

Corrigé du TD d'algèbre et topologie – Feuille de TD 5 : Complexes dans les catégories abéliennes; objets injectifs et projectifs; foncteurs Tor et Ext.

Grégory Ginot

Dans les exercices suivants, $\mathcal{C}$ désigne une catégorie abélienne, A un anneau (non nécessairement commutatif) et k un corps de caractéristique 0.

Exercice 1. Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ et $A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C'$ deux complexes dans $\mathcal{C}$. Montrer que ces deux suites sont exactes si et seulement si $A \oplus A' \xrightarrow{f \oplus f'} B \oplus B' \xrightarrow{g \oplus g'} C \oplus C'$ est exacte.

Solution 1. Comme d'habitude, on note $p_A : A \oplus B \rightarrow A$, $p_B : A \oplus B \rightarrow B$ et $i_A : A \rightarrow A \oplus B$, $i_B : B \rightarrow A \oplus B$ les applications canoniques. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i_A} & A \oplus A' & \xrightarrow{p_{A'}} & A' \\
 f \downarrow & & \downarrow f \oplus f' & & \downarrow f' \\
 B & \xrightarrow{i_B} & B \oplus B' & \xrightarrow{p_{B'}} & B' \\
 g \downarrow & & \downarrow g \oplus g' & & \downarrow g' \\
 C & \xrightarrow{i_C} & C \oplus C' & \xrightarrow{p_{C'}} & C'
 \end{array}$$

qui est trivialement commutatif. Toutes les lignes sont exactes, ainsi que les colonnes de droite et gauche. De plus la colonne du milieu vérifie $(g \oplus g') \circ (f \oplus f') = g \circ f \oplus g' \circ f' = 0$; c'est donc un complexe. Le Lemme des 9 (voir la feuille de TD 2) assure que la colonne du milieu est exacte.

Passons à la réciproque. On suppose que $A \oplus A' \xrightarrow{f \oplus f'} B \oplus B' \xrightarrow{g \oplus g'} C \oplus C'$ est exacte. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 A \oplus A' & \xrightarrow{p_A} & A & \xrightarrow{i_A} & A \oplus A' \\
 f \oplus f' \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f \oplus f' \\
 B \oplus B' & \xrightarrow{p_B} & B & \xrightarrow{i_B} & B \oplus B' \\
 g \oplus g' \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow g \oplus g' \\
 C \oplus C' & \xrightarrow{p_C} & C & \xrightarrow{i_C} & C \oplus C'.
 \end{array}$$

Attention, les lignes ne sont pas exactes du tout. Pour simplifier la preuve, on raisonne avec des éléments. Si $x \in \ker(g)$, on a $i_C(g(x)) = g \oplus g'(i_B(x)) = 0$. Par exactitude, il existe $(a, a') \in A \oplus A'$ tel que $(f(a), f'(a')) = i_B(x)$. On compose à droite par p_B ce qui donne $f(a) = b$ d'où $\ker(g) \subset \text{im}(f)$. On sait déjà que $g \circ f = 0$ puisque la suite est un complexe. On a donc montré que $A \rightarrow B \rightarrow C$ est exacte. On obtient de même que $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ est exacte.

Remarque 1. Il n'est évidemment pas nécessaire de travailler avec des éléments (mais plus simple et licite d'après le Théorème de Mitchell). On peut par exemple remarquer (en travaillant un petit peu) que i_B induit un morphisme $\tilde{i}_B : \ker(g) \rightarrow \ker(g \oplus g') \cong \text{im}(f \oplus f')$ et que la composée $f \circ p_A \circ \tilde{i}_B : \ker(B) \rightarrow \text{im}(f)$ est un isomorphisme canonique. On peut aussi traiter la première partie en remarquant que la somme directe commute avec les limites projectives, donc les noyaux et inductives, donc aussi les conoyaux (voir l'exercice 2.(3)).

Exercice 2. Montrer que la catégorie $\mathbb{C}(\mathcal{C})$ des complexes sur $\mathcal{C}$ est canoniquement munie d'une structure abélienne.

Solution 2. La somme directe de complexes est définie par $(C^\bullet \oplus D^\bullet)^n = C^n \oplus D^n$. On prend $d_C \oplus d_D$ comme différentielle. Il est immédiat que l'on donne ainsi une structure de catégorie additive à $\mathbb{C}(\mathcal{C})$. On a déjà vu (voir par exemple le lemme du serpent) qu'en prenant $\ker(f^\bullet)^n = \ker(f^n)$, on obtient canoniquement un complexe et de même pour $\operatorname{coker}(f^\bullet)$. Il faut vérifier les propriétés universelles du noyau et du conoyau. Or si, $g \circ f = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $g^n \circ f^n = 0$. Ceci implique que g^n se factorise au travers de $\operatorname{coker}(f^n)$. On en déduit aisément que g se factorise uniquement au travers du conoyau. Enfin, l'isomorphisme entre image et coimage est vérifié pour tout n . Donc au niveau du complexe.

Exercice 3 (Exactitude). (1) Soit I une catégorie. Rappeler pourquoi $\varinjlim$ (resp. $\varprojlim$) est exact à droite (resp. à gauche). Montrer que $\varinjlim$ est exact si I est filtrant. En considérant $\varprojlim k[x]/(x^n)$, montrer que $\varprojlim$ n'est pas exact à droite en général.

(2) Montrer que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ est exact à gauche. Que dire de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-mod}$? En considérant la surjection canonique $k[x] \rightarrow k \rightarrow 0$, montrer que ces foncteurs ne sont pas exacts en général.

(3) Montrer que $\oplus$ est exact ainsi que le foncteur $\prod_{i \in I}$ (où I est un ensemble).

(4) Soit N un A -module. Montrer que le foncteur $N \otimes_A - : A\text{-mod} \rightarrow k\text{-mod}$ est exact à droite, mais pas à gauche en général.

Solution 3. Tout est plus ou moins dans le cours; en particulier les contre-exemples sont traités pages 52, 53 du poly.

(1) Les isomorphismes naturels $\varprojlim \varprojlim \cong \varprojlim \varprojlim$ assure que les limites projectives commutent entre elles. Elles sont donc exactes à gauche par définition. Le même argument donne $\varinjlim$ est exacte à droite. Si I est filtrant, le foncteur $\varinjlim$ commute avec les limites projectives finies. Il est donc en plus exact à gauche, donc exact.

(2) L'isomorphisme canonique $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \varprojlim(\alpha)) \cong \varprojlim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \alpha)$ donne que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ est exact à gauche. Duale, on obtient que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$ est exact à gauche en tant que foncteur $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$.

(3) La somme directe est isomorphe à la fois à un produit et un coproduit; elle est donc exacte à gauche et à droite. En ce qui concerne le produit (qui est une limite projective), il est exact à gauche. Il est donc suffisant de montrer que si $Z_i \xrightarrow{g_i} X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \rightarrow 0$ sont des suites exactes, alors

$$\prod Z_i \xrightarrow{\prod g_i} \prod X_i \xrightarrow{\prod f_i} \prod Y_i \rightarrow 0$$

est une suite exacte (c'est à dire de montrer son exactitude à droite). Montrons la surjectivité de $\prod f_i$. Si la suite $(y_i)_{i \in I}$ est un élément de $\prod Y_i$, alors la suite $(x_i)_{i \in I}$ où pour tout i , $f_i(x_i) = y_i$ (un tel x_i existe par surjectivité de chaque f_i), est un antécédent de $(y_i)_{i \in I}$ par $\prod f_i$. On montre de même que $\ker \prod f_i \cong \operatorname{im} \prod g_i$.

(4) On a vu dans la feuille de TD 2 que $N \otimes_A -$ est un adjoint à gauche. Les isomorphismes

$$\operatorname{Hom}_k(N \otimes_A \varinjlim \alpha, Y) \cong \operatorname{Hom}_A(\varinjlim \alpha, \operatorname{Hom}_k(N, Y)) \cong \varprojlim \operatorname{Hom}_A(\alpha, \operatorname{Hom}_k(N, Y)) \cong \varprojlim \operatorname{Hom}_A(N \otimes_A \alpha, Y)$$

assurent que $N \otimes_A -$ est exact à droite. Notons que cette preuve marche avec tout foncteur admettant un adjoint à droite.

Exercice 4 (cône d'un morphisme). Soit $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathbb{C}(\mathcal{C})$ deux complexes et $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ un morphisme de complexes. On définit le cône de f par $M^n(f) = X^{n+1} \oplus Y^n$. Soit $d_f : M^\bullet(f) \rightarrow M^{\bullet+1}(f)$ définie par la matrice $\begin{bmatrix} -d_X & 0 \\ f^\bullet & d_Y \end{bmatrix}$.

- (1) Montrer que $(M(f), d_f)$ est un objet de $\mathbb{C}(\mathcal{C})$, c'est à dire un complexe.
- (2) Montrer que $M(f)$ ne dépend (à isomorphisme près) que de la classe de f dans $K(\mathcal{C})$, la catégorie homotopique de $\mathcal{C}$.
- (3) Construire une suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow Y^\bullet \rightarrow M^\bullet(f) \rightarrow X^\bullet[1] \rightarrow 0.$$

- (4) Identifier les morphismes $H^\bullet(X) \rightarrow H^\bullet(Y)$ dans la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de la question (3). En déduire que f est un quasi-isomorphisme si et seulement si $H^\bullet(M(f)) = 0$.

Solution 4. (1) On a $(d_f \circ d_f)(x, y) = d_f(-d_X(x), d_Y(y) + f(x)) = d_X^2(x), d_Y^2(y) - f(d_X(x)) + d_Y f(x) = (0, 0)$ car d_X, d_Y sont de carrés nuls et f est un morphisme de complexes.

- (2) Soit $f - f' = sd_X + d_Y s$ avec $s : X^\bullet \rightarrow Y^{\bullet-1}$. On vérifie aisément que le morphisme $h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s^\bullet & 1 \end{bmatrix}$ est un morphisme de $C(f) \rightarrow C(f')$. Il est de plus inversible; d'inverse $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s^\bullet & 1 \end{bmatrix}$.

- (3) On vérifie que $i_Y : Y^\bullet \rightarrow X^{\bullet+1} \oplus Y^\bullet$ est un morphisme de complexes, de même que $p_X : X^{\bullet+1} \oplus Y^\bullet \rightarrow X^{\bullet+1} = X[1]^\bullet$ (rappelons que la différentielle sur le complexe $X[1]$ est $-d_X$). De plus $p_X i_Y = 0$, $p_X i_X = \text{Id}$ et le noyau de p_X est $\text{im}(i_Y)$ d'après l'équation $i_X p_X + i_Y p_Y = \text{Id}$. On en conclut que la suite

$$0 \rightarrow Y^\bullet \xrightarrow{i_Y} M^\bullet(f) \xrightarrow{p_X} X^\bullet[1] \rightarrow 0$$

est exacte.

- (4) Il suffit de reprendre la construction du morphisme de connexion δ dans le lemme du serpent. En effet, d'après le cours, la longue suite exacte en homologie s'écrit

$$\dots H^n(Y) \rightarrow H^n(M(f)) \rightarrow H^n(X[1]) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(Y) \rightarrow \dots$$

avec $H^n(X[1]) = H^{n+1}(X)$. Le morphisme δ est le morphisme $\ker(X^{n+1} \xrightarrow{d_X} X^{n+2}) \rightarrow \text{coker}(Y^n \xrightarrow{d_Y} Y^{n+1})$ donné par le lemme du serpent, voir le cours et le TD 2. Précisément, étant donné $x \in X^{n+1}$ avec $d_X(x) = 0$, $\delta(x)$ est obtenu en prenant un antécédent (quelconque) de x par p_X , c'est à dire $h \in M(f)^n$ avec $p_X(h) = x$. Puis on prend $z \in Y^{n+1}$ tel que $i_Y(y) = d_f(h)$. On a alors $\delta(x) = [y]$, où $[y]$ est l'image de y par l'application canonique vers le conoyau. Dans le cas présent, on peut choisir $h = (x, 0)$. On obtient alors $d_f(h) = (0, f(y))$. On conclut que l'application $H^n(X[1]) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(Y)$ induite dans la longue suite exacte est l'application $H^{n+1}(f)$ induite par f via l'isomorphisme $H^n(X[1]) = H^{n+1}(X)$. Mais f est un quasi-isomorphisme si et seulement si $H^\bullet(f)$ est un isomorphisme. D'après la suite exacte longue, si $H^\bullet(f)$ est un isomorphisme alors, $H^\bullet(M(f)) \rightarrow H^{\bullet+1}(X)$ est l'application nulle de même que $H^\bullet(Y) \rightarrow H^\bullet(M(f))$ ce qui par exactitude force $H^\bullet(M(f)) = 0$. réciproquement, si $H^\bullet(M(f)) = 0$, la suite exacte implique immédiatement que $H^\bullet(f)$ est un isomorphisme puisqu'elle se réduit à des suites exactes $0 \rightarrow H^\bullet(X) \rightarrow H^\bullet(Y) \rightarrow 0$.

Exercice 5. Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert.

(1) On note $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I . Soit $C^\bullet$ le complexe

$$0 \longrightarrow C^\infty(I) \xrightarrow{d} C^\infty(I) \longrightarrow 0$$

où $d(f) = f'$. Calculer les modules de cohomologie $H^0(C^\bullet)$ et $H^1(C^\bullet)$.

(2) On note $C_c^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I à support compact. (On rappelle que le support d'une fonction $f \in C^\infty(I)$ est l'adhérence dans I de l'ensemble $\{x \in I, f(x) \neq 0\}$.) Soit $C_c^\bullet$ le complexe

$$0 \longrightarrow C_c^\infty(I) \xrightarrow{d_c} C_c^\infty(I) \longrightarrow 0$$

où $d_c(f) = f'$. Calculer les modules de cohomologie $H^0(C_c^\bullet)$ et $H^1(C_c^\bullet)$.

Solution 5. (1) On a $H^0(C^\bullet) = \ker(d)$ et $H^1(C^\bullet) = \operatorname{coker}(d)$. On sait que $d(f) = f' = 0$ si et seulement si f' est constante. D'où $H^0(C^\bullet) = \mathbb{R}$, donnée par les fonctions constantes. De plus une fonction C^∞ admet toujours une primitive C^∞ . Donc d est surjective et $H^1(C^\bullet) = 0$.

(2) On note $I =]a, b[$. On a $H^0(C_c^\bullet) = \ker d_c$ et $H^1(C_c^\bullet) = \operatorname{coker} d_c$. Si $d_c f = 0$ alors f est constante, mais ici f est à support compact $K \subset [\alpha, \beta] \subsetneq]a, b[$ (c'est à dire $f \equiv 0$ sur $]a, \alpha] \cup [\beta, b[$). Une fonction constante f n'est à support compact que si $f = 0$. D'où $H^0(C_c^\bullet) = 0$.

Intéressons-nous à $H^1(C_c^\bullet)$. Si $g \in C_c^\infty(I)$ est à support compact $K \subset [\alpha, \beta]$, une primitive de g est $f(x) = \int_\alpha^x g(t)dt$. Le problème est de déterminer quand cette primitive est à support compact. On a $f \equiv 0$ sur $]a, \alpha]$ et $f \equiv \int_\alpha^\beta g(t)dt = \int_a^{b'} g(t)dt$ pour tout $b' \in [\beta, b[$; on en déduit que f est à support compact, c'est à dire $g \in \operatorname{im} d_c$, si et seulement si $\int_a^b g(t)dt = 0$. Il en résulte que $H^1(C_c^\bullet) \simeq \mathbb{R}$ défini par $\bar{g} \mapsto \int_a^b g(t)dt$.

Exercice 6 (Lemme de Baer). (1) Soit E un A -module injectif. Montrer que E vérifie la condition suivante :

pour tout idéal I de A , l'application $\operatorname{Hom}_A(A, E) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(I, E)$ est surjective. (0.1)

(2) Soit E un A -module vérifiant la condition (0.1). On se donne un diagramme $0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N$. On

note X l'ensemble des couples (P, h_P) où P est un sous-module de N vérifiant $f(N') \subset P \subset N$ et $h_P : P \rightarrow E$ est une extension de g , c'est à dire $g = h_P \circ f$. On dit que $(P, h_P) \leq (Q, h_Q)$ si $P \subset Q$ et $h_Q/P = h_P$. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre partiel.

(3) Montrer qu'un A -module E est injectif si et seulement si il satisfait à la condition (0.1) (on pourra utiliser le (2) et appliquer le lemme de Zorn).

Solution 6. (1) Si E est injectif, alors comme I s'injecte dans A , on a que tout morphisme $I \rightarrow E$ se prolonge en un morphisme $A \rightarrow E$ par définition des module injectifs. Ce qui donne la surjectivité de $\operatorname{Hom}_A(A, E) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(I, E)$.

(2) On considère le diagramme $0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N$. L'ensemble des couples (P, h_P) où P est un sous-

module de N vérifiant $f(N') \subset P \subset N$ et $h_P : P \rightarrow E$ est une extension de g est muni de la relation d'ordre $(P, h_P) \leq (Q, h_Q)$ si $P \subset Q$ et $h_Q/P = h_P$. On a bien $(P, h_P) \leq (P, h_P)$, si $P \subset Q \subset R$ est une suite croissante d'extension, alors, R est une extension de P . De plus si $(P, h_P) \leq (Q, h_Q)$ et $(Q, h_Q) \leq (P, h_P)$ alors $P = Q$. La relation est donc bien une relation d'ordre.

- (3) Montrons que $\leq$ vérifie les hypothèses du Lemme de Zorn; c'est à dire que toute sous-famille totalement ordonnée admet un élément maximal. Soit $(P_i, h_{P_i})_{i \in \mathfrak{S}}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de X . (Pour tout $i, j \in \mathfrak{S}$ on a $(P_i, h_{P_i}) \preceq (P_j, h_{P_j})$ ou $(P_j, h_{P_j}) \preceq (P_i, h_{P_i})$.) On pose $P = \bigcup_{i \in \mathfrak{S}} P_i$ et on définit $h : P \rightarrow E$ par $h(x) = h_{P_i}(x)$ si $x \in P_i$ de sorte que $(P, h_P) \in X$. D'après le lemme de Zorn, on a donc que X admet un

Supposons, par l'absurde, que $M \subsetneq N$. Il existe donc $x \in N \setminus M$. Alors $P = M + A.x$ est un sous module de N qui contient strictement M . On définit $I = (M : x) = \{a \in A, a.x \in M\}$ qui est un idéal. Soit $\gamma : I \rightarrow E$, l'application $\gamma(a) = h_M(a.x)$. D'après l'hypothèse de l'énoncé il existe alors $\varphi : A \rightarrow E$ tel que $\varphi|_I = \gamma$.

On définit alors $h_P : P \rightarrow E$ par $h_P(y + a.x) = h_M(y) + \varphi(a)$ (où $y \in M$). Cette définition est consistante car si $y + a.x = y' + a'.x$ alors $(a' - a).x = y - y' \in M$ donc $a' - a \in I$ et $\varphi(a' - a) = \gamma(a' - a) = h_M((a' - a).x) = h_M(y - y')$ d'où $h_M(y) + \varphi(a) = h_M(y') + \varphi(a')$.

On a ainsi obtenu un élément (P, h_P) tel que $(M, h_M) \prec (P, h_P)$ ce qui est impossible car (M, h_M) est maximal. On a donc $M = N$ et un morphisme $h : N \rightarrow E$ tel que $h \circ f = g$. Ceci étant vrai pour tout diagramme $0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N$ on a bien montré que E est injectif.

$$\begin{array}{c} g \downarrow \\ E \end{array}$$

Exercice 7 (Les $\mathbb{Z}$ -modules $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$). Soit M un A -module. On note $M^\vee$ le A -module $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

- (1) Montrer que $\mathbb{Q}$ est injectif et plat (on pourra utiliser le Lemme de Baer).
- (2) Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas projectif, a fortiori non libre.
- (3) Montrer que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est injectif mais pas plat.
- (4) i) Montrer que l'application naturelle $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N^\vee, M^\vee)$ est injective.
 ii) Montrer que si N est projectif dans $\mathbf{mod} - A$, alors $N^\vee$ est injectif dans $A\text{-}\mathbf{mod}$.
 iii) Montrer que pour tout A -module M , il existe un injectif I et un monomorphisme $M \rightarrow I$.

Solution 7. (1) Pour montrer l'injectivité de $\mathbb{Q}$, on utilise le Lemme de Baer (Exercice 0.1 ci dessus). Il suffit donc de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'application $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ est surjective. Soit donc $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ et posons $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ définie par $g(k) = k \frac{f(n)}{n}$. Clairement $g|_{n\mathbb{Z}} = f$. Notons que cette preuve marche encore avec tout $\mathbb{Z}$ -module M dans lequel on peut diviser par tout entier.

La platitude est plus délicate. l'idée est d'utiliser que le produit tensoriel se comporte bien vis à vis de la localisation par rapport à une partie multiplicative. On va en fait redémontrer ce qui nous sert.

Si M est un $\mathbb{Z}$ -module, on note $S^{-1}M$ le $\mathbb{Z}$ -module formé des éléments $\frac{x}{n}$ avec $x \in M$ et $n \in S$ et dans lequel $\frac{x}{n} = \frac{y}{m}$ si et seulement si $\exists k \in S : k(mx - ny) = 0$ (c'est à dire si et seulement si $mx - ny$ est un élément de torsion de M). En particulier $\frac{x}{n} = 0 \left(= \frac{0}{1} \right)$ si et seulement si x est un élément de torsion. Remarquons que $\mathbb{Q} = S^{-1}\mathbb{Z}$.

Passons à l'étude de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$. Déjà tout élément de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ peut s'écrire $\frac{1}{n} \otimes x$ avec $x \in M$, car $\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{b_i} \otimes x_i = \frac{1}{b_1 \dots b_k} \otimes \left(\sum_{i=1}^k b_1 \dots b_{i-1} a_i b_{i+1} \dots b_k x_i \right)$. De plus si x est un élément de torsion alors $\frac{1}{n} \otimes x = 0$ car $\exists k \in \mathbb{Z}^* : k.x = 0$ et alors $\frac{1}{n} \otimes x = \frac{1}{nk} \otimes k.x = 0$. On a une application

naturelle surjective $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \rightarrow S^{-1}M$ définie par $\frac{1}{n} \otimes x \mapsto \frac{x}{n}$. De plus si $\frac{x}{n} = 0$ alors x est de torsion, d'après (a), et alors $\frac{1}{n} \otimes x = 0$, d'après (b), ce qui montre qu'on a un isomorphisme $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{\sim} S^{-1}M$. On retiendra en particulier que $\frac{1}{n} \otimes x = 0$ si et seulement si x est un élément de torsion qui est la propriété dont on a besoin.

Montrons enfin que $\mathbb{Q}$ est plat. Soit $M' \xrightarrow{f} M$ une application injective ; on veut montrer que l'application $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M' \xrightarrow{\text{Id} \otimes f} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ est également injective. Si $(\text{Id} \otimes f) \left(\frac{1}{n} \otimes x \right) = \frac{1}{n} \otimes f(x) = 0$ alors $f(x)$ est un élément de torsion (avec $k.x = 0$), mais alors $f(k.x) = k.f(x) = 0$ donc $k.x = 0$ car f est injective, donc x est aussi un élément de torsion ; on a donc $\frac{1}{n} \otimes x = 0$ ce qui montre bien l'injectivité de $\text{Id} \otimes f$.

- (2) Montrons maintenant que $\mathbb{Q}$ n'est pas projectif. S'il était projectif alors toute surjection $f : M \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0$ serait scindée en vertu du diagramme

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q} \longrightarrow 0 \\ & \nearrow s & \parallel \\ & & \mathbb{Q} \end{array}$$

Considérons l'application surjective $g : \bigoplus_{\mathbb{N}^*} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^*)} \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par $g((n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{n_k}{k}$; cette somme est bien convergente puisqu'on ne considère que des suites avec un nombre fini de n_k non nuls.. Si g admet une section $s : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^*)}$ alors on doit avoir pour tout $n \in \mathbb{N}^* : s(1) = ns(1/n)$, d'où $s(1/n) = s(1)/n$. Or les coordonnées de $s(1)$ sont des entiers fixés non tous nuls, donc pour $n \gg 0 : s(1/n) \notin \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^*)}$ ce qui est impossible.

- (3) L'injectivité de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ se fait exactement comme pour $\mathbb{Q}$ en (1). Montrons que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ n'est pas plat. Considérons l'application $f : \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}$ qui est injective. L'application $f \otimes \text{Id} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ n'est autre que l'application $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui n'est pas injective car $f(1/n) = 1 = 0$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

- (4) i) L'application naturelle $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N^{\vee}, M^{\vee})$ est l'application qui envoie $f : M \rightarrow N$ sur l'application qui à $\phi : N \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ associe $\phi \circ f : M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. C'est évidemment un morphisme de $\mathbb{Z}$ -modules. Supposons que, quel que soit $\phi : N \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on ait $\phi \circ f = 0$. Il nous suffit de montrer que f est nulle pour conclure. Soit $x \in \text{im}(f)$. On note $\mathbb{Z}x \subset N$ le sous-groupe abélien engendré par x . Si x n'est pas de torsion on peut définir $\psi : \mathbb{Z}x \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par la formule $\psi(x) = 1/2$. Si x est de torsion, alors $\mathbb{Z}x$ est un groupe cyclique de la forme $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. On peut alors définir $\psi(x) = 1/m$ qui a bien du sens puisque $\psi(mx) = m/m = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Dans tous les cas, on a pu définir $\psi : \mathbb{Z}x \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Z}x \hookrightarrow N$ et que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est injectif, alors l'application ψ se prolonge à N tout entier. En particulier c'est une application non nulle en $x \in \text{im}(f)$ (sauf si x est de 1-torsion, c'est à dire $x = 0$). Il en résulte que $\psi \circ f$ est également non nulle sauf si $\text{im}(f) = \{0\}$. Conclusion : l'application $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N^{\vee}, M^{\vee})$ est injective.

ii) On utilise l'isomorphisme naturel

$$\text{Hom}_A(L, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \text{Hom}_A(N, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})).$$

Si N est projectif, alors le foncteur $\text{Hom}_A(N, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$ est exact comme composée de foncteurs exacts. Donc le foncteur $\text{Hom}_A(L, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$ qui lui est isomorphe aussi.

- iii) L'idée est d'utiliser la question ii) et le morphisme canonique $M \rightarrow M^{\vee\vee}$ donné par $m \mapsto ((f : M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \mapsto f(m) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Cette application est injective par un raisonnement analogue à celui de i). Maintenant, on sait que tout module N est le conoyau d'un

module projectif : en effet prenons $P_N := \bigoplus_{n \in N} A = A^{(N)}$, c'est à dire les suites indexées par N nulles sauf en un nombre fini de points d'éléments de A . L'application $(x_n) \in A^{(N)} \mapsto \sum x_n \cdot n \in N$ est clairement un épimorphisme de A -module. De plus P_N est libre, donc projectif (voir la question (1) de l'exercice 8). Appliquons ceci à $M^\vee$. Il existe $P \rightarrow M^\vee \rightarrow 0$ avec P projectif. On a alors $0 \rightarrow M^{\vee\vee} \rightarrow P^\vee$ puisque $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est exact (car $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est injectif). D'après ii), $P^\vee$ est injectif et on a, par composition, un morphisme injectif $M \rightarrow P^\vee$.

Remarque 2. Dans la question (4) on ne peut pas remplacer $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par n'importe quel module injectif. En effet, pour faire marcher le point i) et l'injectivité de $M \rightarrow M^{\vee\vee}$ on utilise que le module $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ admet des éléments de torsion de tout ordre.

Exercice 8 (Platitude dans les A -modules). (1) *Montrer qu'un A -module libre est projectif et plat.*

(2) *Soit A un anneau et E un A -module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (a) *E est projectif,*
- (b) *toute suite exacte $0 \rightarrow M' \rightarrow M \xrightarrow{\pi} E \rightarrow 0$ est scindée,*
- (c) *Il existe un A -module M' tel que $M' \oplus E$ est libre.*

(3) *Soit $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules. Montrer que si E' et E'' sont projectifs alors E l'est aussi.*

(4) *Montrer qu'un A -module projectif est plat.*

(5) *Montrer que le produit tensoriel de deux modules projectifs est projectif.*

Solution 8. (1) Si $M \cong \bigoplus_I A$, on a des isomorphismes naturels

$$\text{Hom}_A(M, N) \cong \text{Hom}_A\left(\bigoplus_I A, N\right) \cong \bigoplus_I \text{Hom}_A(A, N) \cong \bigoplus_I N.$$

Mais comme le foncteur $\bigoplus_I -$ est exact, il en est de même pour $\text{Hom}_A(M, -)$; d'où M est projectif. Bien sûr on peut aussi montrer directement la propriété de factorisation des projectifs.

C'est d'ailleurs utile de savoir le faire : soit $M = A^{(I)}$ un module libre et $(e_i)_{i \in I}$ la base canonique $A^{(I)}$
 $\downarrow g$
 de M . Considérons le diagramme suivant : $N \xrightarrow{f} N'' \rightarrow 0$; pour définir un morphisme $h : A^{(I)} \rightarrow N$ il suffit de déterminer les images des éléments de la base ; pour avoir $g = h \circ f$ il suffit alors de prendre pour $h(e_i)$ un élément de $f^{-1}(g(e_i))$, ce qui montre que $A^{(I)}$ est projectif.

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \text{Id}_E \end{array}$$

(2) (a) $\Rightarrow$ (b) Considérons le diagramme : $M \xrightarrow{\pi} E \rightarrow 0$; comme E est projectif il existe une application $s : E \rightarrow M$ telle que $\text{Id}_E = \pi \circ s$; l'application s est donc une section de π ce qui montre que la suite exacte $0 \rightarrow M' \rightarrow M \xrightarrow{\pi} E \rightarrow 0$ est scindée.

(b) $\Rightarrow$ (c) Considérons le module libre $M = A^{(E)}$ muni de la base canonique $(e_x)_{x \in E}$ et $\pi : M \rightarrow E$ défini par $\pi(e_x) = x$. Par construction π est surjectif. Notons M' le noyau de π de sorte qu'on a une suite exacte $0 \rightarrow M' \rightarrow M \xrightarrow{\pi} E \rightarrow 0$. D'après (b) cette suite est scindée, ce qui signifie que $M' \oplus E \simeq M$ donc $M' \oplus E$ est libre.

(c) $\Rightarrow$ (a) Soit M' un module tel que $M' \oplus E$ est libre. À partir du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & & M' \oplus E \\ \downarrow g & & \downarrow (0,g) \\ N \xrightarrow{f} N'' \rightarrow 0 & \text{on construit le diagramme} & N \xrightarrow{f} N'' \rightarrow 0 \end{array}$$

Comme $M' \oplus E$ est libre il existe une application $h = (h_1, h_2) : M' \oplus E \rightarrow N$ telle que $(0, g) = f \circ (h_1, h_2)$; on a alors une application $h_1 : E \rightarrow N$ telle que $g = f \circ h_1$.

(3) D'après (b) la suite exacte $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$ est scindée, car E'' est projectif, d'où $E \simeq E' \oplus E''$. Or par (c), il existe F'', F' tels que $E'' \oplus F''$ et $E' \oplus F'$ soient libres. En particulier $E \oplus (F' \oplus F'')$ est libre et par (c) E est projectif.

(4) Il suffit de montrer que pour toute injection $0 \rightarrow N \rightarrow M$, l'application $P \otimes_A N \rightarrow P \otimes_A M$ est encore injective (puisque le produit tensoriel est exact à droite). Soit F tel que $P \oplus F \simeq A^{(I)}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} P \otimes_A N & \longrightarrow & (P \otimes_A N) \oplus (F \otimes_A N) & \xrightarrow{\sim} & (P \oplus F) \otimes_A N & \xrightarrow{\sim} & N^{(I)} \\ \downarrow & & & & & & \downarrow \\ P \otimes_A M & \longrightarrow & (P \otimes_A M) \oplus (F \otimes_A M) & \xrightarrow{\sim} & (P \oplus F) \otimes_A M & \xrightarrow{\sim} & M^{(I)} \end{array}$$

dans lequel toutes les flèches horizontales sont injectives ainsi que la flèche verticale de droite (puisque la somme directe est exacte). On en déduit que la composée de $P \otimes_A N \rightarrow P \otimes_A M$ avec la flèche du bas est injective. Il en découle que $P \otimes_A N \rightarrow P \otimes_A M$ est injective.

(5) Soient E_1 et E_2 des modules projectifs et M'_1 et M'_2 des modules tels que $M_1 = M'_1 \oplus E_1$ et $M_2 = M'_2 \oplus E_2$ soient libres. On sait alors que

$$M_1 \otimes M_2 = (M'_1 \otimes M'_2 \oplus M'_1 \otimes E_2 \oplus E_1 \otimes M'_2) \oplus E_1 \otimes E_2$$

est libre, donc $E_1 \otimes E_2$ est projectif.

Exercice 9 (Foncteur Tor). Soient A un anneau et I et J deux idéaux de A .

- (1) Montrer que $\text{Tor}_1^A(A, A/J) = 0$.
- (2) Montrer que $\text{Tor}_1^A(A/I, A/J) \simeq \frac{I \cap J}{IJ}$.
- (3) Montrer que $\text{Tor}_\bullet^A(\oplus_{i \in I} M_i, N) \cong \oplus_{i \in I} \text{Tor}_\bullet^A(M_i, N)$

Rappelons que le foncteur $\text{Tor}_i^A(M, N)$ est le foncteur dérivé à gauche du produit tensoriel (qui est exact à droite). Il se calcule en prenant une résolution projective $\dots \xrightarrow{d} P^{-2} \xrightarrow{d} P^{-1} \xrightarrow{d} P^0$ de M (c'est à dire que l'on a une flèche $P^0 \rightarrow M \rightarrow 0$ telle que $\dots \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^0 \rightarrow M \rightarrow 0$ est acyclique; en d'autres termes $H^\bullet(P^\bullet) = M$ concentré en degré 0). Précisément, $\text{Tor}_i^A(M, N) = H^{-i}(P^\bullet \otimes_A N, d \otimes_A \text{Id})$. Le calcul des foncteurs $\text{Tor}_i^A(M, N)$ ne change pas si on prend une résolution de N plutôt que de M . Par définition, on a toujours $\text{Tor}_0^A(M, N) = M \otimes_A N$.

Par ailleurs, une propriété fondamentale est que si $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de R -modules, alors on a une suite exacte longue en cohomologie :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Tor}_i^R(M, A) \rightarrow \text{Tor}_i^R(M, B) \rightarrow \text{Tor}_i^R(M, C) \rightarrow \text{Tor}_{i-1}^R(M, A) \rightarrow \text{Tor}_{i-1}^R(M, B) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \text{Tor}_1^R(M, C) \rightarrow \text{Tor}_0^R(M, A) \rightarrow \text{Tor}_0^R(M, B) \rightarrow \text{Tor}_0^R(M, C) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Solution 9. (1) Pour tout A -module M libre, projectif ou plat, le foncteur $M \otimes_A \cdot$ est exact, donc les foncteurs dérivés $\text{Tor}_1^A(M, \cdot)$ sont nuls. Comme A est lui-même libre (de rang 1), on a $\text{Tor}_1^A(A, A/J) = 0$. Bien entendu on peut aussi calculer ces foncteurs en prenant une résolution projective de A . Ceci est donné par A concentré en degré 0 puisque A est lui même projectif. On retrouve immédiatement que $\text{Tor}_i^A(A, A/J) = H^{-i}(\dots 0 \otimes A/J \rightarrow 0 \otimes A/J \rightarrow A \otimes A/J) = 0$ si $j \neq 0$ et A/J pour $j = 0$. Remarquons, que le module A/J pourrait être remplacé par n'importe quel A -module M dans cette question.

(2) On va utiliser la longue suite exacte en homologie associé à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$$

On en déduit la suite exacte longue :

$$\mathrm{Tor}_1^A(A, A/J) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) \longrightarrow I \otimes_A (A/J) \xrightarrow{i \otimes \mathrm{Id}_J} A \otimes_A (A/J) \xrightarrow{\pi \otimes \mathrm{Id}_J} (A/I) \otimes_A (A/J) \longrightarrow 0.$$

Or $\mathrm{Tor}_1^A(A, A/J) = 0$ et $A \otimes_A (A/J) \simeq A/J$. Donc $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) = \ker(i \otimes \mathrm{Id}_J)$. Il nous reste à identifier $I \otimes_A (A/J)$ et le morphisme $i \otimes \mathrm{Id}_J$. A cette fin, on utilise l'autre suite exacte courte

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/J \longrightarrow 0 \text{ qu'on tensorise par } I \text{ à gauche. On obtient la suite exacte}$$

$$I \otimes_A J \xrightarrow{\mathrm{Id}_I \otimes i} I \otimes_A A \xrightarrow{\mathrm{Id}_I \otimes \pi} I \otimes_A (A/J) \longrightarrow 0 \text{ (qui correspond à la partie “Tor}_0^A(-, -)” \text{ de la suite exacte longue). On rappelle l'isomorphisme : } I \otimes_A A \xrightarrow{\sim} I \text{ défini par } x \otimes y = xy \otimes 1 \mapsto xy.$$

On en déduit que la suite exacte précédente est isomorphe à : $I \otimes_A J \xrightarrow{\varphi} I \xrightarrow{\psi} I \otimes_A (A/J) \longrightarrow 0$, où l'on a $\varphi(x \otimes y) = xy$ et $\psi(z) = z \otimes \bar{1}$. On en déduit que $I \otimes_A (A/J)$ est isomorphe à $I/\mathrm{im} \varphi = I/IJ$. De plus $i \otimes \mathrm{Id}_J$ s'identifie ainsi au morphisme $\varphi : I/IJ \rightarrow A/J$ défini par $\varphi(x \pmod{IJ}) = x \pmod{J}$. il en découle que $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) \cong \ker \varphi = \{x \pmod{IJ}, x \in I \text{ et } x = 0 \pmod{J}\} = \{x \pmod{IJ}, x \in I \text{ et } x \in J\} = (I \cap J)/IJ$.

(3) Soit $P_N^\bullet$ une résolution de N . On a $(\oplus_{i \in I} M_i) \otimes_A P_N^\bullet \cong \oplus_{i \in I} (M_i \otimes_A P_N^\bullet)$. Comme la somme directe est un foncteur exact, elle commute avec les noyaux et conoyaux ; donc avec les foncteurs de cohomologie. On en déduit $H^i((\oplus_{i \in I} M_i) \otimes_A P_N^\bullet) \cong \oplus_{i \in I} H^i(M_i \otimes_A P_N^\bullet)$. Bien entendu on aurait pu, de manière équivalente, prendre des résolutions $P_{M_i}^\bullet$ de M et utiliser l'exactitude de la somme directe pour remarquer que $\oplus_{i \in I} P_{M_i}^\bullet$ est une résolution de $\oplus_{i \in I} M_i$.

Remarque 3. Dans la question(3), on a utilisé la commutation de la somme directe avec noyau conoyau (et donc image); en d'autres termes son exactitude. On a laissé au lecteur le soin de vérifier que ces propriétés entraînent bien la commutation avec les foncteurs de cohomologie (définis comme $\mathrm{coker}(\mathrm{im} \rightarrow \ker)$). Une alternative à cette démonstration est la suivante. Soit $P \rightarrow N \rightarrow 0$ un épimorphisme d'un projectif sur N (ce qui existe d'après le cours ou la solution de l'exercice 7.4 iii)). On a alors une suite exacte courte $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0$ où $K = \ker(P \rightarrow N)$. On en déduit une suite exacte longue en cohomologie

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \mathrm{Tor}_A^{n+1}(\oplus M_i, P) \rightarrow \mathrm{Tor}_A^{n+1}(\oplus M_i, N) \rightarrow \mathrm{Tor}_A^n(\oplus M_i, K) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \mathrm{Tor}_A^1(\oplus M_i, P) \rightarrow \mathrm{Tor}_A^1(\oplus M_i, N) \rightarrow (\oplus M_i) \otimes_A K \rightarrow (\oplus M_i) \otimes_A P \rightarrow (\oplus M_i) \otimes_A N \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Or $\mathrm{Tor}_{i>0}^A(\oplus M_i, P) = 0$ puisque P est projectif. De plus $(\oplus M_i) \otimes_A L \cong \oplus (M_i \otimes_A L)$ pour tout module projectif L . Il suit que $\mathrm{Tor}_A^1(\oplus M_i, N) = \ker((\oplus M_i) \otimes_A K \rightarrow (\oplus M_i) \otimes_A P) \cong \oplus \ker(M_i \otimes_A P \rightarrow M_i \otimes_A K)$ par exactitude de la somme directe. On a donc obtenu le résultat pour $\mathrm{Tor}_1(\oplus M_i, N)$ et pour $\mathrm{Tor}_0^A(\oplus M_i, L) = (\oplus M_i) \otimes_A L$ (ce qui était déjà connu) et pour tout module N . On peut alors démontrer la propriété (pour tous les modules N et M_i) par récurrence; en effet la suite exacte longue donne, $\mathrm{Tor}_{n+1}^A(\oplus M_i, N) \cong \mathrm{Tor}_n^A(\oplus M_i, K)$ pour tout $n \geq 1$. L'hypothèse de récurrence assure alors que $\mathrm{Tor}_n^A(\oplus M_i, K) \cong \oplus \mathrm{Tor}_n^A(M_i, K) \cong \oplus \mathrm{Tor}_{n+1}^A(M_i, N)$ et tous ces isomorphismes sont naturels.

Il n'est pas inutile de retenir l'isomorphisme,

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^A(L, N) \cong \mathrm{Tor}_n^A(L, K)$$

valable pour tous modules L, N et K tels qu'il existe une suite exacte $0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow L \rightarrow 0$ où le terme du milieu est projectif. Il permet de faire des raisonnements par récurrence.

Exercice 10 (Foncteur Ext). Soit A un anneau, M un A -module et $x \in A$ non diviseur de zéro.

- (1) Calculer $\text{Ext}_A^1(A/(x), M)$.
- (2) En particulier calculer $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.
- (3) Montrer que $\text{Ext}_A^\bullet(M, \prod_{i \in I} N_i) \cong \prod_{i \in I} \text{Ext}_A^\bullet(M, N_i)$ et $\text{Ext}_A^\bullet(\oplus_{i \in I} M_i, N) \cong \prod_{i \in I} \text{Ext}_A^\bullet(M_i, N)$.
- (4) Montrer qu'un groupe abélien de type fini G est libre si et seulement si $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G, \mathbb{Z}) = 0$.

Les modules de cohomologie $\text{Ext}_A^i(M, N)$ peuvent être définis de deux manières différentes. D'une part, le foncteur $\text{Ext}_A^i(M, N)$ (vu comme foncteur en la variable M) est l'image en M du $i^{\text{ème}}$ foncteur dérivé droit de $\text{Hom}_A(-, N)$ (qui est un foncteur exact à gauche). Il se calcule donc en prenant une résolution **projective** $\cdots \xrightarrow{d} P^{-2} \xrightarrow{d} P^{-1} \xrightarrow{d} P^0$ de M ; on a alors $\text{Ext}_A^i(M, N) = H^i(\text{Hom}_A(P^\bullet, N), \circ d)$.

D'autre part, le foncteur $\text{Ext}_A^i(M, N)$ (vu comme foncteur en la variable N) est aussi l'image en N du $i^{\text{ème}}$ foncteur dérivé à droite de $\text{Hom}_A(M, -)$ (qui est exact à gauche). Ce dernier se calcule en prenant une résolution **injective** $E^0 \xrightarrow{d} E^1 \xrightarrow{d} E^2 \xrightarrow{d} \cdots$ de N ; on a alors $\text{Ext}_A^i(M, N) = H^i(\text{Hom}_A(M, E^\bullet), d \circ)$. Les deux méthodes de calcul sont indépendantes des résolutions et donnent le même résultat. Par définition, on a toujours $\text{Ext}_A^0(M, N) = \text{Hom}_A(M, N)$. De plus il est immédiat que si M est projectif ou N injectif, alors $\text{Ext}_A^{i>0}(M, N) = 0$.

Solution 10. (1) On construit une résolution projective de $A/(x)$. La multiplication par x est injective par hypothèse; on en déduit que la suite $0 \rightarrow A \xrightarrow{x^*} A \rightarrow A/(x) \rightarrow 0$ (où x^* est la multiplication par x à gauche) est exacte. Comme A est projectif, puisque libre, le complexe $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow A \xrightarrow{x^*} A$ est une résolution projective de $A/(x)$ (placé en degré 0 bien sur). Il nous suffit maintenant de calculer la cohomologie du complexe

$$\text{Hom}_A(A, M) \xrightarrow{x^{**}} \text{Hom}_A(A, M) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \dots \quad (0.2)$$

Or on a un isomorphisme canonique $\text{Hom}_A(A, M) \cong M$ (rappelons que cet isomorphisme est donné par l'application qui envoie $\phi : A \rightarrow M$ sur $\phi(1) \in M$). On en déduit que le complexe (0.2) est isomorphe au complexe $M \xrightarrow{x^*} M \rightarrow 0 \dots$. Il est maintenant évident que $\text{Ext}_A^1(A/(x), M) = \text{coker}(M \xrightarrow{x^*} M) \cong M/xM$. Notons que tous les autres groupes $\text{Ext}_A^{i \neq 1}(A/(x), M)$ sont nuls.

- (2) D'après la question précédente, on a $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est isomorphe à

$$\frac{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}{n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})} = \frac{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}{(n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z})/m\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

avec $d = \text{pgcd}(m, n)$.

- (3) Le raisonnement est identique à celui pour les foncteurs $\text{Tor}_A^i(-, N)$ de l'exercice 1. On utilise que le foncteur produit est exact dans $A\text{-mod}$. Si $P^\bullet$ est une résolution projective de M , on en déduit des isomorphismes naturels

$$H^n(\text{Hom}_A(P^\bullet, \prod_{i \in I} N_i), \circ d) \cong H^n(\prod_{i \in I} \text{Hom}_A(P^\bullet, N_i), \prod \circ d) \cong \prod_{i \in I} H^n(\text{Hom}_A(P^\bullet, N_i), \circ d)$$

le dernier isomorphisme utilisant l'exactitude (à gauche et à droite) de $\prod_{i \in I}$. On peut aussi raisonner par récurrence. Appliquons cette méthode au deuxième exemple. On sait déjà que

$$\text{Ext}_A^0(\oplus M_i, N) = \text{Hom}_A(\oplus M_i, N) \cong \prod \text{Hom}_A(M_i, N) \cong \prod \text{Ext}_A^0(M_i, N).$$

Supposons avoir démontré $\text{Ext}_A^n(\oplus M_i, N) \cong \prod \text{Ext}_A^n(M_i, N)$ pour un $n \geq 1$ et tous modules N , M_i . Montrons ce résultat pour $n + 1$ et tous modules N , M_i . Soit $0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0$ une

suite exacte avec E injectif (ce qui existe toujours puisque $A\text{-mod}$ admet assez d'injectifs). La longue suite exacte en cohomologie qui lui est associée donne

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_A^n(\oplus M_i, E) \rightarrow \text{Ext}_A^n(\oplus M_i, L) \rightarrow \text{Ext}_A^{n+1}(\oplus M_i, N) \rightarrow \text{Ext}_A^{n+1}(\oplus M_i, E) \rightarrow \cdots$$

Comme E est injectif, on a $\text{Ext}_A^n(\oplus M_i, E) = 0 = \text{Ext}_A^{n+1}(\oplus M_i, E)$. On en déduit des isomorphismes naturels

$$\text{Ext}_A^{n+1}(\oplus M_i, N) = \text{Ext}_A^n(\oplus M_i, L) \cong \prod \text{Ext}_A^n(M_i, L) \cong \prod \text{Ext}_A^{n+1}(M_i, N)$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. Il reste encore à démontrer le cas $n = 1$. La suite exacte longue donne alors que $\text{Ext}_A^1(\oplus M_i, N) = \text{coker}(\text{Ext}_A^0(\oplus M_i, E) \rightarrow \text{Ext}_A^0(\oplus M_i, L))$ et on utilise la commutation de $\prod$ avec les coker.

- (4) On utilise le théorème de structure des groupes abélien de type fini : $G \simeq \mathbb{Z}^k \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ (avec $n_1|n_2|\cdots|n_r$). On a $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par la question (2) et $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$ puisque $\mathbb{Z}$ (celui de gauche !) est libre donc projectif. On déduit de la question (3) que $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G, \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$. Le résultat cherché est alors immédiat.

Exercice 11. Soit $A = k[x_1, x_2]$. On considère les A -modules $M' = A/(x_1A + x_2A)$, $M = A/(x_1^2A + x_1x_2A)$ et $M'' = A/(x_1A)$.

- (1) Montrer que $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\times x_1} M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte non scindée.
- (2) Construire des résolutions libres de M' et M'' et en déduire les modules $\text{Ext}_A^i(M', A)$, $\text{Ext}_A^i(M'', A)$, $\text{Ext}_A^i(M, A)$ pour tout i .
- (3) Calculer $\text{Ext}_A^\bullet(k, k)$ et $\text{Tor}_\bullet^A(k, k)$.
- (4) Calculer la cohomologie du complexe de Koszul de A associée à la suite de morphisme (ϕ_1, ϕ_2) où $\phi_1(z) = x_1^2 \cdot z$ et $\phi_2(z) = \frac{\partial}{\partial x_2} z$.

Complexes de Koszul et résolutions libres : les complexes de Koszul de suites régulières fournissent des résolutions libres (voir le cours !!!); c'est d'ailleurs un de leur plus importantes propriétés. Plus précisément si N est un A -module et $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une suite d'endomorphismes $N \xrightarrow{\varphi_i} N$ qui commutent deux à deux, le complexe de Koszul $\mathcal{K}^\bullet(N, \varphi)$ associé à la suite φ est le complexe $\mathcal{K}^j(N, \varphi) = N \otimes \bigwedge^j k^n$. Rappelons, qu'en notant $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de k^n , alors $\bigwedge^j k^n$ est le k -module libre sur la base $\{e_{i_1 \dots i_k} := e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}, 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$. La relation $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ permet de définir $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ sans ambiguïté pour des suites d'entiers non ordonnées. La différentielle du complexe de Koszul $\mathcal{K}^\bullet(N, \varphi)$ est donnée par

$$d(m \otimes e_{i_1 \dots i_k}) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(m) \otimes e_i \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}.$$

Attention, le coefficient $e_i \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ dans la formule ci-dessus n'est en général pas ordonné (ce qui introduit des signes nécessaires pour obtenir que d est bien de carré nul). Si M est projectif (resp. libre), le complexe de Koszul est donc un complexe de modules projectifs (resp. libres). Lorsque la suite φ est régulière, c'est à dire que les morphismes induits $\varphi_j : M/(\varphi_1(M) + \cdots + \varphi_{j-1}(M)) \rightarrow M/(\varphi_1(M) + \cdots + \varphi_{j-1}(M))$ sont injectifs, alors la cohomologie du complexe de Koszul $\mathcal{K}^\bullet(N, \varphi)$ est concentré en degré n et de plus $H^n(\mathcal{K}^\bullet(N, \varphi)) \cong M/(\varphi_1(M) + \cdots + \varphi_n(M))$. En particulier, si M est projectif (resp. libre), alors le complexe $P^\bullet(N, \varphi) = \mathcal{K}^\bullet(N, \varphi)[-n]$ (défini par $P^i(N, \varphi) = \mathcal{K}^{i+n}(N, \varphi)$) est une résolution projective (resp. libre) de $M/(\varphi_1(M) + \cdots + \varphi_n(M))$. Le décalage du degré n'est bien sur là que dans le but de placer $M/(\varphi_1(M) + \cdots + \varphi_n(M))$ en degré zéro.

Solution 11. (1) L'idéal $Ax_1 + Ax_1x_2$ de A est dans le noyau de $A \rightarrow A/(x_1A)$, d'où un morphisme surjectif $M = A/(x_1^2A + x_1x_2A) \rightarrow M'' = A/(x_1A) \rightarrow 0$. Par ailleurs, on a un morphisme $A \xrightarrow{\times x_1} A \rightarrow A/(x_1^2A + x_1x_2A)$ où la première flèche est la multiplication par x_1 . Comme on a une inclusion $x_1(Ax_1 + Ax_2) \subset (x_1^2A + x_1x_2A)$, on obtient le morphisme $M' = A/(Ax_1 + Ax_2) \xrightarrow{\times x_1} M$. Ce morphisme est injectif, puisque que, si $x_1P(x_1, x_2) = x_1^2Q(x_1, x_2) + x_1x_2R(x_1, x_2)$, alors, $P(x_1, x_2) = x_1Q(x_1, x_2) + x_2R(x_1, x_2) \in Ax_1 + Ax_2$ puisque x_1 est non diviseur de 0. Enfin le noyau de $M \rightarrow M''$ est $x_1A/((x_1^2A + x_1x_2A)) = \text{im}(\times x_1)$ par construction. Donc la suite $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\times x_1} M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est exacte. Notons qu'on a des isomorphismes de k -modules

$$M' \cong k, \quad M \cong k[x_2] \oplus kx_1, \quad M'' = k[x_2].$$

Etudions d'un peu plus près les structures de A -module de M, M', M'' . Comme $x_1 \in (x_1A + x_2A)$, alors l'action de $x_1 \in A$ sur le A -module $M' = A/(x_1A + x_2A)$ est nulle (c'est à dire $x_1.m'' = 0$ pour tout $m'' \in M''$). De même pour l'action de $x_1 \in A$ sur le A -module M'' est nulle. Par conséquent, l'action de $x_1 \in A$ sur le A -module $M' \oplus M''$ est nulle. En revanche, regardons l'action de $x_1 \in A$ sur la classe du polynôme constant $1 \in M = A/(x_1^2A + x_1x_2A)$. On a $x_1.1 = x_1 \notin (x_1^2A + x_1x_2A)$. Donc l'action de x_1 sur M n'est pas nulle. En particulier M n'est pas isomorphe à $M'' \oplus M'$ en tant que A -module, et la suite n'est donc pas scindée.

- (2) La multiplication par x_1 (qui est injective) et la multiplication par x_2 sont des endomorphismes de A qui commutent. De plus, la multiplication par $x_2 \times : A/(x_1A) \rightarrow A/(x_1A)$ est injective. La suite $(x_1 \times, x_2 \times)$ est donc régulière. Le complexe de Koszul $\mathcal{K}^\bullet(A, (x_1 \times, x_2 \times))[-2]$ fournit donc une résolution libre (puisque A est libre sur lui-même) de $M' = A/(x_1A + x_2A)$ qui s'écrit simplement

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow A \xrightarrow{(\times x_1, \times x_2)} A \oplus A \begin{pmatrix} - \times x_2 \\ \times x_1 \\ \rightarrow \end{pmatrix} A \quad (0.3)$$

De même le complexe de Koszul de $A, (\times x_1)$ fournit la résolution libre

$$\dots 0 \rightarrow A \xrightarrow{\times x_1} A \quad (0.4)$$

(que l'on a déjà rencontré dans l'exercice précédent...).

On peut maintenant calculer les modules $\text{Ext}_A^i(M', A) = H^i(\text{Hom}_A(\mathcal{K}^\bullet(A, (x_1 \times, x_2 \times))[-2], A))$. En utilisant le complexe (0.3) et l'isomorphisme $\text{Hom}_A(A^n, A) \cong A^n$ donné par $(\psi : A^n \rightarrow A) \mapsto (\psi(1, 0 \dots 0), \psi(0, 1, \dots 0), \dots, \psi(0, \dots 0, 1))$, on obtient le complexe

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow A \xrightarrow{(\times -x_2, \times x_1)} A \oplus A \begin{pmatrix} \times x_1 \\ \times x_2 \\ \rightarrow \end{pmatrix} A. \quad (0.5)$$

On obtient alors $\text{Ext}_A^{i \geq 3}(M', A) = 0$, $\text{Ext}_A^0(M', A) = 0$ car $(\times -x_2, \times x_1)$ est injective, $\text{Ext}_A^2(M', A) = A/(x_1A + x_2A) = M'$. Si $x_1P_1 + x_2Q_2 = 0$, alors $Q_2 = x_1R_1$ et $Q_1 = x_2R_2$ avec de plus $x_1x_2R_2 + x_1x_2R_1 = 0$ c'est à dire $R_1 = -R_2$. D'où $P_1 + P_2 = -x_2R_1 + x_1R_2 \in \text{im}((\times -x_2, \times x_1))$ et donc $\text{Ext}_A^1(M', A) = 0$. De même, on calcule facilement $\text{Ext}_A^{i \geq 2}(M'', A) = 0 = \text{Ext}_A^0(M'', A)$ et $\text{Ext}_A^1(M'', A) = M''$.

Pour calculer $\text{Ext}_A^i(M, A)$, on utilise la suite exacte longue associée à la suite exacte $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Ext}_A^0(M'', A) \rightarrow \text{Ext}_A^0(M, A) \rightarrow \text{Ext}_A^0(M', A) \rightarrow \text{Ext}_A^1(M'', A) \rightarrow \text{Ext}_A^1(M, A) \rightarrow \\ &\text{Ext}_A^1(M', A) \rightarrow \text{Ext}_A^2(M'', A) \rightarrow \text{Ext}_A^2(M, A) \rightarrow \text{Ext}_A^2(M', A) \rightarrow \text{Ext}_A^3(M'', A) \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow \text{Ext}_A^i(M'', A) \rightarrow \text{Ext}_A^i(M, A) \rightarrow \text{Ext}_A^i(M', A) \rightarrow \text{Ext}_A^{i+1}(M'', A) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

En utilisant les calculs précédents on obtient $\text{Ext}_A^{i \geq 3}(M, A) = 0 = \text{Ext}_A^0(M, A)$ ainsi que $\text{Ext}_A^1(M, A) \cong \text{Ext}_A^1(M'', A) \cong M''$ et $\text{Ext}_A^2(M, A) \cong \text{Ext}_A^2(M', A) \cong M'$.

- (3) Le A -module k est isomorphe à M' . On en a obtenu une résolution libre (0.3) à la question (2) précédente. Il suffit donc d'appliquer le foncteur $-\otimes_A k$ au complexe (0.3) pour obtenir le complexe

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow A \otimes_A k \xrightarrow{(\times x_1, \times x_2) \otimes \text{Id}} (A \oplus A) \otimes_A k \xrightarrow{\begin{pmatrix} - \times x_2 \\ \times x_1 \end{pmatrix} \otimes \text{Id}} A \otimes_A k \quad (0.6)$$

dont la cohomologie est $\text{Tor}_i^A(k, k)$. Or la multiplication $A \otimes_A k \cong k$ via l'application $a \otimes \lambda = a \cdot \lambda$. On en déduit que le complexe (0.6) est isomorphe au complexe

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow k \xrightarrow{0} k \oplus k \xrightarrow{0} k$$

car x_1 et x_2 agissent trivialement sur $k \cong A/(x_1 A + x_2 A)$. Il suit que $\text{Tor}_0^A(k, k) = k$, $\text{Tor}_1^A(k, k) = k \oplus k$, $\text{Tor}_2^A(k, k) = k$ et $\text{Tor}_{i \geq 3}^A(k, k) = 0$. On obtient par un raisonnement similaire

$$\text{Ext}_A^0(k, k) = k, \quad \text{Ext}_A^1(k, k) = k \oplus k, \quad \text{Ext}_A^2(k, k) = k \text{ et } \text{Ext}_A^{i \geq 3}(k, k) = 0.$$

- (4) Les morphismes $\phi_1 : z \mapsto x_1^2 z$ et $\phi_2 : z \mapsto \frac{\partial}{\partial x_2} z$ commutent. De plus ϕ_1 est injectif. En revanche le morphisme induit $\phi_2 : A/\phi_1(A) \rightarrow A/\phi_1(A)$ n'est pas injectif. La suite n'est donc pas régulière; elle n'est pas non plus corégulière. On peut, bien sur, calculer le complexe de Koszul $\mathcal{K}^\bullet(A, (\phi_1, \phi_2))$; ce n'est pas si fastidieux, mais pas spécialement passionnant. On va plutôt, utiliser la longue suite exacte associée à un complexe de Koszul; cette méthode est souvent utile ! Rappelons, que le complexe de Koszul $\mathcal{K}^\bullet(N, (\varphi_1, \dots, \varphi_n))$ est isomorphe au cône $M(-\varphi_n)[-1]$ de l'application induite $-\varphi_n : \mathcal{K}^\bullet(N, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \rightarrow \mathcal{K}^\bullet(N, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ (la notation φ_n pour désigner le morphisme induit par $\varphi_n : N \rightarrow N$ est bien sur un abus de langage). En particulier (et c'est peut-être le plus important) il y a une suite exacte longue en cohomologie :

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^j(\mathcal{K}^\bullet(N, (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))) &\xrightarrow{\varphi_n} H^j(\mathcal{K}^\bullet(N, (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))) \rightarrow H^{j+1}(\mathcal{K}^\bullet(N, (\varphi_1, \dots, \varphi_n))) \\ &\rightarrow H^{j+1}(\mathcal{K}^\bullet(N, (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))) \xrightarrow{\varphi_n} H^{j+1}(\mathcal{K}^\bullet(N, (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))) \rightarrow H^{j+2}(\mathcal{K}^\bullet(N, (\varphi_1, \dots, \varphi_n))) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Note (on peut aussi utiliser les applications $-\varphi_n$ à la place de φ_n dans la suite exacte précédente). Il est fortement conseillé de lire le poly, paragraphe 3.7 du cours pour plus de détails !

Appliquons cette technique : on en déduit une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathcal{K}^\bullet(A, \phi_1, \phi_2)) &\rightarrow H^0(\mathcal{K}^\bullet(A, \phi_1)) \rightarrow H^0(\mathcal{K}^\bullet(A, \phi_1)) \rightarrow H^1(\mathcal{K}^\bullet(A, \phi_1, \phi_2)) \rightarrow H^1(\mathcal{K}^\bullet(A, \phi_1)) \\ &\xrightarrow{\phi_2} H^1(\mathcal{K}^\bullet(A, \phi_1)) \rightarrow H^2(\mathcal{K}^\bullet(A, \phi_1, \phi_2)) \rightarrow H^2(\mathcal{K}^\bullet(A, \phi_1)) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Comme $\phi_1 : z \mapsto x_1^2 z$ est injective, on sait que $H^i(\mathcal{K}^\bullet(A, \phi_1)) = 0$ pour $i \neq 1$ et $H^1(\mathcal{K}^\bullet(A, \phi_1)) = A/(x_1^2 A) = M'' \cong k[x_2] \oplus x_1 k[x_2]$. De plus $\phi_2 : A/(x_1^2 A) \rightarrow A/(x_1^2 A)$ est surjective. Son noyau est formé par les classes des polynômes divisibles par x_2 , c'est à dire isomorphe à $(A/(x_1^2 A))/(x_2 A/(x_1^2 A)) \cong A/(x_1^2 A + x_2 A) \cong k \oplus x_1 k$. Il résulte alors immédiatement de la suite exacte longue précédente que $H^i(\mathcal{K}^\bullet(A, \phi_1, \phi_2)) = 0$ si $i \neq 1$ et $H^1(\mathcal{K}^\bullet(A, \phi_1, \phi_2)) = \ker(\phi_2 : A/(x_1^2 A) \rightarrow A/(x_1^2 A)) \cong k^2$.

Exercice 12 (Algèbre de Weyl). Soit $W_n = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}]$ la $\mathbb{C}$ -algèbre non commutative dont les générateurs vérifient les relations : $x_i x_j = x_j x_i$, $\partial_{x_i} x_j = x_j \partial_{x_i}$ et $\partial_{x_i} \partial_{x_j} = \partial_{x_j} \partial_{x_i}$ pour $i \neq j$ et enfin $\partial_{x_i} x_i = x_i \partial_{x_i} + 1$.

- (1) On considère le cas $n = 2$. Soit $\varphi_1 : W_2 \rightarrow W_2$, $\omega \mapsto \omega x_1$ et $\varphi_2 : W_2 \rightarrow W_2$, $\omega \mapsto \omega \partial_{x_2}$. Construire le complexe de Koszul $\mathcal{K}^\bullet(W_2, (\varphi_1, \varphi_2))$ et calculer ses modules de cohomologie.
- (2) Soit $\psi_i : W_n \rightarrow W_n$ la multiplication par x_i (à droite). Montrer que $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ est régulière et calculer $H^\bullet(\mathcal{K}^\bullet(W_n, (\psi_j)_{j=1 \dots n}))$.

- (3) On note M le W_n -module à gauche $W_n/(x_1^2, \dots, x_n^2)$ et Ω le W_n -module à droite $W_n/(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}).W_n$. Calculer les groupes $\text{Tor}_j^{W_n}(\Omega, M)$ (on pourra considérer les endomorphismes de W donnés par la multiplication à droite par x_i^2). .

Solution 12. Cet exercice se résout sans difficulté si l'on a une bonne écriture des éléments de W_n .

L'écriture des éléments de W_n n'est pas unique car l'anneau n'est pas commutatif. Cependant les relations entre les générateurs montrent que tout élément de W_n peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire à coefficient dans $\mathbb{C}$ de monômes de la forme $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \partial_{x_1}^{k_1} \dots \partial_{x_n}^{k_n}$. Mais aussi de façon unique comme combinaison linéaire à coefficient dans $\mathbb{C}$ de monômes de la forme $\partial_{x_1}^{k_1} \partial_{x_n}^{k_n} x_n^{i_n} \dots x_1^{i_1}$ ou encore de la forme $x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \partial_{x_1}^{k_1} \dots \partial_{x_n}^{k_n} x_1^{i_1}$.

- (1) Les monômes $x_2^i \partial_{x_1}^j \partial_{x_2}^k x_1^\ell$ forment une base de W_2 en tant que $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Par définition, les morphismes φ_1 et φ_2 commutent, donc on peut former leur complexe de Koszul. Ce complexe de Koszul $K^\bullet(W, \varphi)$ est le complexe de $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels :

$$0 \rightarrow W_2 \xrightarrow{u} W_2 e_1 \oplus W_2 e_2 \xrightarrow{v} W_2 e_1 \wedge e_2 \rightarrow 0$$

où $u(\omega) = \omega x_1 e_1 + \omega \partial_{x_2} e_2$ et $v(\eta e_1 + \theta e_2) = \theta x_1 - \eta \partial_{x_2}$.

On remarque que φ_1 est injectif (évident d'après la décomposition des éléments dans la base choisie) et que $\text{coker}(\varphi_1)$ a pour base sur $\mathbb{C}$ l'ensemble des classes modulo x des monômes $y^i \partial_x^j \partial_y^k$.

On remarque alors que l'endomorphisme induit par φ_2 sur $\text{coker}(\varphi_1)$, $\text{cl}(\omega) \mapsto \text{cl}(\omega \partial_y)$ (où $\text{cl}(x)$ désigne la classe de x dans le quotient) est aussi injectif (d'après la décomposition des éléments dans la base de $\text{coker}(\varphi_1)$).

Conclusion : $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est une suite régulière, donc $H_0(K^\bullet(W, \varphi)) = 0$, $H_1(K^\bullet(W, \varphi)) = 0$ et $H_2(K^\bullet(W, \varphi)) = W/(\text{im } \varphi_1 + \text{im } \varphi_2)$.

Ainsi $H_2(K^\bullet(W, \varphi))$ est engendré sur $\mathbb{C}$ par les classes modulo (x, ∂_y) des monômes $y^i \partial_x^j$.

Comme y et ∂_x commutent entre eux on en déduit que $H_2(K^\bullet(W, \varphi))$ est isomorphe à un anneau de polynômes à deux variables à coefficient dans $\mathbb{C}$.

- (2) Déjà les morphismes ψ_i commutent entre eux puisque les générateurs x_i commutent deux à deux. On sait que les éléments de W_n s'écrivent de manière unique comme combinaison linéaire de monômes de la forme $\partial_{x_1}^{k_1} \partial_{x_n}^{k_n} x_n^{i_n} \dots x_1^{i_1}$. Il découle de cet unicité que la multiplication à droite par x_1 est injective. De plus une base (en tant que $\mathbb{C}$ -espace vectoriel) de $\text{coker}(\psi_1) \cong W_n/(W_n x_1)$ est donné par les $\partial_{x_1}^{k_1} \partial_{x_n}^{k_n} x_n^{i_n} \dots x_2^{i_2}$ (toujours par unicité de la décomposition). Or ψ_2 est la multiplication à droite par x_2 . Il est clair, étant donné la base exhibée sur $W_n/(W_n x_1) \cong \text{coker}(\psi_1)$ que l'application induite $\psi_2 : \text{coker}(\psi_1) \rightarrow \text{coker}(\psi_1)$ est injective. En itérant ce raisonnement, on trouve, pour tout $k \leq n-1$, qu'une base de $W_n/(\psi_1(W_n) + \dots + \psi_k(W_n)) \cong W_n/(W_n x_1 + \dots + W_n x_k)$ est formée par les $\partial_{x_1}^{k_1} \partial_{x_n}^{k_n} x_n^{i_n} \dots x_{k+1}^{i_{k+1}}$ et que ψ_{k+1} (qui est la multiplication à droite par x_k) est injective sur $W_n/(\psi_1(W_n) + \dots + \psi_k(W_n))$.

Conclusion : la suite $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ est régulière. Il en découle que la cohomologie du complexe de Koszul $K^\bullet(W_n, (\psi_1, \dots, \psi_n))$ est nulle en tout degré sauf le degré n et que de plus en degré n , on a $H^n(K^\bullet(W_n, (\psi_1, \dots, \psi_n))) \cong W_n/(\psi_1(W_n) + \dots + \psi_n(W_n))$. D'après l'étude ci dessus, on a qu'une base de $W_n/(\psi_1(W_n) + \dots + \psi_n(W_n))$ est donné par les monômes $\partial_{x_1}^{k_1} \dots \partial_{x_n}^{k_n}$, qui commutent entre eux. Il en découle que

$$H^{i \neq n}(K^\bullet(W_n, (\psi_1, \dots, \psi_n))) = 0, \quad H^n(K^\bullet(W_n, (\psi_1, \dots, \psi_n))) \cong k[\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}].$$

- (3) Pour calculer $\text{Tor}_\bullet^{W_n}(\Omega, M)$, il suffit de trouver une résolution libre pour M . Clairement les morphismes $\varphi_i : W_n \rightarrow W_n$ donné par la multiplication à droite par x_i^2 forment une famille régulière de morphismes (le raisonnement est similaire aux questions précédentes). Il en suit qu'une telle

résolution libre est donnée par le complexe de Koszul $\mathcal{K}^\bullet(W_n, (\varphi_1, \dots, \varphi_n))[-n]$. On en déduit que $\text{Tor}_\bullet^{W_n}(\Omega, M) = H^{-j}(\Omega \otimes_k \bigwedge^j k^n, d)$ où la différentielle d est donnée par la formule .

$$d(\omega \otimes e_{i_1 \dots i_k}) = \sum_{i=1}^n m \cdot x_i^2 \otimes e_i \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}.$$

En tant que $\mathbb{C}$ -module, on a $\Omega \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ et la multiplication par x_i^2 à droite s'identifie avec la multiplication par x_i^2 sur l'algèbre polynomiale $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. On en conclut que le complexe $(\Omega \otimes_k \bigwedge^j k^n, d)$ s'identifie au complexe de Koszul $\mathcal{K}^\bullet(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], (\varphi_1, \dots, \varphi_n))$ où φ_i est la multiplication par x_i^2 . Cette suite de morphismes est régulière, d'où il découle que $\text{Tor}_j^{W_n}(\Omega, M) \cong 0$ pour $j > 0$ et $\text{Tor}_0^{W_n}(\Omega, M) \cong \Omega \otimes_{W_n} M \cong k \oplus kx_1 \oplus \dots \oplus kx_n$.

Exercice 13. Soit $M = k[x, y, z]$. Considérons les endomorphismes k -linéaires

$$\phi_1 = *(x + y), \quad \phi_2 = *z^3, \quad \phi_3 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$$

où $*$ désigne la multiplication. Montrer que les ϕ_j commutent deux à deux, puis calculer la cohomologie du complexe de Koszul $K^\bullet(M, (\phi_1, \phi_2, \phi_3))$.

Solution 13. Il est immédiat que ϕ_2 commute avec ϕ_1 et ϕ_3 . Par ailleurs

$$\phi_1(\phi_3(x^p y^q z^l)) = \phi_1(px^{p-1}y^q z^l - qx^p y^{q-1} z^l) = -qx^{p+1}y^{q-1} z^l + (p - q)x^p y^q z^l + px^{p-1}y^{q+1} z^l$$

et

$$\begin{aligned} \phi_3(\phi_1(x^p y^q z^l)) &= \phi_3(x^{p+1}y^q z^l + x^p y^{q+1} z^l) = -qx^{p+1}y^{q-1} z^l + (p + 1)x^p y^q z^l - (q + 1)x^p y^q z^l + px^{p-1}y^{q+1} z^l \\ &= -qx^{p+1}y^{q-1} z^l + (p - q)x^p y^q z^l + px^{p-1}y^{q+1} z^l \\ &= \phi_1(\phi_3(x^p y^q z^l)) \end{aligned}$$

On a $M/(\phi_1(M)) \cong k[x, z]$. D'où la suite ϕ_1, ϕ_2 est régulière. De plus $M/(\phi_1(M), \phi_2(M)) \cong k[x, z]/(z^3)$. Comme y s'identifie à $-x$ dans le quotient $M/(\phi_1(M), \phi_2(M))$, on obtient que l'application induite par ϕ_3 sur $M/(\phi_1(M), \phi_2(M))$ est $2\frac{\partial}{\partial x}$. Il est alors clair que (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) n'est pas régulière. On calcule alors la cohomologie du complexe de Koszul $K^\bullet(M, (\phi_1, \phi_2, \phi_3))$ au moyen de la longue suite exacte

$$\dots \rightarrow H^j(\mathcal{K}^\bullet(M, (\phi_1, \phi_2))) \xrightarrow{2\frac{\partial}{\partial x}} H^j(\mathcal{K}^\bullet(M, (\phi_1, \phi_2))) \longrightarrow H^{j+1}(\mathcal{K}^\bullet(M, (\phi_1, \phi_2, \phi_3))) \rightarrow \dots$$

En utilisant que (ϕ_1, ϕ_2) est régulière, on obtient que la seule partie non triviale de cette suite est la suite exacte:

$$\dots 0 \rightarrow H^2(\mathcal{K}^\bullet(M, (\phi_1, \phi_2, \phi_3))) \rightarrow k[x, z]/(z^3) \xrightarrow{2\frac{\partial}{\partial x}} k[x, z]/(z^3) \rightarrow H^3(\mathcal{K}^\bullet(M, (\phi_1, \phi_2, \phi_3))) \rightarrow 0 \dots$$

et $H^i(\mathcal{K}^\bullet(M, (\phi_1, \phi_2, \phi_3))) \cong 0$ pour $i \neq 2, 3$. Comme k est de caractéristique 0, l'endomorphisme $2\frac{\partial}{\partial x} : k[x, z]/(z^3) \rightarrow k[x, z]/(z^3)$ est surjectif, de noyau $k[x, z]/(x, z^3) \cong k[z]/(z^3) \cong k \oplus kz \oplus kz^2$. Par conséquent:

$$H^3(\mathcal{K}^\bullet(M, (\phi_1, \phi_2, \phi_3))) \cong 0 \text{ et } H^2(\mathcal{K}^\bullet(M, (\phi_1, \phi_2, \phi_3))) \cong k \oplus kz \oplus kz^2.$$

Remarque 4. Dans les trois exercices précédents, on utilise que le corps k est de caractéristique 0 essentiellement pour avoir que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial z} : A[z] \rightarrow A[z]$ soit surjectif pour toute k -algèbre A . On peut encore faire les calculs en caractéristique positive, mais les résultats sont un peu plus compliqués. Par exemple, dans l'exercice précédent, supposons que la caractéristique de k est $d > 2$, alors

$$H^2(\mathcal{K}^\bullet(M, (\phi_1, \phi_2, \phi_3))) \cong \text{Ker} \left(k[x, z]/(z^3) \xrightarrow{2\frac{\partial}{\partial x}} k[x, z]/(z^3) \right) \cong k[x^d, z^3]/(z^3).$$

. De même, un monôme $\lambda x^n z^j$ est dans l'image de $\frac{\partial}{\partial x}$ si et seulement si d ne divise pas $n + 1$ (car d est premier différent de 2). Par conséquent,

$$H^3(\mathcal{K}^\bullet(M, (\phi_1, \phi_2, \phi_3))) \cong \text{coker} \left(k[x, z]/(z^3) \xrightarrow{2\frac{\partial}{\partial x}} k[x, z]/(z^3) \right) \cong x^{d-1}k[x^d, z^3]/(z^3).$$

Enfin si la caractéristique de k est 2, alors $2\frac{\partial}{\partial x} = 0$, donc

$$H^3(\mathcal{K}^\bullet(M, (\phi_1, \phi_2, \phi_3))) \cong H^2(\mathcal{K}^\bullet(M, (\phi_1, \phi_2, \phi_3))) \cong k[x, z^3]/(z^3).$$

Exercice 14. Soit M un A -module et $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ n endomorphismes de M qui commutent deux à deux. Calculer la cohomologie du complexe de Koszul $K^\bullet(M, \varphi)$ sous l'hypothèse que $\varphi' = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une suite régulière et $\varphi'' = (\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n)$ est une suite corégulière.

Solution 14. Puisque $\varphi' = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une suite régulière, le complexe de Koszul $K^\bullet(M, \varphi')$ a sa cohomologie concentrée en degré p (c'est à dire nulle en degré différent de p) et $H^p(K^\bullet(M, \varphi')) \cong M/(\varphi_1(M) + \dots + \varphi_p(M))$. On note $M' = M/(\varphi_1(M) + \dots + \varphi_p(M))$ et $\tilde{\varphi}_{p+1}, \dots, \tilde{\varphi}_n$ les endomorphismes de M' induits par la suite corégulière $(\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n)$. Ces endomorphismes passent au quotient puisque φ_{p+j} commute avec φ_i pour tout $i, j \leq p$. On peut calculer, la cohomologie du complexe de Koszul $K^\bullet(M, (\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}))$ à partir de M' au moyen de la longue suite exacte en cohomologie relatif ce complexe de Koszul à $K^\bullet(M, \varphi')$. Comme dans l'exercice précédent, on obtient que $H^j(K^\bullet(M, (\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}))) \cong 0$ pour $j \neq p, p+1$ et une suite exacte

$$0 \rightarrow H^p(K^\bullet(M, (\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}))) \rightarrow M' \xrightarrow{-\tilde{\varphi}_{p+1}} M' \rightarrow H^{p+1}(K^\bullet(M, (\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}))) \rightarrow 0.$$

Par hypothèse, $\varphi_{p+1} : M \rightarrow M$ est un épimorphisme. Il en résulte que l'application induite $\tilde{\varphi}_{p+1} : M' \rightarrow M'$ est aussi un épimorphisme (on peut remarquer que c'est une toute petite conséquence du lemme du serpent...). Par conséquent on obtient $H^{p+1}(K^\bullet(M, (\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}))) \cong 0$ ainsi que $H^p(K^\bullet(M, (\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}))) \cong \ker(\tilde{\varphi}_{p+1})$. En itérant le raisonnement et en utilisant que la suite φ'' est corégulière, on montre que

$$H^p(K^\bullet(M, (\varphi))) \cong \ker(\tilde{\varphi}_{p+1}) \cap \dots \cap \ker(\tilde{\varphi}_n) \text{ et } H^{i \neq p}(K^\bullet(M, (\varphi))) \cong 0.$$