Corrigé de la feuille de TD 1 : Trois exercices sur le produit tensoriel

Grégory Ginot

Exercice 1. *Dans cet exercice on considère le produit tensoriel de $\mathbb{Z}$-modules.*

1. *Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \cong 0$.*

2. *Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

3. *Montrer que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$*

4. *Montrer que si un groupe abélien G est de torsion alors $G \otimes \mathbb{Q}$ est nul.*

5. *Réciproquement montrer que si un groupe abélien de type fini G vérifie $G \otimes \mathbb{Q} = 0$ alors G est de torsion (on pourra utiliser le théorème de structure des groupes abéliens).*

Solution 1.

1. L'idée est d'utiliser que 2 est inversible dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ alors qu'il est nul dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Plus précisément, quel que soit $n \otimes m \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes 7\mathbb{Z}$, on a $m = 2m'$ (car 2 est inversible dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$). D'où $n \otimes m = n \otimes 2m' = 2n \otimes m' = 0 \otimes m' = 0$. Comme les $n \otimes m$ engendrent $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, on obtient le résultat.

2. Soit $m : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'application $(\overline{n}^2, \overline{m}^6) \mapsto \overline{nm}^2$. Cette application est bien définie (car 2 divise 2 et 6) et bilinéaire (on en déduit une application linéaire $\tilde{m} : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Montrons que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vérifie la propriété universelle du produit tensoriel. Soit $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to A$ une application bilinéaire (A est un $\mathbb{Z}$-module quelconque). En particulier, par bilinéarité on a
$$f(\overline{n}^2, \overline{m}^6) = nmf(1, 1) = f(\overline{nm}^2, 1). \tag{0.1}$$
Soit $g : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to A$ l'application $\overline{k}^2 \mapsto f(\overline{k}^2, 1)$. Elle est évidemment linéaire (puisque f l'est en chaque variable) et satisfait $g \circ m = f$ par (0.1). Réciproquement soit g, linéaire, vérifiant $g \circ m = f$. Comme $m(\overline{k}^2, 1)) = \overline{k}^2$, l'équation (0.1) donne $g(\overline{k}^2) = g\big(m(\overline{k}^2, 1)\big) = f(\overline{k}^2)$. D'où l'unicité de g. Conclusion $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ satisfait la propriété universelle du produit tensoriel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et lui est donc canoniquement isomorphe. On aurait pu aussi vérifier que l'application $\overline{k}^2 \mapsto \overline{k}^2 \otimes 1$ est un inverse de $\tilde{m}$ pour obtenir l'isomorphisme cherché.

3. L'isomorphisme se démontre comme ci-dessus à partir de l'application $m : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ définie par $(\overline{n}^3, \overline{m}^3) \mapsto \overline{nm}^3$.

Remarque 1. Les applications m introduites dans les points 2. et 3. ne sont rien d'autres que des "multiplications" (d'où leur bilinéarité). Il n'est pas trés dur d'adapter le point 2. pour montrer que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\gcd(n, m)\mathbb{Z}$.

Exercice 2. *Soit k un anneau commutatif unitaire. Soit $(a_1, \dots, a_n)$ une famille génératrice d'un k-module de type fini A et $(b_1, \dots, b_m)$ une famille génératrice d'un k-module de type fini B.*

1. *Montrer que la famille des $\{a_i \otimes b_j\}$ $(i = 1 \dots n, j = 1 \dots m)$ est une famille gnénératrice du k-module $A \otimes_k B$. En déduire que $A \otimes_k B$ est de type fini.*

2. *On suppose que les familles sont libres. Montrer que $A \otimes_k B$ est un k-module libre isomorphe à k^{nm} et que la famille $\{a_i \otimes b_j\}$ en est une base.*

Solution 2. Tout élément du produit tensoriel $A \otimes_k B$ est une combinaison linéaire finie d'éléments de la forme $a \otimes_k b$ avec $a \in A$,$b \in B$. Montrons que ces derniers sont des combinaisons linéaires finies des $a_i \otimes_k b_j$. Par hypothèse a s'écrit sous la forme $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ et de même $b = \sum_{j=1}^{m} \nu_j b_j$.

Par linéarité, il suit

$$a \otimes_k b = \sum_{\substack{i = 1 \dots n \\ j = 1 \dots m}} \lambda_i \nu_j a_i \otimes_k b_j.$$

On obtient donc que la famille finie $\{a_i \otimes_k b_j\}_{i,j}$ est génératrice et $A \otimes_k B$ est de type fini.

Par hypothése $A \cong \bigoplus_{i=1}^{n} k < a_i > \cong k^n$. De même $B \cong \bigoplus_{j=1}^{m} k < b_j > \cong k^m$. La distributivité du produit tensoriel par rapport à la somme directe donne

$$A \otimes_k B \cong k^n \otimes_k k^m \cong \bigoplus_{(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,m\}} k \otimes_k k \cong k^{nm}$$

car $k \otimes_k k \cong k$. On a donc obtenu que $A \otimes_k B$ est libre de rang nm. De plus, par construction, les éléments $a_i \otimes_k b_j$ sont dans la composante d'indice (i,j) de la somme directe $\bigoplus_{(i,j)} k \otimes_k k$ ci-dessus.

Ils sont en particulier linéairement indépendant (et générateurs par 1.). On obtient que cette famille est une base.

Exercice 3. *Soit A un anneau commutatif unitaire, B une A-algèbre commutative et M un A-module à droite.*

1. *Montrer qu'on peut munir $B \otimes_A M$ d'une structure de B-module à gauche par la formule*

$$x * \left(\sum b_i \otimes_A m_i \right) = \sum x b_i \otimes_A m_i.$$

2. *Montrer que si M est de type fini (resp. libre de type fini) sur A, alors $B \otimes_A M$ est de type fini sur B (resp. libre de type fini). On pourra utiliser l'exercice précédent.*

Solution 3. 1. Comme B est une A-algèbre, c'est un A-module et le produit tensoriel a du sens. il faut d'abord vérifier que la formule donnée a du sens; c'est à dire qu'elle est compatible avec la relation $ab \otimes_A m = b \otimes_A am,\ a \in A, b \in B, m \in M$. C'est immédiat par commutativité de B. Les relations $(xy) * (b \otimes m) = x * (y * (b \otimes m))$, $(x + y) * (b \otimes m) = x * (b \otimes m) + y * (b \otimes m)$ s'obtiennent aisément par linéarité du produit tensoriel.

2. B est engendré par son unité $1_B \in B$. Donc en prenant n'importe quelle famille $\{m_j\}$ génératrice finie, par l'exercice 2.1., on obtient que $B \otimes M$ est de type fini (et même que $\{1 \otimes m_j\}$ est génératrice. De plus comme B est libre sur lui-même, on obtient d'après l'exercice 2.2. que la famille $\{1 \otimes m_j\}$ est une base de $B \otimes M$ si la famille $\{m_j\}$ est une base de M.

Remarque 2. La démonstration du point 1. se généralise facilement pour donner une structure de B-module à $N \otimes M$ dès que N est un (A, B)-bimodule tel que l'action de A commute avec l'action de B.