Corrigé de la feuille de TD 2 : suites exactes et complexes

Grégory Ginot

Dans tous les exercices, A désigne un anneau unitaire et k un corps.

Exercice 1. *(1) Soit* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M" \longrightarrow 0$ *une suite exactes de* $\mathbb{Z}$*-modules finis. Montrer que* $\#M = \#M' * \#M"$ *où* $\#M$ *désigne le cardinal de* M*.*

(2) Déterminer l'ensemble des $\mathbb{Z}$*-modules* M *tels qu'il existe une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Toutes les suites exactes ainsi obtenues sont-elles scindées ? Que se passe-t-il si on considère seulement les suites exactes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*-modules ?*

Solution 1. (1) La suite exacte considérée est en particulier une suite exacte de groupes (par ailleurs abéliens). Donc M'' est isomorphe au groupe quotient M/M' de cardinal $\#M/\#M'$. D'où la conclusion. Remarquons qu'il est inutile de supposer que M soit fini pour établir le résultat. En effet, on peut choisir un ensemble $I \subset M$ d'antécédents des éléments de M'' par l'application $M \to M''$. Comme M'' est fini, on peut choisir I fini et tel que tout $m'' \in M''$ a un antécédent dans I. Alors M est la réunion des classes xM' où x décrit I. Il est en particulier fini. Et le résultat est obtenu.

(2) Il suffit d'appliquer le résultat (1) (on a pas besoin de supposer M fini vu la remarque ci-dessus). Alors M est un sous-groupe abélien fini de cardinal 4. Donc $M \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'après le théorème de structure des groupes abéliens de type fini. De plus si $f : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules, alors $f(\overline{2}^4) = 2f(1) = 0$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Donc il n'existe pas d'isomorphismes entre $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (notons que c'est de toutes façons, une conséquence du théorème de structure des groupes abéliens). En particulier les suites obtenues avec $M = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne peuvent pas être scindées. Il reste à voir qu'on peut effectivement obtenir une suite exacte avec $M = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Il suffit de prendre la suite

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

où la fléche de droite est le morphisme $\overline{x}^4 \mapsto \overline{x}^2$. L'injectivité et la surjectivité sont immédiates. De plus si $\overline{x}^2 = 0$ alors $x = 2y$ et donc x est dans l'image de la multiplication par 2. La suite est bien exacte.

Une suite exacte de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-modules est en particulier une suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules. D'après le travail précédent, la seule possibilité est que $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (car $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module, sinon 2 serait nul modulo 4). En particulier ces suites sont scindées (car, par exemple, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un corps).

Exercice 2. *On considère une longue suite exacte*

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \longrightarrow 0$$

de k*-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que*

$$\sum_{i \geq 0} \dim(M_{2i}) = \sum_{i \geq 0} \dim(M_{2i+1}).$$

Solution 2. Pour tout i, $\dim(\ker(f_i)) + \dim(\mathrm{im}(f_i)) = \dim(M_i)$. Or $\dim(\ker(f_i)) = \dim(\mathrm{im}(f_{i-1}))$ puisque que $\ker(f_i) \cong \mathrm{im}(f_{i-1})$. On en déduit que $\dim(M_{2i}) = \dim(\mathrm{im}(f_{2i})) + \dim(\mathrm{im}(f_{2i-1}))$ et $\dim(M_{2i+1}) = \dim(\mathrm{im}(f_{2i+1})) + \dim(\mathrm{im}(f_{2i}))$. Le résultat est maintenant immédiat en prenant les sommes sur tous les i possibles (ce qui a du sens car ces sommes sont finies).

Remarque 1. Pour $n = 2$, c'est à dire le cas d'une suite exacte courte, on obtient en particulier $\dim(M_1) = \dim(M_0) + \dim(M_1)$.

Remarquons aussi que, si on prend une suite exacte de longueur infinie, la même démonstration assure que $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i \dim(M_i) = 0$.

Exercice 3. *Soit A un anneau et $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M''$ une suite exacte de A-modules. Soit N, P deux sous-modules de M tels que $i^{-1}(N) = i^{-1}(P)$ et $\pi(N) = \pi(P)$.*

(1) On suppose que $N \subset P$. Montrer que $N = P$.

(2) Donner un exemple où N est différent de P (suggestion : prendre $M = \mathbb{R}^2$ et $M' = M'' = \mathbb{R}$).

Solution 3. (1) Soit $x \in P$: $\pi(x) \in \pi(P) = \pi(N)$ donc il existe $y \in N$ tel que $\pi(y) = \pi(x)$ et alors $x - y \in \ker(\pi) = \mathrm{im}(i)$. Il existe donc $z \in M'$ tel que $x - y = i(z)$. Comme $x - y \in P$ on a : $z \in i^{-1}(P) = i^{-1}(N)$ d'où $x = y + i(z) \in N$. Conclusion : $P \subset N$.

(2) Considérons la suite exacte $0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R} \longrightarrow 0$ dans laquelle $i(x) = (x, 0)$ et $\pi(x, y) = y$. C'est à dire qu'on a choisi l'axe des abscisses pour M' et celui des ordonnées pour M''. Prenons maintenant deux droites vectorielles quelconques distinctes et distinctes des 2 axes. Elles donnent aisément un contre-exemple. Plus "précisément", prenons deux sous-espaces vectoriels de dimension 1 : $N = \langle (a, b) \rangle$ et $P = \langle (c, d) \rangle$ avec $b \neq 0$, $d \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. On a alors $i^{-1}(N) = i^{-1}(P) = (0)$, $\pi(N) = \pi(P) = \mathbb{R}$, $N \not\subset P$ et $P \not\subset N$.

Exercice 4. *Soit A un anneau, M un A-module et N et P des sous-modules de M.*
Soit $f : N \cap P \longrightarrow N \oplus P$, $x \longmapsto (x, x)$ et $g : N \oplus P \longrightarrow N + P$, $(y, z) \longmapsto y - z$.

(1) Montrer que la suite $0 \longrightarrow N \cap P \xrightarrow{f} N \oplus P \xrightarrow{g} N + P \longrightarrow 0$ est exacte.

(2) On choisit $A = k[X, Y]$, où k est un corps, $M = A$, $N = XA$ (c'est a dire le sous-module de $k[X, Y]$ formé des polynômes multiples de X) et $P = YA$. Montrer que dans ce cas la suite exacte qui précède n'est pas scindée.

(3) Établir l'existence d'une suite exacte $0 \longrightarrow \dfrac{M}{N \cap P} \longrightarrow \dfrac{M}{N} \oplus \dfrac{M}{P} \longrightarrow \dfrac{M}{N + P} \longrightarrow 0$.

Solution 4. (1) Toutes les propriétés sont immédiates :

— f est injective : si $f(x) = (x, x) = (0, 0)$ alors $x = 0$,
— g est surjective, par définition de $N + P$,
— $g \circ f = 0$, par définiton de f et g,
— Si $g(y, z) = 0$ alors $y = z \in N \cap P$ donc $(y, z) \in \mathrm{im}(f)$.

(2) Commençons par préciser les termes de la suite exacte : on a $N = XA$ et $P = YA$, d'où $N \cap P = (XY)A$ et $N + P = XA + YA = (X, Y)A = \{Q \in A,\ Q = UX + VY \text{ avec } U \in A \text{ et } V \in A\}$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite exacte est scindée ; il existe alors une application $s : (X, Y)A \to XA \oplus YA$ telle que $g \circ s = \mathrm{Id}_{XA+YA}$ et qui est A-linéaire. Comme $N + P = XA + YA$ est engendré par X et Y en tant que A-module, s est déterminée par $s(X)$ et $s(Y)$. On a alors :

— $s(X) = (XP_1, YP_2)$ et comme $g(s(X)) = X$ il vient $X = YP_2 - XP_1$ c'est à dire $X(1+P_1) = YP_2$. Or X et Y sont irréductibles distincts dans A. Il en découle $X|P_2$, puis $P_2 = XP_0$ et $P_1 = YP_0 - 1$ d'où $s(X) = (XYP_0 - X, XYP_0)$.

— de même on trouve $s(Y) = (XYQ_0, XYQ_0 + Y)$

Enfin $s(XY) = Xs(Y) = Ys(X)$ (car s est un morphisme de $A = k[X,Y]$-modules). En utilisant les expressions précédentes pour $S(X)$ et $s(Y)$, on obtient :

$$(X^2YQ_0, X^2YQ_0 + XY) \quad = \quad (XY^2P_0 - XY, XY^2P_0).$$

En particulier, $X^2YQ_0 = XY^2P_0 - XY$ d'où $1 = YP_0 - XQ_0$ ce qui est impossible (dans k[X,Y]).

(3) On adapte le (1) en prenant $\tilde{f}(x + N \cap P) = (x+N, x+P)$ et $\tilde{g}(y+N, z+P) = z - y + (N+P)$. (on note $x + Q$ la classe de x dans M/Q.) L'exactitude de la suite se montre comme en (1).

Exercice 5. *(Lemme des 5) Considérons le diagramme commutatif de A-modules :*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & N_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & N_5
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes sont des suites exactes. Montrer que :

(1) si f_1 est surjective et f_2 et f_4 injectives, alors f_3 est injective.

(2) si f_5 est injective et f_2 et f_4 surjectives, alors f_3 est surjective.

Remarquons que ce lemme est utilisé souvent de la manière suivante **(à retenir)** *:*

(3) Si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

Solution 5. (1) Soit $x_3 \in M_3$; si $f_3(x_3) = 0$ alors $f_4(\alpha_3(x_3)) = \beta_3(f_3(x_3)) = 0$ donc $\alpha_3(x_3) = 0$ car f_4 est injective. Comme les lignes horizontales sont des suites exactes, il existe $x_2 \in M_2$ tel que $x_3 = \alpha_2(x_2)$. Soit $y_2 = f_2(x_2)$; on a $\beta_2(y_2) = f_3(x_3) = 0$ donc il existe $y_1 \in N_1$ tel que $f_2(x_2) = \beta_1(y_1)$. Comme f_1 est surjective, il existe $x_1 \in M_1$ est que $y_1 = f_1(x_1)$. On a alors : $x_3 = \alpha_2(x_2 - \alpha_1(x_1))$ (car $\alpha_2 \circ \alpha_1 = 0$) mais $f_2(x_2 - \alpha_1(x_1)) = f_2(x_2) - f_2(\alpha_1(x_1)) = y_2 - \beta_1(f_1(x_1)) = 0$ donc $x_2 - \alpha_1(x_1) = 0$, car f_2 est injective, et $x_3 = 0$. Conclusion : f_3 est injective.

(2) Soit $y_3 \in N_3$; il existe $x_4 \in M_4$ tel que $f_4(x_4) = \beta_3(x_3)$ car f_4 est surjective. On a $f_5(\alpha_4(x_4)) = \beta_4(f_4(x_4)) = \beta_4(\beta_3(y_3)) = 0$ donc $\alpha_4(x_4) = 0$ car f_5 est injective. Comme les lignes horizontales sont des suites exactes, il existe $x_3 \in M_3$ tel que $\alpha_3(x_3) = x_4$. On a alors : $\beta_3(y_3 - f_3(x_3)) = 0$ donc il existe $y_2 \in N_2$ tel que $y_3 - f_3(x_3) = \beta_2(y_2)$. Comme f_2 est surjective, il existe $x_2 \in M_2$ tel que $f_2(x_2) = y_2$. On a alors $y_3 = f_3(x_3 + \alpha_2(x_2))$. Conclusion : f_3 est surjective.

(3) Le (1) donne l'injectivité de f_3 et le (2) la surjectivité.

Remarque 2. On peut remarquer que les hypothèses de la question **(3)** sont trop fortes; il suffit de supposer que f_2, f_4 sont des isomorphismes, f_1 est surjective et f_5 est injective.

Exercice 6 (Lemme du Serpent)**.** *Soit A un anneau. On considère le diagramme commutatif de complexes de A-modules :*

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[d, "d''"] \\
N' \arrow[r, "v"] & N \arrow[r, "q"] & N''.
\end{tikzcd} \tag{0.1}$$

En particulier $p \circ u = 0 = q \circ v$.

(1) *Montrer que u, p et v, q induisent des applications linéaires naturelles $\tilde{u} : \ker d' \to \ker d$, $\tilde{p} : \ker d \to \ker d''$, $\bar{v} : \operatorname{coker} d' \to \operatorname{coker} d$ et $\bar{q} : \operatorname{coker} d \to \operatorname{coker} d''$ tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
\ker d' \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, hook, "i'"] & \ker d \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, hook, "i"] & \ker d'' \arrow[d, hook, "i''"] \\
M' \arrow[r, "u"] & M \arrow[r, "p"] & M''
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\pi'"] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi"] & N'' \arrow[d, "\pi''"] \\
\operatorname{coker} d' \arrow[r, "\bar{v}"] & \operatorname{coker} d \arrow[r, "\bar{q}"] & \operatorname{coker} d''
\end{tikzcd}$$

(2) *Montrer que $\tilde{p} \circ \tilde{u} = 0$ et que $\bar{q} \circ \bar{v} = 0$.*

(3) *Montrer que si u est injective alors $\tilde{u}$ l'est aussi.*
Montrer que si q est surjective alors $\bar{q}$ l'est aussi.

(4) *Montrer que si $\ker p = \operatorname{im} u$ et si v est injective alors $\ker \tilde{p} = \operatorname{im} \tilde{u}$.*
Montrer que si $\ker q = \operatorname{im} v$ et si p est surjective alors $\ker \bar{q} = \operatorname{im} \bar{v}$.

(5) *On suppose maintenant que le diagramme (0.1) est exact (c'est à dire $\ker p = \operatorname{im} u$ et $\ker q = \operatorname{im} v$) et que, de plus, v est injective et p surjective. Montrer alors qu'il existe une application linéaire naturelle $\delta : \ker d'' \to \operatorname{coker} d'$ et que la suite*

$$0 \longrightarrow \ker d' \xrightarrow{\tilde{u}} \ker d \xrightarrow{\tilde{p}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\bar{q}} \operatorname{coker} d'' \longrightarrow 0$$

est exacte.

En pratique l'énoncé (5) est très utile. On l'utilise le plus souvent sous la forme suivante qu'il faut **impérativement retenir***: étant donné un diagramme commutatif de A-modules*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "v"] & N \arrow[r, "q"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont des suites exactes, on peut compléter de façon naturelle ce diagramme pour obtenir le suivant, appelé diagramme du serpent :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \ker d' \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, "i'"] & \ker d \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "i"] & \ker d'' \arrow[d, "i''"] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta"] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\pi'"] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi"] & N'' \arrow[r] \arrow[d, "\pi''"] & 0 \\
 & \operatorname{coker} d' \arrow[r, "\bar{v}"] \arrow[d] & \operatorname{coker} d \arrow[r, "\bar{q}"] \arrow[d] & \operatorname{coker} d'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

et dans lequel :

$$0 \longrightarrow \ker d' \xrightarrow{\tilde{u}} \ker d \xrightarrow{\tilde{p}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\bar{q}} \operatorname{coker} d'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte.

Solution 6. (1) Quel que soit $x \in \ker d'$; on a $d \circ u \circ i'(x) = v \circ d' \circ i'(x) = 0$ (car $d' \circ i' = 0$). La propriété universelle de $\ker d$ donne une unique application $\tilde{u}$ rendant le diagramme commutatif. On peut aussi travailler en termes d'éléments on a $u \circ i'(x) \in \ker d$. On pose $\tilde{u} = u_{|\ker d'}$ et on vérifie que cette application convient bien.

On construit de même que $\tilde{p}$ ($= p_{|\ker d}$).

Par commutativité du carré de gauche, on a $\pi \circ v \circ d' = \pi \circ d \circ u = 0$ (car $\pi \circ d = 0$). La propriété universelle du coproduit donne l'application $\overline{v}$ et la commutativité du diagramme. Une nouvelle fois, on peut aussi préférer travailler avec des éléments mais ca demande un peu plus de travail : en effet si $x' \in \operatorname{coker} d'$; comme π' est surjective, il existe $n' \in N'$ tel que $x' = \pi'(n')$; posons $z = \pi \circ v(n')$; considérons alors un autre antécédant de x' par π': $y' \in N'$ tel que $x' = \pi'(y')$ et posons $z' = \pi \circ v(y')$; on remarque que $y - y' \in \ker \pi' = \operatorname{im} d'$ donc il existe $t \in M'$ tel que $n' - y' = d'(t')$; mais alors $z - z' = \pi \circ v(n' - y') = \pi \circ v \circ d'(t') = \pi \circ d \circ u(t') = 0$ (car $\pi \circ d = 0$); il en découle que z ne dépend que de x' et pas de l'antécédant n' choisi pour le calculer; on peut donc poser $z = \bar{v}(x')$. On vérifie aisément que $\bar{v}$ ainsi défini est une application linéaire : soient $a_1, a_2 \in A$ et $x_1, x_2 \in \operatorname{coker} d'$ et soient $y_1, y_2 \in N'$ tels que $x_1 = \pi'(y_1)$ et $x_2 = \pi'(y_2)$; on a alors $a_1x_1 + a_2x_2 = \pi'(a_1y_1 + a_2y_2)$ donc $\bar{v}(a_1x_1 + a_2x_2) = \pi \circ v(a_1y_1 + a_2y_2) = a_1\ \pi \circ v(y_1) + a_2\ \pi \circ v(y_2) = a_1\bar{v}(x_1) + a_2\bar{v}(x_2)$.

On construit de même $\bar{q} : \operatorname{coker} d \to \operatorname{coker} d''$ (qu'on choisisse de travailler avec des éléments ou pas !).

(2) Soit $x \in \ker d'$; on a $i'' \circ \tilde{p} \circ \tilde{u}(x) = p \circ u \circ i'(x) = 0$ (car $p \circ u = 0$) ; or i'' est injective donc $\tilde{p} \circ \tilde{u}(x) = 0$. Conclusion : $\tilde{p} \circ \tilde{u} = 0$.

Soit maintenant $x \in \operatorname{coker} d'$ et $y \in N'$ tel que $x = \pi'(y)$; on a alors $\bar{q} \circ \bar{v}(x) = \bar{q} \circ \bar{v} \circ \pi'(y) = \pi'' \circ q \circ v(y) = 0$ (car $q \circ v = 0$). Conclusion : $\bar{q} \circ \bar{v} = 0$.

(3) On a $i \circ \tilde{u} = u \circ i'$ est injective si u est injective (i' l'est par hypothèse). Comme $i \circ \tilde{u}$ est injective, alors $\tilde{u}$ aussi.

De plus $\overline{q} \circ \pi = \pi'' \circ q$ est surjective si q l'est. Il en découle que $\overline{q}$ aussi.

(4) Supposons $\ker p = \operatorname{im} u$ et v injective. L'égalité $\tilde{p} \circ \tilde{u} = 0$ implique $\operatorname{im} \tilde{u} \subset \ker \tilde{p}$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $x \in \ker \tilde{p} \subset \ker d$; on a $p \circ i(x) = i'' \circ \tilde{p}(x) = 0$ donc $i(x) \in \ker p = \operatorname{im} u$; il existe donc $m' \in M'$ tel que $i(x) = u(m')$ et on a $v \circ d'(m') = d \circ u(m') = d \circ i(x) = 0$ (car $d \circ i = 0$) donc $d'(m') = 0$ (car v est injective) d'où $m' \in \ker d' = \operatorname{im} i'$; il existe donc $x' \in \ker d'$ tel que $m' = i'(x')$ et alors $i \circ \tilde{u}(x') = u \circ i'(x') = u(m') = i(x)$. Par injectivité de i, $u(x') = x$. Conclusion : $\ker \tilde{p} \subset \operatorname{im} \tilde{u}$ ce qui termine la démonstration de $\ker \tilde{p} = \operatorname{im} \tilde{u}$.

Supposons maintenant $\ker q = \operatorname{im} v$ et p surjective. La relation $\bar{q} \circ \bar{v} = 0$ donne $\operatorname{im} \bar{v} \subset \ker \bar{q}$. Comme précédement le point le plus délicat est de montrer l'inclusion réciproque.; soit $x \in \ker \bar{q} \subset \operatorname{coker} d$; il existe $n \in N$ tel que $x = \pi(n)$ (car π est surjective); on a alors $\pi'' \circ q(n) = \bar{q} \circ \pi(n) = \bar{q}(x) = 0$ donc $q(n) \in \ker \pi'' = \operatorname{im} d''$. Par conséquent, il existe $m'' \in M''$ tel que $q(n) = d''(m'')$; comme p est surjective il existe $m \in M$ tel que $m'' = p(m)$ d'où $q(n) = d'' \circ p(m) = q \circ d(m)$; mais alors $q(n - d(m)) = 0$ donc $n - d(m) \in \ker q = \operatorname{im} v$. Il existe donc $n' \in N'$ tel que $n - d(m) = v(n')$ c'est à dire $n = d(m) + v(n')$; on a alors $x = \pi(n) = \pi(d(m) + v(n')) = \pi \circ v(n')$ (car $\pi \circ d = 0$). D'où $x = \overline{v} \circ \pi'(n')$. Conclusion $\ker \bar{q} \subset \operatorname{im} \overline{v}$ ce qui termine la démonstration.

(5) On suppose les hypothèses des deux questions du (4) vérifiées. On commence par construire l'application δ. Soit $x'' \in \ker d''$. Il nous faut définir $\delta(x'')$. Pour cela on va parcourir le diagramme du serpent en suivant la fléhe δ. L'élément x'' s'envoie par i'' sur l'élément $i''(x'') \in M''$. Comme p est surjective, il existe $m \in M$ tel que $p(m) = i''(x'')$. On choisit un tel m (qui n'a aucune raison d' être unique). Cela nous fournit $d(m) \in N$. On souhaite remonter cet élément $d(m)$ dans N'. La commutativité du diagramme (0.1) nous assure que $q \circ d(m) = d'' \circ p(m) = d'' \circ i''(x'') = 0$ (car $d'' \circ i'' = 0$). D'où $d(m) \in \ker q = \operatorname{im} v$; donc il existe bien $n' \in N'$ tel que $d(m) = v(n')$. Notons que de plus ce n' est unique par injectivité de v. On obtient maintenant un élément

$\pi'(n') \in \operatorname{coker} d'$. On souhaite poser $\delta(x'') = \pi'(n')$. Mais l'élément n' obtenu dépend du choix du $m \in M$ tel que $p(m) = i''(x'')$ (et uniquement de ce choix). Il nous faut donc vérifier que $\pi'(n')$ ne dépend pas de ce choix pour définir l'application $x'' \mapsto \delta(x'') = \pi'(n')$; puis montrer que cette application est bien linéaire. Soient $m_1, m_2 \in M$ deux choix tels que $d(m_1) = i''(x'') = d(m_2)$. On note n'_1, n'_2 les éléments obtenus par la construction précédente (c'est é dire $v(n'_1) = d(m_1)$, $v(n'_2) = d(m_2)$). On doit montrer que $\pi'(n'_1) = \pi'(n'_2)$ ce qui est équivalent à $\pi'(n'_1 - n'_2) = 0$ c'est à dire $n'_1 - n'_2 \in \ker \pi' = \operatorname{im} d'$. Or, par construction $d(m_1 - m_2) = d(m_1) - d(m_2) = 0$. Donc $m_1 - m_2 \in \ker p = \operatorname{im} u$ et on en déduit un élément $m' \in M'$ tel que $u(m') = m_1 - m_2$. Mais alors $v \circ d'(m') = d \circ u(m') = d(m_1 - m_2) = v(n'_1 - n'_2)$. Par injectivité de v, on en déduit que $n'_1 - n'_2 = d'(m') \in \operatorname{im} d'$. Conclusion : on peut donc bien définir $\delta(x'') = \pi'(n')$. Il reste à prouver la linéarité. C'est une conséquence immédiate de la linéarité de toutes les applications du diagramme et de l'indépendance de $\delta(x'')$ du choix du m (en effet, si m_1, m_2 vérifient $p(m_1) = i''(x''_1), p(m_2) = i''(x''_2)$, on peut prendre $m_1 + m_2$ comme antécédant de $i''(x''_1 + x''_2)$ et on vérifie facilement qu'on obtient ainsi $\delta(x''_1 + x''_2) = \delta(x''_1) + \delta(x''_2$ avec ce choix). Résumons la construction de δ : à partir de x'', on se donne un $m \in M$ satisfaisant

$$p(m) = i''(x'') \tag{0.2}$$

et ensuite un élément $n' \in N'$ tel que

$$v(n') = d(m). \tag{0.3}$$

On a alors $\delta(x'') = \pi'(n')$.

Il faut maintenant montrer l'exactitude de la suite. Les questions précédentes nous ramènent à montrer que $\ker \delta = \operatorname{im} \tilde{p}$ et $\ker \bar{v} = \operatorname{im} \delta$. Montrons déjà $\operatorname{im} \tilde{p} \subset \ker \delta$ et $\operatorname{im} \delta \subset \ker \bar{v}$ (c'est à dire $\delta \circ \tilde{p} = 0 = \bar{v} \circ \delta$). Calculons $\delta(\tilde{p}(x))$; on reprend la construction de δ : on peut prendre $m = i(x)$ à l'étape (0.2) car on a bien $p\big((x)\big) = i''\big(\tilde{p}(x)\big)$. Mais alors $d(m) = d \circ i(x) = 0$ (car $d \circ i = 0$). Il suit que $i(n') = 0$ donc $n' = 0$ par injectivité et finalement $\delta(\tilde{p}(x)) = \pi'(n') = \pi'(0) = 0$.

D'autre part, toujours à l'aide de la construction de δ, on a quel que soit $x'' \in \ker d''$, $\bar{v} \circ \delta(x'') = \bar{v} \circ \pi'(n') = \pi \circ v(n') = \pi \circ d(m) = 0$ (car $\pi \circ d = 0$). Conclusion : $\operatorname{im} \delta \subset \ker \bar{v}$.

Montrons enfin les inclusions inverses. Soit $x'' \in \ker \delta$. On va "remonter" le diagramme pour trouver un antécédent de x'' par $\tilde{p}$. D'après la construction de δ, cela signifie que $\pi'(n') = 0$ où n' satisafit la relation (0.3). Comme $\ker \pi' = \operatorname{im} d'$, il existe $m' \in M'$ tel que $n' = d'(m')$ et alors $d \circ u(m') = v \circ d'(m') = v(n') = d(m)$ (par la relation (0.3)). D'où $m - u(m') \in \ker d = \operatorname{im} i$; donc il existe $x \in \ker d$ tel que $m - u(m') = i(x)$. On veut montrer que $\tilde{p}(x) = x''$. Par injectivité de i'', il suffit de montrer que $i''(\tilde{p}(x) - x'') = 0$. Or $i'' \circ \tilde{p}(x) = p \circ i(x) = p(m - u(m')) = p(m)$ (car $p \circ u = 0$). Comme $p(m) = i''(x'')$ par la relation (0.2), on a bien $i''(\tilde{p}(x) - x'')$. Conclusion : $\ker \delta \subset \operatorname{im} \tilde{p}$ ce qui termine la démonstration de l'égalité $\ker \delta = \operatorname{im} \tilde{p}$.

Soit $y \in \ker \bar{v}$; on cherche $x'' \in \ker d''$ tel que $\delta(x'') = y$. Par surjectivité de π', il existe $n'_0 \in N'$ tel que $y = \pi'(n'_0)$ et on a $\pi \circ v(n'_0) = \bar{v} \circ \pi'(n'_0) = \bar{v}(y) = 0$ donc $v(n'_0) \in \ker \pi = \operatorname{im} d$. Il existe alors $m_0 \in M$ tel que $v(n'_0) = d(m_0)$; la commutativité du diagramme donne $d'' \circ p(m_0) = q \circ d(m_0) = q \circ v(n'_0) = 0$ (car $q \circ v = 0$). En particulier $p(m_0) \in \ker d'' = \operatorname{im} i''$; donc il existe $x'' \in \ker d''$ tel que $p(m_0) = i''(x'')$. Il nous suffit de prouver $\delta(x'') = y$ pour conclure. Ceci est immédiat en choisissant $m = m_0$ é l'étape (0.2) et $n' = n'_0$ à l'étape (0.3) (ce qui est possible vu notre construction).En conclusion : $\ker \bar{v} \subset \operatorname{im} \delta$. Ceci montre l'égalité $\ker \bar{v} = \operatorname{im} \delta$.

Remarque 3. Il découle du lemme du serpent qu'un diagramme entre suite exactes courtes induit une suite au niveau des noyaux des fléches verticales qui est exacte sauf à droite; et de même une suite au niveau des conoyaux qui est exacte sauf à gauche. De plus le lemme dit que le défaut de surjectivité de $\ker d \to \ker d''$ est exactement le défaut d'injectivité de $\operatorname{coker} d' \to \operatorname{coker} d$.

Exercice 7. *(Lemme des 9) Considérons le diagramme commutatif de A-modules :*

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
 & N' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "g'"'] & N \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & N'' \arrow[d, "g''"'] & \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "\gamma'"] & L \arrow[r, "\gamma"] & L'' &
\end{tikzcd}$$

dans lequel toutes les lignes sont des suites exactes ainsi que la colonne droite et la colonne gauche. Montrer que si de plus la colonne du milieu est un complexe, alors c'est une suite exacte.

Solution 7. La seule chose à montrer est $\ker(g) \subset \mathrm{im}(f)$. Soit $n \in N$ tel que $g(y) = 0$; alors $g''(\beta(n)) = \gamma(g(n)) = 0$ donc il existe $m'' \in M''$ tel que $f''(m'') = \beta(n)$. Par surjectivité, on peut relever m'' dans M. C'est à dire qu'il existe $m \in M$ tel que $\alpha(m) = m''$. A priori $n - f(m) \neq 0$ mais $\beta(n - f(m)) = 0$. Il existe donc $n' \in N'$ tel que $n - f(m) = \beta'(n')$. On a alors $\gamma'(g'(n')) = g(\beta'(n')) = g(n - f(m)) = 0$ donc $g'(n') = 0$ (car γ' est injective). Il existe donc $m' \in M'$ tel que $n' = f'(m')$ et alors $n = f(m + \alpha'(m'))\,\mathrm{im}(f)$.

Exercice 8. *On considère un complexe C de A-modules*

$$\ldots \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+2} \longrightarrow \ldots$$

où $n \in \mathbb{Z}$. On fera l'abus de notation consistant à écrire simplement d au lieu de d_n. On dit que C est **scindé** *si il existe des applications $s_n : C_n \to C_{n-1}$ ($n \in \mathbb{Z}$) telles que $d = dsd$ (en notant abusivement s au lieu de s_n).*

(1) On suppose C scindé. Montrer que les applications $d_n s_{n+1}$ et $s_{n+1} d_n$ sont des projecteurs de C_n.

(2) On suppose toujours que C est scindé. Montrer que le complexe C est exact si et seulement si il existe $h_n : C_n \to C_{n-1}$ tels que $hd + dh = \mathrm{Id}$. On dit que les morphismes h sont des homotopies. Montrer que les applications h scindent C (c'est à dire dhd=d).

(3) On suppose que C est une suite exacte de A-modules libres **bornée supérieurement***, c'est à dire que $C_n = \{0\}$ pour $n \geq n_0$. Montrer que C est nécessairement scindé.*

(4) Trouver un contre-exemple si C n'est pas supposé supérieurement borné (on pourra prendre $C_n = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $d = *2$).

Solution 8. (1) Montrons que ds est un projecteur. On a $dsds = (dsd)s = ds$ car C est scindé. De même $sdsd = s(dsd) = sd$. Donc ds et sd sont des projecteurs.

(2) Supposons d'abord que l'on a des homotopies pour l'identité, c'est à dire $dh + hd = \mathrm{Id}$. Montrons que C est exact. Si $dx = 0$, alors $x = hd(x) + dh(x) = dh(x) \in \mathrm{im}(d)$. Réciproquement, supposons le complexe exact. Le complexe étant scindé, il existe des applications $s := s_n : C_n \to C_{n-1}$. On a alors $d(x - sd(x)) = d(x) - d(x) = 0$. Comme le complexe est exact, il existe y tel que $d(y) = x - sd(x)$. Mais $d(y) = dsd(y)$ donc $d(y) = x - sd(x) \in \mathrm{im}(ds)$. Comme ds est un projecteur on a

$$\begin{aligned} ds(d(y)) &= d(y) \\ ds(x) - dssd(x) &= x - sd(x) \end{aligned}$$

c'est à dire que pour tout x on a $ds(x) + sd(x) + dssd(x) = x$. Soit $h(x) = s(x) + ssd(x)$. Alors

$$dh + hd = ds(x) + dssd(x) + sd(x) + ssdd(x) = x$$

car $dd = 0$. En composant la relation $dh + hd = \mathrm{Id}$ par d on obtient $dhd = d$. Donc h scinde le complexe C. Et en particulier dh, hd sont des projecteurs.

(3) Quitte à changer les indices on peut se ramener à un complexe de la forme $\cdots \to C_1 \to C_0 \to 0$. Commençons par définir $s_0 : C_0 \to C_1$. Le module C_0 étant libre, il suffit de définir s_0 sur une base $(e_i^0)_{i\in I_0}$ de C_0 et de prolonger par linéarité. Par surjectivité, il suffit de choisir des éléments $x_i^1 \in C_1$ tels que $d(x_i^1) = e_i^0$. On a alors $d_1 s_0 d_1 = d_1$. Construisons $s_1 : C_1 \to C_2$. Soit $(e_1^1)_{i\in I_1}$ une base de C_1. On a $e_i^1 - s_0 d_1(e_i^1) \in \ker(d_0)$ par construction de s_0. Comme $\ker(d_0) = \mathrm{im}(d_1)$, il existe $x_i^2 \in C_2$ avec $d_2(x_i^2) = e_i^1 - s_0 d_1(e_i^1)$. On définit $s_1(e_i^1) = x_i^2$. Pour tout $x \in C_2$, on a $d(x) = \sum \lambda_i e_i^1$. on en déduit

$$d_2 s_1 d_2(x) = \sum \lambda_i d_2(x_i^2) = \sum \lambda_i e_i^1 - \sum \lambda_i s_0 d_1(e_i^1) = d_2(x) - s_0 d_1(d_2(x)) = d_2(x)$$

car $d_2 d_1 = 0$. On obtient de même, par récurrence, les autres $s_{j\geq 1}$.

(4) Considérons le complexe non borné

$$\ldots \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{*2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{*2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{*2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{*2} \ldots .$$

C'est bien un complexe car le multiplication par 4 est triviale dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Par ailleurs on a $\ker(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{*2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \{0, 2\} = \mathrm{im}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{*2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$. Donc ce complexe est exact. Montrons qu'il ne peut pas être scindé. Sinon il existerait une application linéaire $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ telle que $2x = 2(s(2x)) = 4s(x) = 0$ pour tout x; ce qui est absurde puisque $x \mapsto 2x$ n'est pas nul dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.