$f_*E_{\mathbb{R}}(U) = \{s : (\coprod_{\substack{i \in \mathfrak{I} \\ n \in \mathbb{Z}}}]x_i + n, y_i + n[) \longrightarrow E \text{ localement constantes}\} \cong E^{\mathfrak{I}\times\mathbb{Z}}.$$

Enfin si U est S^1 tout entier, on a

$$f_*E_{\mathbb{R}}(S^1) = \{s : \mathbb{R} \to E \text{ localement constantes}\} \cong E.$$

(1) On a $F_{E,\varphi}(U) \subset f_*E_{\mathbb{R}}(U)$ et $F_{E,\varphi}(U)$ est le k-module des fonctions localement constantes $s : f^{-1}(U) \to E$ qui vérifient $s(x + 1) = \varphi(s(x))$ pour tout $x \in f^{-1}(U)$. Notons que les remarques faites au début de cette solution assurent que cette condition a du sens. De plus il est clair que si U est de type (a) ou (b), alors $F_{E,\varphi}(U) \cong \{s : (\coprod_{i\in\mathfrak{I}}]x_i, y_i[) \longrightarrow E \text{ localement constantes}\} \cong E^{\mathfrak{I}}$.

Il est clair que si $s \in F_{E,\varphi}(U)$ et $V \subset U$ alors, pour tout $x \in f^{-1}(V)$, on a

$$s_{|V}(x + 1) = s(x + 1) = \varphi(s(x)) = \varphi(s_{|V}(x)).$$

D'où il suit que $U \mapsto F_{E,\varphi}(U)$ est un préfaisceau. Il reste à vérifier que c'est bien un faisceau. La condition de séparation (S1) d'un faisceau est claire, puisqu'elle est satisfaite pour $f_*E_{\mathbb{R}}(U)$. L'axiome (S2) est tout aussi aisé à vérifier: si $(s_i \in F_{E,\varphi}(U_i))$ est une famille de sections (donc d'applications localement constantes $f^{-1}(U_i) \to E$...) telles que $s_{i|U_{ij}} = s_{j|U_{ij}}$ pour tout i, j alors il existe $s \in f_*E_{\mathbb{R}}(\bigcup U_i)$ telle que $s_{|U_i} = s_i$. En particulier $s : f^{-1}(\bigcup U_i) \to E$ est localement constante et si $x \in U_i$, $s(x) = s_i(x)$. Mais pour tout $x \in U$, il existe U_i contenant x d'où $s(x + 1) = s_i(x + 1) = \varphi(s_i(x)) = \varphi(s(x))$ ce qui assure que $s \in F_{E,\varphi}(\bigcup U_i)$.

(2) Supposons que $F_{E,\varphi}$ est un faisceau constant. C'est à dire qu'il existe $M \in \mathrm{Mod}(k)$ tel que $F_{E,\varphi} \cong M_{S^1}$. Regardons les sections globales $F_{E,\varphi}(S^1)$ de $F_{E,\varphi}$. Par définition ce sont les fonctions localement constantes $s : \mathbb{R} \to E$, donc constante (puisque S^1 est connexe), qui vérifient $s(x + 1) = \varphi(s(x))$ pour tout x, c'est à dire $e = \varphi(e)$ (en notant $e = s(x)$ la valeur de la fonction constante s). Donc $F_{E,\varphi}(S^1) \cong \ker(\varphi - \mathrm{Id})$. Puisque S^1 est connexe et $F_{E,\varphi} \cong M_{S^1}$, on a aussi $F_{E,\varphi}(S^1) \cong M$; donc $M \cong \ker(\varphi - \mathrm{Id})$.

Etudions maintenant le germe en un point x de S^1, supposons $x = 0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pour fixer les idées. Comme $F_{E,\varphi} \cong M_{S^1}$, on a $(F_{E,\varphi})_x \cong M$. Mais tout ouvert $U \subset S^1$ contenant 0 contient un ouvert $f(]-\epsilon, \epsilon[)$ pour un $0 < \epsilon < 1/2$ suffisament petit (remarquons que $f(]-\epsilon, \epsilon[)$ est un ouvert de type (b) que l'on identifie donc avec $]-\epsilon, \epsilon[$ par injectivité de f). Il en résulte que $(F_{E,\varphi})_0 = \varinjlim_{0<\epsilon<1/2} F_{E,\varphi}(]-\epsilon, \epsilon[)$. Or d'après les calculs du **(1)**, $F_{E,\varphi}(]-\epsilon, \epsilon[) \cong E$ et si $\epsilon' < \epsilon$, alors le morphisme de restriction $F_{E,\varphi}(]-\epsilon, \epsilon[) \to F_{E,\varphi}(]-\epsilon', \epsilon'[)$ est l'identité. Par conséquent on a $(F_{E,\varphi})_0 = E$. On en conclut que $M \cong E$, ce qui donne $\ker(\varphi - \mathrm{Id}) \cong E$ c'est à dire $\varphi = \mathrm{Id}$.

Réciproquement, si $\varphi = \mathrm{Id}$, alors d'après les calculs du **(1)**, pour tout ouvert $U \subset S^1$, $F_{E,\varphi}(U) \cong \{s : U \to E \text{ localement constantes}\} = E_{S^1}(U)$. Donc $F_{E,\varphi} \cong E_{S^1}$ est un faisceau constant.

(3) Pour commencer, on remarque que $F_{E,\varphi}$ est localement constant. En effet tout point de S^1 admet un voisinage ouvert connexe U du type (b) et d'après les calculs des questions précédentes, $F_{E,\varphi|U} \cong E_U$ est constant et son germe en tout point est E.

Montrons maintenant que tout faisceau localement constant sur S^1 est isomorphe à un $F_{E,\varphi}$. On va utiliser les résutats du TD 6, Exercice 3 et du TD 7, Exercice 1. Et on commence par simplifier le problème pour pouvoir justement s'y ramener. Soit F un faisceau localement constant. Par hypothèse, pour tout $x \in S^1$, il y a un voisinage $U_x \ni x$ ouvert et $E_x \in \mathrm{Mod}(k)$ tels que $F_{|U_x} \cong E_{x|U_x}$. On en déduit un isomorphisme de germes $F_x \cong F_{|U_x x} \cong (E_x)_{|U_x x} = E_x$. On est donc ramené au cas où $F_{|U_x} \cong F_{x|U_x}$. Commençons par montrer que F_x ne dépend pas de x. Il s'agit là bien entendu d'une propriété provenant de la connexité de S^1. En effet, l'application $S^1 \ni x \mapsto F_x \in \mathrm{Mod}(k)$ (muni de la topologie discrète) est continue (puisque si $y \in U_x$, alors $F_y = \varinjlim_{y \in V \subset U_x} F(V) \cong \varinjlim_{y \in V \subset U_x} F_{x|U_x}$). Comme $\mathrm{Mod}(k)$ est discret et S^1 connexe, l'application $x \mapsto F_x$ est constante; on note E sa valeur. Conclusion : il existe $E \in \mathrm{Mod}(k)$ tel que pour tout $x \in S^1$, il existe un voisinage $U_x \ni x$ ouvert et un isomorphisme $F_{|U_x} \cong E_{|U_x}$.

Si $V \subset U$, alors clairement $(E_U)_{|V} \cong E_V$. Quitte à passer à la composante connexe de U_x contenant x (qui est ouverte puisque S^1 est localement connexe cf Remarque 2 du corrigé du TD 6), on peut supposer que les U_x sont connexes (donc des intervalles). Il est temps d'utiliser la compacité de S^1: comme $\bigcup U_x \supset \bigcup \{x\} = S^1$, il existe un recouvrement de S^1 par un nombre fini de U_x. Quitte à restreindre ces ouverts connexes et à éventuellemt les subdiviser, on peut supposer qu'il n'y a pas d'intersections triples et qu'en plus, chaque intervalle intersecte seulement deux autres intervalles et de manière connexe. Conclusion : on est ramené au cas où S^1 est recouvert par la réunion (finie) d'ouverts connexes $U_1, \ldots, U_n$ tels que $U_i \cap U_j \cap U_k = \emptyset$ si i, j, k distincts et $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j \pm 1$ modulo n et $U_i \cap U_{i+1}$ est connexe; on peut de plus supposer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni 0 \in U_n \cap U_1$. Il est *fortement conseillé* de faire un dessin pour se rendre compte de la situation; c'est beaucoup plus parlant. Rappelons qu'on a des isomorphismes $\psi_i : F_{|U_i} \to E_{U_i}$ et en particulier des isomorphismes $\varphi_{ij} : (E_{U_j})_{|U_{ij}} \to (E_{U_i})_{|U_{ij}}$ donné par $\varphi_{ij} = (\psi_i^{-1})_{|U_{ij}} \circ (\psi_j)_{|U_{ij}}$. Comme les U_{ij} sont connexes, les isomorphismes φ_{ii+1} sont donnés par un automorphisme de E, encore noté $\varphi_{ii+1} : E \to E$: c'est le résultat de l'exercice 3 de la feuille de TD 6 (et plus précisément de la Remarque 3 du corrigé de la feuille de TD 6). Si $n = 3$, on est donc dans la situation de l'exercice 1 de la feuille de TD 7. Conclusion : F est isomorphe au faisceau obtenu par recollement des faisceaux constants E_{U_i} via les isomorphismes $(E_{U_j})_{|U_{ij}} \to (E_{U_i})_{|U_{ij}}$ donnés par des automorphismes $\varphi_{ij} \in \mathrm{aut}(E)$.

En reprenant la démonstration de la feuille de TD 7, exercice 3.**(2)**, on obtient facilement que F est isomorphe au faisceau obtenu en recollant les E_{U_i} par des isomorphismes β_{ij} tels que $\beta_{ii+1} = \mathrm{Id}$ si $i < n$ et $\beta_{n1} = \varphi_{n1} \circ \varphi_{n-1n} \circ \cdots \circ \varphi_{12}$. En d'autres termes on peut se ramener au cas où tous les φ_{ij} sont l'identité sauf (éventuellement) le dernier $\varphi_{n1} \in \mathrm{aut}(E)$. On note simplement $\varphi \in \mathrm{aut}(E)$ cet automorphisme. Le faisceau F est constant si et seulement si φ est l'identité; encore une fois le raisonement de l'exercice 3.**(2)** de la feuille de TD 7 s'applique. Il nous reste à montrer que $F \cong F_{E,\varphi}$.

On a vu dans la question **(2)** que $F_{E,\varphi}(S^1) = 0$ si $\varphi \neq \mathrm{Id}$ et est isomorphe à E sinon. C'est aussi le cas de F puisque $F(S^1) = 0$ si F est non-constant (car S^1 est connexe, localement connexe cf exercice 2 du TD 6). Il reste donc à considérer le cas des ouverts U de type (a) et (b).

Soit $U = \coprod_{j \in \mathfrak{I}}]x_j, y_j[$ de type (a). Les ouverts U_i étant connexes, ils sécrivent $U_i =]a_i, b_i[$ avec $1 < a_i < b_i < 1$ pour $1 < i < n$, $1 + a_n < b_{n-1}$, $0 < b_n < a_2$ et $a_n < a_1 < 0 < b_n < a_2 < b_1 < a2 < b_2$. On peut partitionner $\mathfrak{I}$ en $\coprod_{l \leq n} \coprod \mathfrak{I}_p^l$ où $\mathfrak{I}_p^l$ est l'ensemble des $j \in \mathfrak{I}$ tels que $]x_j, y_j[$ à une intersection non-vide avec exactements l ouverts du recouvrement (U_i) qui sont les ouverts $U_p, U_{p+1}, \ldots, U_{p+l-1}$ (l'indice doit bien sur être pris modulo n). Là aussi il vaut mieux faire un

dessin si on veut comprendre quelque chose... Or $F(U) = \ker\left(\prod F(U\cap U_i) \xrightarrow{\rho} \prod F(U\cap U_i\cap U_j)\right)$ (cf le chapitre sur le recollement ou la feuille de TD 6 pour les détails). Avec les notations précédentes on a

$$\prod F(U\cap U_i) \cong \prod_{l,i} \prod_{j\in\coprod_p \mathfrak{I}_p^l} F(]x_j, y_j[\cap U_i) \cong \prod_{l,j\in\coprod_p \mathfrak{I}_p^l} E^l$$

puisque les $]x_j, y_j[\subset]0,1[$ sont connexes et $F_{|U_p} \cong E_{U_p}$. Notons que le terme E^l correspondant à un $j \in \mathfrak{I}_p^l$ est identifié avec le sous module $Ee_p \oplus \cdots \oplus Ee_{p+l-1}$ de E^n muni de sa base canonique $e_1, \ldots, e_l$. De même on a un isomorphisme canonique

$$\prod F(U\cap U_i\cap U - j) \cong \prod_{l\geq 2, j\in\coprod_p \mathfrak{I}_p^l} (Ee_p \wedge e_{p+1} \oplus \cdots \oplus Ee_{p+l-2}\wedge e_{p+l-1})$$

Le morphisme $\rho : \prod F(U\cap U_i) \to \prod F(U\cap U_i\cap U_j)$ envoie alors Ee_s dans $Ee_{s-1}\wedge e_s \oplus Ee_s \wedge e_{s+1}$ de la manière suivante $xe_s \mapsto xe_s\wedge e_{s+1} - xe_{s-1}\wedge e_s$, si $s < n$, et $xe_n \mapsto \varphi(x)e_1\wedge e_n - xe_{n-1}\wedge e_n$ si $s = n$. On vérifie alors immédiatement que $\ker(\rho) \cong E^{\mathfrak{I}}$ car les ouverts contenus dans un $\mathfrak{I}_p^{l\geq 2}$ qui sont dans le noyau sont déterminés uniquement par leur intersection avec U_p, qui peut être quelconque. Le raisonement s'applique encore pour un ouvert de type (b) ce qui donne la conclusion.

Exercice 3. *Soit F, G deux faisceaux abéliens sur un espace X et $(F_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ une famille de faisceaux abéliens sur X.*

(1) *Montrer que, pour tout $x \in X$, il y a un isomorphisme naturel $(F\oplus G)_x \cong F_x \oplus G_x$*

(2) *On va montrer, qu'en général, $\left(\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i\right)_x \ncong \prod_{i\in\mathfrak{I}} (F_i)_x$. On considère les faisceaux $k_{\mathbb{R}]-1/n,1/n[}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.*

i) *Montrer que le germe en 0 du produit est $\left(\prod_{n\in\mathbb{N}^*} k_{\mathbb{R}]-1/n,1/n[}\right)_0 \cong k^{(\mathbb{N}^*)} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} k$.*

ii) *Calculer le produit des germes en 0 $\prod_{n\in\mathbb{N}^*} (k_{\mathbb{R}]-1/n,1/n[})_0$ et en déduire le résultat demandé.*

(3) *On suppose désormais que $(F_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ est localement finie, c'est à dire que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U_x tel que seul un nombre fini de $F_{i|U_x}$ sont non nuls.*

i) *Montrer qu'alors il y a un isomorphisme naturel $\left(\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i\right)_x \cong \prod_{i\in\mathfrak{I}} (F_i)_x$.*

ii) *Montrer que si chaque F_i est injectif, alors $\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i$ est injectif.*

iii) *Montrer qu'on peut trouver des résolutions injectives $F_i^\bullet$ de chaque F_i telles que $\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i^\bullet$ soit une résolution injective de $\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i$ (on pourra reprendre la démonstration du théorème du cours assurant que $\mathrm{mod}(k_X)$ a assez d'injectifs et vérifier que l'on peut prendre une résolution localement finie).*

iv) *Montrer que $H^\bullet(X, \prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i) \cong \prod_{i\in\mathfrak{I}} H^\bullet(X, F_i)$.*

Solution 3. **(1)** On a

$$\begin{aligned}(F\oplus G)_x &= \varinjlim_{x\in U} F(U)\oplus G(U) \quad \text{par définition de } \oplus \text{ et du foncteur } (-)_x\\ &= \varinjlim_{x\in U} F(U)\oplus \varinjlim_{x\in U} G(U) \quad \text{car une limite filtrante commute aux produits finis}\\ &= F_x\oplus G_x\end{aligned}$$

par définition.

(2) Si on prend un produit infini, le raisonement précédent ne marche plus. Soit $i_n :]-1/n,1/n[\hookrightarrow\mathbb{R}$ les inclusions naturelles et $j_n : \mathbb{R}\to]-1/n,1/n[$ le morphisme de sites canoniques qui envoie un ouvert U de $]-1/n,1/n[$ sur le même ouvert U vu dans $\mathbb{R}$. Le faisceau $k_{]-1/n,1/n[}$ est égal à $j_n^{-1}(j_n)_*k_{\mathbb{R}} = j_n^{-1}i_n^{-1}k_{\mathbb{R}}$ par définition. En particulier $k_{]-1/n,1/n[}(V)=0$ si $V\not\subset]-1/n,1/n[$ et $k_{]-1/n,1/n[}(V)=k_{\mathbb{R}}(V)$ si $V\subset]-1/n,1/n[$. Il suit que $(k_{]-1/n,1/n[})_0\cong k$.

i) Le germe en 0 du produit est donné par $\left(\prod_{n\in\mathbb{N}^*} k_{]-1/n,1/n[}\right)_0 = \varinjlim_{0\in V}\left(\prod_{n\in\mathbb{N}^*} k_{]-1/n,1/n[}\right)(V)$. Or quel que soit V ouvert, il existe N suffisament grand tel que pour tout $n>N$, $0\in]-1/n,1/n[\subset V$. En particulier pour $V=]-1/N,1/N[$ on a

$$\left(\prod_{n\in\mathbb{N}^*} k_{]-1/n,1/n[}\right)(]-1/N,1/N[) = k^N.$$

Comme tout V contient un sous-ensemble $]-1/N,1/N[$, on a une égalité de limite inductive filtrante

$$\varinjlim_{0\in V}\left(\prod_{n\in\mathbb{N}^*} k_{]-1/n,1/n[}\right)(V) = \varinjlim_{N>0}\left(\prod_{n\in\mathbb{N}^*} k_{]-1/n,1/n[}\right)(]\frac{-1}{N},\frac{1}{N}[) = \varinjlim_{N>0} k^N = k^{(\mathbb{N}^*)}$$

qui est isomorphe à $\bigoplus_{\mathbb{N}^*} k$. L'égalité des limites inductives filtrantes vient du fait que le foncteur de la sous-catégorie des ouverts $]-1/N,1/N[$ dans celle des ouverts contenant 0 est cofinal (Definition **2.5.8**; c'est évident vu ci-dessus), d'après la proposition **2.5.9** du polycopié du cours. On ne détaillera plus cet argument par la suite !

ii) Comme $(k_{]-1/n,1/n[})_0\cong k$, on a $\prod_{n\in\mathbb{N}^*}(k_{]-1/n,1/n[})_0 = \prod_{n\in\mathbb{N}^*} k = k^{\mathbb{N}^*}$ qui est différent de $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} k$.

(3) **i)** Soit $x\in X$ et $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{I}$ un sous-ensemble fini tel que $F_{i|U_x}=0$ si $i\notin\mathfrak{K}$. Il suit que $F_{ix}=0$ si $x\notin\mathfrak{K}$. Donc $\prod_{i\in\mathfrak{I}}\varinjlim F_{ix}\cong\prod_{i\in\mathfrak{K}}\varinjlim F_{ix}$ On a une suite d'isomorphismes :

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i\right)_x &\cong \varinjlim_{x\in V\subset U_x}(\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i(V) \text{ (car pour tout } V\cap U_x\subset V, U_x \text{ pour tout } V)\\ &\cong \varinjlim_{x\in V}(\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_{i|U_x}(V)\\ &\cong \varinjlim_{x\in V}(\prod_{i\in\mathfrak{K}} F_{i|U_x}(V)\\ &\cong (\prod_{i\in\mathfrak{K}}\varinjlim_{x\in V} F_{i|U_x}(V) \text{ (car une limite filtrante commute aux produits finis)}\\ &\cong \prod_{i\in\mathfrak{K}}\varinjlim F_{ix}\cong\prod_{i\in\mathfrak{I}}\varinjlim F_{ix}\end{aligned}$$

ii) On a $\hom(-,\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i) \cong \prod_{i\in\mathfrak{I}} \hom(-,F_i)$ est exact puisque le produit est exact (dans une catégorie abélienne, cf le cours et le TD 5) et les F_i sont injectifs. Donc $\hom(-,\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i)$ est exact et $\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i$ est injectif.

iii) On reprend la démonstration du cours pour l'existence d'une résolution injective.

- On munit d'abord X de la topologie discrète. On note $\widehat{X}$ cet espace topologique. On a alors une application continue $\widehat{X} \to X$ induite par l'identité.
- On démontre le résultat pour $\widehat{X}$. Comme sa topologie est discrète, chaque point est une composante connexe et pour tout faisceaux F, G on a un isomorphisme de faisceaux :

$$\mathrm{Hom}(F,G) \cong \prod_{x\in X} \mathrm{Hom}(F_x, G_x)$$

  et G est injectif si et seulement si chaque G_x est injectif. Soit maintenant F_i un faisceau, U un ouvert avec $F_{i|U} = 0$. Pour $y \in U$, on prend $F_i^0{}_y = 0$. Si $y \notin U$, on choisit $F_i^0{}_y$ un module injectif tel que $(F_i)_y \hookrightarrow F_i^0{}_y$. Soit F_i^0 le faisceau $V \mapsto \prod_{y\in V} F_i^0{}_y$ (il est immédiat de vérifier que c'est bien un faisceau...). Vu-cidessus, F_i^0 est injectif et vérifie $F_i^0{}_{|U} = 0$.
- D'après l'étape précédente et le **ii)**, pour tout $i \in \mathfrak{I}$, on peut construire un faisceau injectif localement fini $\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i^0$ et une injection $\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i \hookrightarrow \prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i^0$. On peut alors étendre cette application en une résolution injective par des faisceaux localement finis par récurrence (comme lorsqu'on étend $0 \to M \to I$ en une résolution injective de M).
- On raisonne maintenant sur X.Pour tout faisceau F_i, on a un monomorphisme $0 \to f^{-1}F_i \to F_i$. De plus si $F_{i|U} = 0$, alors $f^{-1}F_{i|\widehat{U}} = 0$. Soit F_i^0 un injectif sur $\widehat{X}$ avec $0 \to f^{-1}F_i \to F_i^0$ et $F_i^0{}_{|\widehat{U}} = 0$ (d'après les étapes précédentes).On a alors une suite exacte $0 \to f_*f^{-1}F_i \to f_*F_i^0$ et $f_*F_i^0$ est injectif (car f_* admet un adjoint à gauche qui est exact). De plus $f_*(F_i^0)_{|U}(V) = F_i^0(\widehat{(V)} = 0$. Enfin $F_i \to f_*f^{-1}F_i$ est un monomorphisme puisque pour tout ouvert V c'est donné par $F_i(V) \to \prod_{v\in V}(F_i)_v$. Par conséquent, on a un monomorphisme $F_i \hookrightarrow f_*(F_i^0)$ avec $f_*(F_i^0)$ injectif et localement fini. On peut alors étendre ce résultat en une rsolution injective par des faisceaux localement fini de manière habituelle.
- On vérifie enfin que $\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i^\bullet$ est une résolution (injective d'après **ii)**) de $\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i$. Il suffit de montrer que $0 \to \prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i \to \prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i^\bullet$ est exacte ce qui est équivalent à

$$0 \to (\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i)_x \to (\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i^\bullet)_x$$

  est exacte pour tout $x \in X$. Mais comme tous les faisceaux sont localement finis, par **i)**, la suite précédente est isomorphe à $0 \to \prod_{i\in\mathfrak{I}} F_{ix} \to \prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i^\bullet{}_x$ qui est exacte par construction.

iv) On a

$$\begin{aligned} H^j(X, \prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i) &\cong H^j\big(\Gamma(X, \prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i^\bullet)\big) \\ &\cong H^j\big(\prod_{i\in\mathfrak{I}} \Gamma(X, F_i^\bullet)\big) \\ &\cong \prod_{i\in\mathfrak{I}} H^j\big(\Gamma(X, F_i^\bullet)\big) \text{ (par exactitude du produit)} \\ &\cong \prod_{i\in\mathfrak{I}} H^j(X, F_i). \end{aligned}$$

Exercice 4 (Sphères et tores, I). *Rappelons que $H^i(S^n, k_{S^n}) = 0$ si $i \neq 0, n$ et $H^0(S^n, k_{S^n}) = H^n(S^n, k_{S^n}) = k$.*

(1) *Quelle est la cohomologie $H^j(T_n, k_{T_n})$ d'un "tore" $T_n = S^1 \times \cdots \times S^1 = (S^1)^n$. Pour quelles valeur de n, m, existe-t-il un homéomorphisme entre T_n et S^m ?*

(2) *Soit $X = S^1 \times S^2 \times S^3 \cdots \times S^{2008}$. Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $H^j(X, k_X) \cong k^{c(j)}$ où $c(j)$ est le nombre de façons d'écrire j comme une somme $j = n_1 + \cdots + n_r$ avec $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_r \leq 2008$ (le nombre r n'est pas fixé).*

(3) *Soit $Y = S^0 \times S^1 \times S^2 \times S^3 \cdots \times S^{2008}$. Montrer que $H^j(Y, k_Y) \cong H^j(X, k_X) \oplus H^j(X, k_X)$.*

Solution 4. Cet exercice est un prétexte à utiliser le Théorème de Künneth.

(1) T_n est parfois qualifié de tore de dimension n (é ne pas confondre avec un tore à n-trous). On note $\binom{n}{k}$ le binomial $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ représentant le nombre de k-uplets parmi n éléments. Par extension, on pose $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$. En appliquant $n-1$ fois le Théorème de Künneth, on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$H^k(T_n, k_{T_n}) \cong \bigoplus_{p_1+\cdots+p_n=k} H^{p_1}(S^1, k_{S^1}) \otimes \cdots \otimes H^{p_n}(S^1, k_{S^1}).$$

Mais $H^p(S^1, k_{S^1}) = 0$ si $p > 1$ et vaut k sinon. D'où $H^k(T_n, k_{T_n}) \cong \bigoplus k \otimes \cdots \otimes k$ où la somme se fait sur tous les n-uplets d'indice $(p_1, \ldots, p_n)$ avec $p_i = 0$ ou 1 et $p_1 + \cdots + p_n = k$. Par conséquent, dans chaque uplet, il doit y avoir exactement k p_i qui valent 1. D'où la somme se fait sur toutes les façons de choisir k éléments parmi n, c'est à dire $\binom{n}{k}$. Conclusion : $H^k(T_n, k_{T_n}) \cong k^{\binom{n}{k}}$.

(2) En appliquant le Théorème de Künneth 2007-fois, on obtient

$$H^k(X, k_X) \cong \bigoplus_{p_1+\cdots+p_{2008}} H^{p_1}(S^1, k_{S^1}) \otimes \cdots \otimes H^{p_{2008}}(S^{2008}, k_{S^{2008}}).$$

Comme $H^k(S^n, k_{S^n}) = 0$ si $k \neq 0, n$ et k sinon, on a $H^k(X, k_X) \cong \bigoplus k \otimes \cdots \otimes k$ où la somme se fait sur tous les 2008-uplets $(p_1, \ldots, p_{2008})$ tels que $p_i = i$ ou 0 et $p_1 + \cdots + p_{2008} = k$. Chacun de ces uplets donne donc une écriture $k = n_1 + \cdots + n_r$ avec $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_r \leq 2008$ où r est le nombre de $p_i \neq 0$ et $n_1, \ldots, n_r$ est la suite (ordonée) des p_i pour lesquels $p_i \neq 0$. Deux uplets distincts donnent deux suites $n_1, \ldots, n_r$ distinctes et donc deux écritures distinctes. Réciproquement, à toute écriture $k = n_1 + \cdots + n_r$ (pour un $r \in \mathbb{Z}$) avec $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_r \leq 2008$, on associe le 2008-uplets obtenus en prenant $p_{n_k} = n_k$ et $p_i = 0$ si i est différent de $n_1, \ldots, n_r$. Deux telles écritures donnent des uplets distincts et de plus un tel uplet vérifie bien $p_i = i$ ou 0 et $p_1 + \cdots + p_{2008} = k$.

Conclusion : $H^j(X, k_X) \cong k^{c(j)}$ où $c(j)$ est le nombre de façons d'écrire j comme une somme $j = n_1 + \cdots + n_r$ avec $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_r \leq 2008$.

(3) On a $S^0 \cong \{x, y\}$ où x, y sont deux points distincts. Il suit que $H^i(S^0, k_{S^0}) \cong k \oplus k$. On a $S^0 \times S^1 \times \cdots \times S^{2008} \cong S^0 \times X$ (avec les notations de **(2)**). On obtient alors par Künneth,

$$H^i(S^0 \times X, k_{S^0 \times X}) \cong \bigoplus_{p+q=i} H^p(S^0, k_{S^0}) \otimes H^q(X, k_X) \cong (k \oplus k) \otimes H^k(X) \cong H^k(X) \oplus H^k(X).$$

On aurait pu aussi remarquer que $S^0 \times X = \{x\} \times X \coprod \{y\} \times X$, d'où $H^i(S^0 \times X, k_{S^0 \times X}) \cong H^i(\{x\} \times X, k_{\{x\} \times X}) \oplus H^i(\{y\} \times X, k_{\{x\} \times X})$ et on conclut puisque $\{x\} \times X \cong X \cong \{y\} \times X$.

Exercice 5 (Sphères et tores, II (Examen de Mai 2007)). *Soit D^1, le disque fermé (dans $\mathbb{R}^2$) de bord S^1 et soit $S^1 \times D^1$ le tore plein que l'on pourra considéré comme plongé dans $\mathbb{R}^3$. Considérons quatre points distincts $\{a, b, c, d, \}$ de S^1 et posons $X = S^1 \times S^1 \cup \{a, b, c, d\} \times D^1$. Autrement dit, X est l'espace obtenu en collant quatre disques disjoints dans le tore T_2.*

(i) *Calculer pour tout i les groupes $H^i(X; k_X)$.*

(ii) *Soit $\{p\}$ un point de X n'appartenant à aucun des cercles $\{x\} \times S^1$, $x = a, b, c, d$. Calculer $H^i(X - \{p\}; k_X)$.*

(iii) *Soit $e \in S^1$ avec $e \neq a, b, c, d$. On considère les applications suivantes de S^1 dans X:*

$$f_1 : p \mapsto (a, p), \qquad f_2 : p \mapsto (e, p).$$

Calculer les applications $f_i^{\#1} : H^1(X; k_X) \longrightarrow H^1(S^1; k_{S^1})$ pour $i = 1, 2$.

Solution 5. i) On peut contracter les 4 disques inclus dans X de manière continue. On obtient alors que X est homotope à un "bouquet" de 4 sphères S^2 (qui sont recollées deux à deux en les points a, b, c, d). On note S_1, S_2, S_3 et S_4 (où $S_1 \cap S_2 = a, \ldots, S_A \cap S_1 = d$) ces sphères. On applique Mayer Vietoris à la réunion de fermés $F_1 = S_1 \cup S_2$ et $F_2 = S_3 \cup S_4$. Notons que $F_1 \cap F_2 = \{b, d\}$ est une réunion de deux points.

Rappelons que la cohomologie de $F_1 = S_1 \cup S_2 \cong S^2 \vee S^2$ (et de méme pour F_2)se calcule facilement en appliquant Mayer-Vietoris aux fermés S_1 et S_2. On trouve $H^{i \neq 0,2}(F_1, k) \cong 0$, $H^0(F_1, k) \cong k$ et $H^2(F_1, k) \cong k \oplus k$. Sachant que X est connexe, la suite exacte de Mayer-Vietoris pour $X = F_1 \cup F_2$ s'écrit :

$$0 \to k \to k \oplus k \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} k \oplus k \longrightarrow H^1(X, k) \longrightarrow 0 \to 0 \to H^2(X, k) \longrightarrow k^2 \oplus k^2 \to 0 \ldots.$$

Il suit que $H^0(X, k) \cong k$, $H^1(X, k) \cong k$, $H^2(X, k) \cong k^4$ et $H^{i>2}(X, k) \cong 0$.

ii) On distingue 2 cas.

- **-:** Si $p \in \{x\} \times D^2$, $x \in \{a, b, c, d\}$. Pour simplifier, on suppose que $x = d$. Un disque privé d'un point est homotope à son bord ce qui nous assure que X est homotope à un Tore auquel on a ajouté les disques $\{y\} \times D^2$, $y = b, c, d$. De méme qu'en **i)**, on est ramené à un bouquet de 3 sphères (recollées deux à deux).
- **-:** Si $p \notin \{x\} \times D^2$, $x \in \{a, b, c, d\}$. On peut contracter les 4 disques en un point comme dans la question **i)**. On obtient que X est homotope à un bouquet de 4 sphères consécutives dont l'une est privée d'un point. Mais une sphère privée d'un point est homéomorphe au plan $\mathbb{R}^2$, qui est contractile. On en déduit finalement que X est encore homotope à un bouquet de 3 sphères comme dans le premier cas.

Un raisonement similaire à la question **1)** donne alors que

$$H^0(X - \{p\}, k) \cong k, \qquad H^1(X - \{p\}, k) \cong k, \qquad H^2(X - \{p\}, k) \cong k^3 \quad \text{et} \quad H^{i>2}(X, k) \cong 0.$$

iii) Les applications f_1 et f_2 décrivent des parallèles distincts de X. L'astuce consiste à remarquer que f_1 et f_2 sont homotopes dans X (il suffit de faire une rotation ramenant e sur a). On en déduit que $f_1^\# = f_2^\#$. Remarquons que f_1 se factorise sous la forme $f_1 : S^1 \overset{g}{\hookrightarrow} D^2 \cong \{a\} \times D^2 \overset{i}{\hookrightarrow} X$. Donc, $f_1^\# = i^\# \circ g^\#$. Comme le disque D^2 est contractile, $g^\#$ est nulle en degré $n > 0$, donc $f_1^\#$ aussi. Il reste à calculer $f_1^\# : H^0(X, k) \cong k \to k \cong H^0(S^1)$ qui est l'application envoyant une fonction localement constante s sur X sur la fonction localement constante $s \circ f_1$. Clairement, $f_1^\#$ est l'identité en degré 0.