Corrigé de la feuille de TD n°6 d'algèbre et topologie : Faisceaux abéliens

Grégory Ginot

Dans cette feuille d'exercices, k désigne un anneau commutatif unitaire. On notera $\hom(F,G)$ l'ensemble des morphismes de faisceaux. On notera aussi $\mathcal{H}\mathrm{om}(F,G)$ (avec un H majuscule curviligne) le faisceau des morphismes de faisceaux.

Exercice 1 (Quelques exemples). *Soit X un espace topologique et M un k-module.*

1) Faisceau constant *Expliciter le faisceau constant M_X associé au préfaisceau $U \mapsto M$ sur $X = \mathbb{R}\times\mathbb{Z}$. Que peut-on-dire de M_X en général ?*

2) "skyscraper sheaf" *Soit $x \in X$. Pour tout ouvert $U \subset X$, on définit $S_x(U) = \{0\}$ si $x \notin U$ et $S_x(U) = M$ si $x \in U$. Si $U \subset V$, on définit une fonction de restriction $\rho_{U,V} : S_x(V) \to S_x(U)$ par l'identité si $x \in U$ et l'application nulle sinon. Montrer que $U \mapsto S_x(U)$ est un faisceau de k-modules.*

3) *On suppose $X = \mathbb{R}$. On note $F(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \,/\, f$ est continue, bornée$\}$. Montrer que F définit un préfaisceau séparé sur $\mathbb{R}$ mais pas un faisceau.*

4) *Soit $X = \{1, 2, \dots, n\}$ muni de la topologie discrète. Pour tout sous-ensemble $I = \{i_1 < \dots < i_{\#I}\}$ (où $\#$ désigne le cardinal), on définit $F(I) = M(\#I, k)$ (le k-espace vectoriel des matrices carrées de taille $\#I$). Si $J \subset I$, on définit $\rho_{J\subset I} : M^{(\#I)^2} \to M^{(\#J)^2}$ par la projection sur les matrices de taille $\#J$ obtenue en ne gardant que les lignes et colonnes indexées par des éléments de J. Montrer que F est un préfaisceau mais n'est pas séparé (et donc n'est pas un faisceau).*

Solution 1. 1) Par définition, M_X est le faisceau associé au préfaisceau $\overline{M_X}$ défini par $\overline{M_X}(U) = M$ pour tout ouvert U (non-vide). Comme le foncteur de faisceautisation est adjoint à gauche du foncteur oubli, un morphisme $\phi : M_X = \overline{M_X}^a \to G$ est uniquement déterminé par la donnée d'un morphisme de préfaisceau $\overline{\phi} : \overline{M_X} \to G$. De plus ϕ est un isomorphisme si et suelement si $\phi_x = \overline{\phi}_x : M \to G_x$ est un isomorphisme de k-moduels pour tout $x \in X$.

Ces préliminaires étant dit, occupons nous du cas $X = \mathbb{R}\times\mathbb{Z}$. Tout ouvert $U \subset R\times\mathbb{Z}$ s'écrit d'une manière unique comme une réunion disjointe d'ouverts connexes $\coprod_{(i,j)\in\mathfrak{I}\times\mathfrak{J}} U_{i,j}$ avec $\mathfrak{J} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ ($\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ dépendent, bien entendu, de $\mathfrak{I}$). Plus précisément chaque $U_{i,j}$ est un intervalle de la forme $U_{i,j} =]a_i, b_j[\times\{j\}$ avec $j \in \mathbb{Z}$ et $a_i < b_i$. Montrons que M_X est isomorphe au faisceau Loc défini par

$$U \mapsto \mathrm{Loc}(U) = \{f : U \to M \,/\, f \text{ est constante sur chaque } U_{i,j}\}.$$

Pour cela, il suffit de montrer que

i) Loc est bien un faisceau;

ii) il y a un morphisme naturel de préfaisceau $\Delta : \overline{M_X} \to \mathrm{Loc}$;

iii) pour tout $x \in X$, $\Delta_x : M \cong \overline{M_X}_x \to \mathrm{Loc}_x$ est un isomorphisme.

Par restriction de fonctions, on voit que Loc est un préfaisceau (c'est un sous-préfaisceau du préfaisceau des fonctions à valeur dans M). Il est aussi immédiat que F est séparé. Enfin soit $U = \bigcup_{k\in\mathfrak{K}} U_k$ est un recouvrement, et (s_k) des sections de $\mathrm{Loc}(U_k)$ compatibles. Toute composante connexe V de U est une réunion de composantes connexes $(U_k)_{i,j}$ des U_k non deux à deux disjointes. On en déduit que les restrictions $s_{k(U_k)_{i,j}} \in \mathrm{Loc}((U_k)_{i,j})$ sont égales entre elles. On peut donc définir $s \in \mathrm{Loc}(U)$ comme la fonction qui, sur chaque composante connexe V, est constante égale à $s_{k|(U_k)_{i,j}}$ (pour un $(U_k)_{i,j} \subset V$ quelconque); par construction on a $s_{|U_k})s_k$ ce qui achève de prouver que Loc est un faisceau.

Le morphisme $\Delta : \overline{M_X} \to \mathrm{Loc}$ identifie tout élément m de M avec la fonction (globalement) constante $U \ni x \mapsto m$. C'est trivialement un morphisme de préfaisceau. Montrons **iii)**; soit $x = (s, n) \in X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Alors tout ouvert $U \ni x$ a une unique composante connexe $U_x \ni x$ qui est un ouvert. On en déduit que l'on a un isomorphisme $\varinjlim_{x\in V} \mathrm{Loc}(V) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{x\in U} \mathrm{Loc}(U)$ où les ouverts dans la limite de gauche sont supposés connexes. Or pour V connexe, $\Delta(V) : \overline{M_X}(V) \cong M \to \mathrm{Loc}(V) \cong M$ est un isomorphisme par construction. Il suit que Δ_x est un isomorphisme pour tout $x \in X$. Ce qui conclut la preuve.

On peut, de la même façon montrer que pour tout espace X, $M_X(U) = \{f : U \to X \,/\, f \text{ est localement constante}\}$. et en particulier, f est constante sur chaque composante connexe.

2) Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts, alors $I = J \coprod K$ où J est l'ensemble des $i \in I$ tel que $x \in U_i$. En particulier si $i, j \in I$, on a $U_i \cap U_j \ni x$ et $S_x(U_i) \to S_x(U_i \cap U_j)$ est l'identité. Si $i \in K$, alor spour tou $j \in I$, on a $x \notin U_i \cap U_j$ et $S_x(U_i \cap U_j) = \{0\}$. il en découle que S_x est un faisceau.

3) F est clairement un sous-préfaisceau du faisceau des fonctions continues sur X. En particulier, c'est un préfaisceau et il est séparé. Montrons que ce n'est pas un faisceau. la fonction identité restreinte aux ouverts $]-n, n[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est dans $F(]-n, n[)$. Mais cette fonction n'est pas bornée sur $\mathbb{R} = \bigcup]-n, n[$; on en déduit qu'il n'existe pas de section globale qui se restreignent en l'identité sur tout ouvert $]-n, n[$ contredisant l'asiome $S2$ des faisceaux (notons que si une telle section existait, elle coinciderait nécéssairement avec celle définie sur le faisceau des fonctions continues...).

4) On montre facilement que F est un préfaisceau puisque un ouvert de X est une partie de $\{1, \ldots, n\}$. Soit l'ouvert $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \subset X$. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une section non nulle de $F(\{1, 2\})$ dont les restrictions à $F(\{1\})$ et $F(\{2\})$ sont nulles. Par conséquent F n'est pas séparé.

Exercice 2 (Morphismes de faisceaux et recollement). *Soient X un espace topologique et $X = \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} X_i$ un recouvrement de X par des ouverts. Nous noterons $X_{ij} = X_i \cap X_j$ et $X_{ijk} = X_i \cap X_j \cap X_k$.*

(1) *Soient $F, G \in \mathrm{Mod}(k_X)$ deux faisceaux. On suppose donné, pour chaque $i \in \mathfrak{I}$, un morphisme $\varphi_i \in \hom(F_{|X_i}, G_{|X_i})$ tels que $\forall (i, j) \in \mathfrak{I}^2 : \varphi_{i|X_i\cap X_j} = \varphi_{j|X_i\cap X_j}$. Montrer qu'il existe un unique $\varphi \in \hom(F, G)$ tel que $\varphi_{|X_i} = \varphi_i$.*

(2) *Montrer que si les φ_i sont des isomorphismes, alors φ est un isomorphisme.*

(3) *On se donne maintenant, pour chaque $i \in \mathfrak{I}$, un faisceau F_i sur X_i et pour chaque couple $(i, j) \in \mathfrak{I}^2$ un isomorphisme $\varphi_{ij} : F_{j|X_{ij}} \longrightarrow F_{i|X_{ij}}$. Pour tout ouvert U de X on définit :*

$$\begin{aligned} \Phi_U : \prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i \cap U) &\longrightarrow \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F_i(X_{ij} \cap U) \\ (s_i)_{i\in\mathfrak{I}} &\longmapsto \left(s_{i|X_{ij}\cap U} - \varphi_{ij}(s_{j|X_{ij}\cap U})\right)_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} \end{aligned}$$

et on pose $F(U) = \ker \Phi_U$. Montrer que F est un faisceau.

(4) *On suppose désormais que pour tout $i \in \mathfrak{I}$ on a $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{F_i}$ et que pour tout $(i,j,k) \in \mathfrak{I}^3$ on a $\varphi_{ij|X_{ijk}} \circ \varphi_{jk|X_{ijk}} = \varphi_{ik|X_{ijk}}$.*

i) Montrer pour tout $i \in \mathfrak{I}$ l'existence d'un unique isomorphisme de faisceau $F_i \xrightarrow[\sim]{\varphi_i} F_{|X_i}$ tel que pour tout $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$ on ait : $\varphi_{i|X_{ij}} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{j|X_{ij}}$.

ii) Soit G est un faisceau sur X ; on suppose que pour tout $i \in \mathfrak{I}$ il existe un isomorphisme $F_i \xrightarrow[\sim]{\psi_i} G_{|X_i}$ et que pour tout $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$ on a $\psi_{j|X_{ij}} = \psi_{i|X_{ij}} \circ \varphi_{ij}$; montrer qu'il existe un unique isomorphisme $F \xrightarrow{\psi} G$ tel que pour tout $i \in \mathfrak{I}$ on ait $\psi_i = \psi_{|X_i} \circ \varphi_i$.

(On dit que F est le recollement des faisceaux F_i à l'aide des isomorphismes φ_{ij}.)

(5) *On suppose maintenant donné, pour chaque $i \in \mathfrak{I}$, un homéomorphisme $h_i : U_i \to V_i$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $i, j \in \mathfrak{I}$, on a $h_j \circ h_i^{-1} : h_i(U_{ij}) \to h_j(U_{ij})$ soit de classe C^∞ (en d'autres termes on suppose que X est une variété et que la famille $(X_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ en est un atlas C^∞).*

i) *Montrer que $(h_i^{-1})_* C^\infty(V_i)$ est un faisceau sur U_i et que $C^\infty(M)$ est le recollement des $(h_i^{-1})_* C^\infty(V_i)$.*

ii) *On $DR(V)$ le complexe de De Rham d'un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que les faisceaux $(h_i^{-1})_* DR(V_i)$ se recollent. On note $DR(M)$ leur recollement. On l'appelle complexe de de Rham de M.*

iii) *Montrer que la différentielle de De Rham sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$ s'étend en une différentielle sur $DR(M)$.*

Solution 2. **(1)** On rappelle que F est un faisceau de k-espace vectoriel sur X si et seulement si pour toute famille d'ouvert $(U_i)_{i\in\mathfrak{I}}$, on a un isomorphisme naturel

$$F\left(\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} U_i\right) \cong \ker\left(\prod_{i\in\mathfrak{I}} F(U_i) \underset{\rho_D}{\overset{\rho_G}{\rightrightarrows}} \prod_{k,l\in\mathfrak{I}} F(U_k \cap U_l)\right) \tag{2.1}$$

où $\rho_G : \prod_{i\in\mathfrak{I}} F(U_i) \to \prod_{k,l\in\mathfrak{I}} F(U_k \cap U_l)$ est l'application canonique induite par les morphismes $\rho_{G,k,l}$: $\prod_{i\in\mathfrak{I}} F(U_i) \longrightarrow F(U_k) \xrightarrow{|_{U_k\cap U_l}} F(U_k \cap U_l)$ (pour tout $k, l \in \mathfrak{I}$). La notation $|_V ; F(U) \to F(V)$, pour deux ouverts $V \subset U$, désigne évidemment le morphisme de restriction. De même, le morphisme ρ_D est induit par les morphismes $\rho_{D,k,l} : \prod_{i\in\mathfrak{I}} F(U_i) \longrightarrow F(U_l) \xrightarrow{|_{U_l\cap U_k}} F(U_k \cap U_l)$. Bien entendu, il faut comprendre la notation ker comme le noyau $\ker(\rho_G, \rho_D)$ d'une paire de morphismes (voir le poly !). Comme la catégorie des préfaisceaux (abélien) est abélienne, ce noyau s'identifie avec $\ker(\rho_G - \rho_D)$. En particulier, si on raisonne en termes de sections, l'équation (2.1) est équivalente à l'exactitude de la suite suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & F\left(\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} U_i\right) & \longrightarrow & \prod_{i\in\mathfrak{I}} F(U_i) & \longrightarrow & \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F(U_i \cap U_j) \\ & s & \longmapsto & (s_{|U_i})_{i\in\mathfrak{I}} & & \\ & & & (s_i)_{i\in\mathfrak{I}} & \longmapsto & \left(s_{i|U_i\cap U_j} - s_{j|U_i\cap U_j}\right)_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} \end{array} \tag{2.2}$$

Soit alors U un ouvert et pour tout $i \in \mathfrak{I} : U_i = X_i \cap U$. En particulier, $\forall i \in \mathfrak{I} : \varphi_i(U_i)$ est bien défini. Comme de plus $\forall (i,j) \in \mathfrak{I}^2 : \varphi(U_i \cap U_j) = \varphi_i(U_i \cap U_j) = \varphi_j(U_i \cap U_j)$, on a un diagramme commutatif dans lequel les lignes horizontales sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(U) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varphi(U)"'] & \prod_{i\in\mathfrak{I}} F(U_i) \arrow[r, "\rho_G-\rho_D"] \arrow[d, "\left(\varphi_i(U_i)\right)_{i\in\mathfrak{I}}"] & \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F(U_i\cap U_j) \arrow[d, "\left(\varphi_i(U_i\cap U_j)\right)_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2}"] \\
0 \arrow[r] & G(U) \arrow[r] & \prod_{i\in\mathfrak{I}} G(U_i) \arrow[r, "\rho_G-\rho_D"] & \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} G(U_i\cap U_j)
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

L'application pointillée, que l'on note $\varphi(U)$, est l'application canonique induite par l'identification de $F(U)$ et $G(U)$ avec les noyaux des deux flèches horizontales de gauche.

Il reste à vérifier que φ ainsi construit est bien un morphisme de faisceaux. Pour cela il faut que pour tous ouverts $U \supset V$ de X le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r, "|_V"] \arrow[d, "\varphi(U)"'] & F(V) \arrow[d, "\varphi(V)"] \\
G(U) \arrow[r, "|_V"'] & G(V)
\end{tikzcd}$$

Ce qui est une conséquence immédiate du fait que φ est canonique.

Plus précisément, on observe le diagramme suivant, dans lequel tous les carrés — et les parallélogrammes — sont commutatifs sauf a priori le parallélogramme en pointillé à gauche :

$$\begin{tikzcd}
 & & F(U) \arrow[rr, hook, "\alpha_1"] \arrow[d, dashed, "\beta_1"] \arrow[ddll, dashed, "\gamma_1"'] & & \prod_{i\in\mathfrak{I}} F(U_i) \arrow[d, "\beta_3"] \arrow[ddll, "\gamma_2"'] \\
 & & G(U) \arrow[rr, hook, "\alpha_2"] \arrow[ddll, dashed, "\gamma_3"'] & & \prod_{i\in\mathfrak{I}} G(U_i) \arrow[ddll, "\gamma_4"] \\
F(V) \arrow[rr, hook, "\alpha_3"] \arrow[d, dashed, "\beta_2"] & & \prod_{i\in\mathfrak{I}} F(V_i) \arrow[d, "\beta_4"] & & \\
G(V) \arrow[rr, hook, "\alpha_4"] & & \prod_{i\in\mathfrak{I}} G(V_i) & &
\end{tikzcd}$$

(Dans ce diagramme les morphismes notés α_i, β_i et γ_i sont donnés par construction qui précède.)

On veut justement vérifier que $\beta_2 \circ \gamma_1 = \gamma_3 \circ \beta_1$; comme α_4 est injectif, il suffit de vérifier que $\alpha_4 \circ \beta_2 \circ \gamma_1 = \alpha_4 \circ \gamma_3 \circ \beta_1$; ceci est immédiat :

$$\alpha_4 \circ \beta_2 \circ \gamma_1 = \beta_4 \circ \alpha_3 \circ \gamma_1 = \beta_4 \circ \gamma_2 \circ \alpha_1 = \gamma_4 \circ \beta_3 \circ \alpha_1 = \gamma_4 \circ \alpha_2 \circ \beta_1 = \alpha_4 \circ \gamma_3 \circ \beta_1$$

Ceci montre donc que φ est un morphisme de faisceaux.

De plus si $U \subset X_i$, alors $U_i = U$ et on a alors un carré commutatif, extrait du diagramme qui détermine $\varphi(U)$:

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\varphi(U)"'] & F(U_i) \arrow[d, "\varphi_i(U_i)"] \\
G(U) \arrow[r, "\sim"] & G(U_i)
\end{tikzcd}$$

ce qui montre que $\varphi(U) = \varphi_i(U)$. Ainsi pour tout $i \in \mathfrak{I}$ on a $\varphi_{|X_i} = \varphi_i$.

(2) Le morphisme de faisceaux φ est déterminé par le diagramme commutatif (2.3) ci-dessus. Par le lemme des 5, $\varphi(U)$ est alors un isomorphisme pour tout U, d'où φ_x aussi pour tout $x \in X$. En particulier φ est un isomorphisme.

(3) Commençons par montrer que F est un préfaisceau. Comme φ_{ij} est un morphisme de faisceaux, on en déduit que l'application $\prod_{i\in\mathfrak{I}} F(X_i \cap -) \xrightarrow{\varphi_D} \prod_{k,l\in\mathfrak{I}} F(X_{kl} \cap -)$ induite par les morphismes $\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i \cap -) \longrightarrow F_l(X_l \cap -) \xrightarrow{|_{X_{kl}\cap -}} F_l(X_{kl} \cap -) \xrightarrow{\varphi_{k,l}} F_k(X_k \cap X_l \cap U)$ est un morphisme de faisceaux. De même les compositions $\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i \cap -) \longrightarrow F_k(X_k \cap -) \xrightarrow{|_{X_{kl}\cap -}} F_k(X_{kl} \cap -)$ induisent un morphisme de faiceaux $\varphi_G : \prod_{i\in\mathfrak{I}} F(X_i \cap -) \xrightarrow{\varphi} \prod_{k,l\in\mathfrak{I}} F(X_{kl} \cap -)$. La catégorie des préfaisceaux étant abélienne, elle admet des noyaux et il est immédiat par définition, que pour tout U,

$$F(U) \quad \cong \quad \ker\left(\prod_{i\in\mathfrak{I}} F(X_i \cap -) \underset{\varphi_G}{\overset{\varphi_D}{\rightrightarrows}} \prod_{k,l\in\mathfrak{I}} F(X_{kl} \cap -) \right)(U). \tag{2.4}$$

Ceci identifie donc F avec un préfaisceau.

Soit $(U_k)_{k\in\mathfrak{K}}$ une famille d'ouvert de X ; on note $U_{kl} = U_k \cap U_l$; on considère le diagramme commutatif suivant, dans lequel les lignes sont des suites exactes données par la définition de F, el les deux colonnes de droite des suites exactes car les F_i sont des faisceaux :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & F\left(\bigcup_{k\in\mathfrak{K}} U_k\right) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i\left(X_i \cap \bigcup_{k\in\mathfrak{K}} U_k\right) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F_i\left(X_{ij} \cap \bigcup_{k\in\mathfrak{K}} U_k\right) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \prod_{k\in\mathfrak{K}} F(U_k) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \prod_{\substack{i\in\mathfrak{I}\\ k\in\mathfrak{K}}} F_i(X_i \cap U_k) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{\substack{(i,j)\in\mathfrak{I}^2\\ k\in\mathfrak{K}}} F_i(X_{ij} \cap U_k) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \prod_{(k,l)\in\mathfrak{K}^2} F(U_{kl}) \arrow[r] & \prod_{\substack{i\in\mathfrak{I}\\ (k,l)\in\mathfrak{K}^2}} F_i(X_i \cap U_{kl}) \arrow[r] & \prod_{\substack{(i,j)\in\mathfrak{I}^2\\ (k,l)\in\mathfrak{K}^2}} F_i(X_{ij} \cap U_{kl})
\end{tikzcd}$$

On en déduit l'exactitude de la suite :

$$0 \longrightarrow F\left(\bigcup_{k\in\mathfrak{K}} U_k\right) \longrightarrow \prod_{k\in\mathfrak{K}} F(U_k) \longrightarrow \prod_{(k,l)\in\mathfrak{K}^2} F(U_{kl})$$
$$s \longmapsto (s_{|U_k})_{k\in\mathfrak{K}}$$
$$(s_k)_{k\in\mathfrak{K}} \longmapsto (s_{k|U_{kl}} - s_{l|U_{kl}})_{(k,l)\in\mathfrak{K}^2}$$

L'existence et l'exactitude de la suite pointillée sont alors une conséquence immédiate du lemme du serpent. Donc F est un faisceau.

(4) **i)** On fixe $i_0 \in \mathfrak{I}$. On utilise les notations de la question **(3)**. On commence par définir un morphisme de faisceaux $F_{i_0} \to F_{|X_{i_0}} = \ker(\varphi_G - \varphi_D)_{|X_{i_0}}$. D'après la propriété universelle du produit, les applications $F_{i_0}(-) \xrightarrow{|_{X_i\cap -}} F_{i_0}(X_i \cap -) \xrightarrow{\varphi_{ii_0}} F_i(X_i \cap -)$ induisent un morphisme de faisceaux $\gamma_{i_0} : F_{i_0} \to \prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i \cap -)$. De plus, comme $\varphi_{ki} \circ \varphi_{ii_0} = \varphi_{ki_0}$, on obtient $\varphi_D \circ \gamma_{i_0} = \varphi_G \circ \gamma_{i_0}$ ce qui assure que γ_{i_0} est en fait un morphisme $\gamma_{i_0} : F_{i_0} \to F_{|X_{i_0}}$.

On définit maintenant un morphisme $\varphi_{i_0} : F_{|X_{i_0}} \to F_{i_0}$. Pour tout $U \subset X_{i_0}$, on a $F_{i_0}(X_{i_0} \cap U) = F_{i_0}(U)$. On en déduit que le morphisme canonique $\prod_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i \cap -) \to F_{i_0}(X_{i_0} \cap -)$ induit un morphisme $\varphi_{i_0} : F_{|X_{i_0}} \to F_{i_0}$ par restriction aux ouverts de X_{i_0}. Il est clair que $\varphi_{i_0} \circ \gamma_{i_0} = \varphi_{i_0 i_0} = \mathrm{Id}_{F_{i_0}}$ par énoncé; en particulier γ_{i_0} est injective.

Il reste à montrer la surjectivité. Si $U \subset X_{i_0}$ et si $(s_i)_{i\in\mathfrak{I}} \in F(U)$ (avec $s_i \in F_i(X_i \cap U)$) alors, d'après la définition de $F(U)$, on a pour tout $i \in \mathfrak{I}$: $s_{i|X_{i,i_0}\cap U} = \varphi_{i,i_0}(s_{i0|X_{i,i_0}\cap U})$; or $U \subset X_{i_0}$ donc $X_{i,i_0} \cap U = X_i \cap U$ d'où $s_{i|X_{i,i_0}\cap U} = s_{i|X_i\cap U} = s_i$ et $s_{i0|X_{i,i_0}\cap U} = s_{i0|X_i\cap U}$ et donc pour tout $i \in \mathfrak{I}$ on a : $s_i = \varphi_{i,i_0}(s_{i0|X_i\cap U})$. Il suit immédiatement que $\gamma_{i_0} \circ \varphi_{i_0} = \mathrm{Id}$. Il existe donc, pour tout i, un isomorphisme de faisceaux $F_i \cong F_{|X_i}$.

ii) Il suffit d'appliquer les questions **(1)**, **(2)** aux morphismes $\psi_i \circ \varphi_i^{-1} : F_{|X_i} \to G_{|X_i}$. Pour tout $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$ on a $\psi_{j|X_{ij}} = \psi_{i|X_{ij}} \circ \varphi_{ij} = \psi_{i|X_{ij}} \circ \varphi^{-1}_{i|X_{ij}} \circ \varphi_{j|X_{ij}}$ donc $(\psi_j \circ \varphi_j^{-1})_{|X_{ij}} = (\psi_i \circ \varphi_i^{-1})_{|X_{ij}}$; il existe donc un unique morphisme $\psi : F \to G$ tel que pour tout $i \in \mathfrak{I}$ on ait $\psi_{|X_i} = \psi_i \circ \varphi_i^{-1}$.

(5) i) On sait que $C^\infty(V_i)$ est un faisceau sur l'espace V_i. Comme $h_i^{-1} : V_i \to U_i$ est continue, $(h_i^{-1})_* C^\infty(V_i)$ est un faisceau sur U_i (voir le cours pour la définition de l'image directe d'un faisceau).

Rappelons que $C^\infty(M)$ est le faisceau $\mathbf{Op}(M)^{op} \ni U \mapsto \{f : U \to \mathbb{R} \text{ avec } f \text{ de classe } C^\infty\}$. Rappelons (?) aussi qu'une fonction continue $f : M \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^∞ si les fonctions $f \circ h_i^{-1} : \mathbb{R}^n \supset V_i \to \mathbb{R}$ sont C^∞ (ceci est alors d'ailleurs vrai pour tout atlas C^∞ compatible). La même définition s'applique à un ouvert U de M. On remarque que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $C^\infty(M)$ est égal à $\Gamma(M, C^\infty(M))$ avec nos notations. Pour appliquer la question **(4).ii)** il faut montrer que pour tout i le faisceau $C^\infty(M)_{|U_i}$ est isomorphe à $(h_i^{-1})_* C^\infty(V_i)$. Or pour tout $U \subset U_i$, on a $f = (f \circ h_i^{-1}) \circ h_i$. Comme $(h_i^{-1})_* C^\infty(V_i)(U) = \{g : h_i(U) \to \mathbb{R}\}$ de classe C^∞, on en déduit que $f \mapsto f \circ h_i^{-1}$ induit un isomorphisme $\varphi_i : (h_i^{-1})_* C^\infty(V_i) \cong C^\infty(M)_{|U_i}$.

On remarque que, pour toute section s dans $(h_i^{-1})_* C^\infty(V_i)$, on a

$$\varphi_{j|U_{ij}}(s) = s \circ h_{j|U_{ij}} = s \circ h_{i|U_{ij}} \circ (h_i^{-1} \circ h_j)_{|U_{ij}} = \varphi_{|U_{ij}} \circ \varphi_{ij}(s)$$

en notant $\varphi_{ij} : s \mapsto s \circ (h_i^{-1} \circ h_j)_{|U_{ij}}$. Il est clair d'après le raisonement précédent que φ_{ij} est un isomorphisme de faisceau et de plus $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}$ et $\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik}$. Les hypothèses de la question **(4)** sont alors satisfaites et par unicité, le recollement des $(h_i^{-1})_* C^\infty(V_i)$ est canoniquement isomorphe à $C^\infty(M)$.

ii) Le complexe de De Rham (faisceautique) $DR(V)$ est un faisceau sur l'espace topologique V à valeur dans la catégorie des complexes de k-espaces vectoriels. Il est obtenu comme complexe de Koszul $\mathcal{K}^\bullet\big(C^\infty(U), (\partial_1, \dots, \partial_n)\big)$du faisceau $C^\infty(U)$ par rapport aux morphismes $\partial_1, \dots, \partial_n$ définis par $(\partial_i f)(x_1, \dots, x_n) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$; il est aisé de vérifier que ∂_i est bien un morphisme de faisceau (remarque : la suite (∂_i) est corégulière). Les isomorphismes $\varphi_{ij} : (h_j^{-1})_* C^\infty(V_j)_{|U_{ij}} \xrightarrow{\sim} (h_i^{-1})_* C^\infty(V_i))_{|U_{ij}}$ de la question **ii)** précédente induisent des isomorphismes $\tilde{\varphi}_{ij} : (h_j^{-1})_* DR(V_j)_{|U_{ij}} \cong: (h_i^{-1})_* DR(V_i)_{|U_{ij}}$ par fonctorialité du complexe de Koszul. Les hypothèses de la question **(4)** sont encore trivialement vérifiées. Les complexes de De Rham $(h_j^{-1})_* C^\infty(V_j)$ se recollent donc.

iii) La différentielle de De Rham $d : DR^n(V_i) \to DR^{n+1}(V_i)$ est un morphisme dans la catégorie abélienne des k-espaces vectoriels (pour tout $n \geq 0$). Elle est trivialement compatible avec les morphismes de restriction. Il en découle (par **(4).i)** et le **ii)** précédent) que pour tout $i \in \mathfrak{I}$, $d : (h_i^{-1})_* DR^\bullet(V_i) \to (h_i^{-1})_* DR^{\bullet+1}(V_i)$ est dans $\mathcal{H}\mathrm{om}_{k_{U_i}}(DR^\bullet(M)_{|U_i}, DR^{\bullet+1}(M)_{|U_i})$.

On vérifie facilement les hypothèses de la question **(1)**. Il en découle qu'il existe un unique morphisme $d : DR^\bullet(M) \to DR^{\bullet+1}(M)$ recollant les différentielles de De Rham sur chaque U_i. De plus, par unicité, $d^2 = 0$. C'est donc bien une différentielle.

Remarque 1. Sur la question 1 : On peut résoudre cette question de manière très rapide en utilisant le résultat du cours que le préfaisceau $U \mapsto \mathcal{H}\mathrm{om}(F_{|U}, G_{|U})$ est un faisceau. En particulier, d'après la condition (S2) (voir le cours !), comme $(X_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ est un recouvrement de X, il existe $\varphi \in \mathcal{H}\mathrm{om}(F_{|X}, G_{|X}) = \mathcal{H}\mathrm{om}(F, G)$ (car F, G sont des faisceaux sur X) tel que $\varphi_{|X_i} = \varphi_i$. L'unicité découle immédiatement de l'axiome de séparation (S1).

Sur la question 3 : On peut bien entendu, résoudre la question **(3)** sans faire appel aux limites dans la catégorie des préfaisceaux (c'est dommage, mais peut être instructif dans un premier temps). Voici comment faire : soit $V \subset U$ deux ouverts de X ; le diagramme suivant, dans lequel les flèches verticales sont données par les morphismes de restriction des faisceaux F_i, est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i\cap U) \arrow[r, "\Phi_U"] \arrow[d, "\sigma_{VU}"] & \prod\limits_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F_i(X_{ij}\cap U) \arrow[d, "\tau_{VU}"] \\ \prod\limits_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i\cap V) \arrow[r, "\Phi_V"] & \prod\limits_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F_i(X_{ij}\cap V) \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} &\sigma_{VU}\big((s_i)_{i\in\mathfrak{I}}\big) = (s_{i|X_i\cap V})_{i\in\mathfrak{I}} \\ &\tau_{VU}\big((s_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2}\big) = (s_{ij|X_{ij}\cap V})_{i\in\mathfrak{I}^2} \end{aligned}$$

En effet (on rappelle que φ_{ij} commute avec les morphismes de restriction car c'est un morphisme de faisceau.) :

$$\begin{aligned} \tau_{VU}\circ\Phi_U\big((s_i)_{i\in\mathfrak{I}}\big) &= \tau_{VU}\Big(\big(s_{i|X_{ij}\cap U} - \varphi_{ij}(s_{j|X_{ij}\cap U})\big)_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2}\Big) = \\ &\big(s_{i|X_{ij}\cap V} - \varphi_{ij}(s_{j|X_{ij}\cap V})\big)_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} = \Phi_V\big((s_{i|V})_{i\in\mathfrak{I}}\big) = \Phi_V\circ\sigma_{VU}\big((s_i)_{i\in\mathfrak{I}}\big) \end{aligned}$$

On définit alors le morphisme de restriction : $F(U) \overset{\rho_{VU}}{\longrightarrow} F(V)$ en complétant ce diagramme de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F(U) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\rho_{VU}"'] & \prod\limits_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i\cap U) \arrow[r, "\Phi_U"] \arrow[d, "\sigma_{VU}"] & \prod\limits_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F_i(X_{ij}\cap U) \arrow[d, "\tau_{VU}"] \\ 0 \arrow[r] & F(V) \arrow[r] & \prod\limits_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i\cap V) \arrow[r, "\Phi_V"] & \prod\limits_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2} F_i(X_{ij}\cap V) \end{tikzcd}$$

De plus si $W \subset V \subset U$ sont trois ouverts de X on vérifie que $\rho_{WU} = \rho_{WV}\circ\rho_{VU}$ grâce au diagramme commutatif suivant, dans lequel on remarque que $\sigma_{WU} = \sigma_{WV}\circ\sigma_{VU}$ (on notera en conséquence $s_{|V} = \rho_{VU}(s)$) :

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, hook, "\alpha_U"] \arrow[d, dashed, "\rho_{VU}"'] \arrow[dd, dashed, bend right=60, "\rho_{WU}"'] & \prod\limits_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i\cap U) \arrow[d, "\sigma_{VU}"] \arrow[dd, bend left=60, "\sigma_{WU}"] \\ F(V) \arrow[r, hook, "\alpha_V"] \arrow[d, dashed, "\rho_{WV}"'] & \prod\limits_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i\cap V) \arrow[d, "\sigma_{WV}"] \\ F(W) \arrow[r, hook, "\alpha_W"] & \prod\limits_{i\in\mathfrak{I}} F_i(X_i\cap W) \end{tikzcd}$$

En effet $\alpha_W\circ\rho_{WV}\circ\rho_{VU} = \sigma_{WV}\circ\alpha_V\circ\rho_{VU} = \sigma_{WV}\circ\sigma_{VU}\circ\alpha_U = \sigma_{WU}\circ\alpha_U = \alpha_W\circ\rho_{WU}$ or α_W est injective donc $\rho_{WV}\circ\rho_{VU} = \rho_{WU}$.

On pourrait aussi directement invoquer un argument de noyau et conoyau dans la catégorie des faisceaux. Mais il faut alors vérifier que le faisceau obtenu est bien celui noté F dans l'énoncé. L'argument est plus ou moins équivalent à ce qui a été fait dans la solution !

Exercice 3. *Soit k un corps et X un espace topologique connexe tel que tout point de X admette une base de voisinages connexes (on dit que X est localement connexe). Soit F un faisceau de k-espaces vectoriels localement constant sur X tel que pour tout $x \in X$ on ait $F_x \simeq k$. Montrer que si $\Gamma(X, F) \neq (0)$, alors F est constant.*

Solution 3. Soit $(X_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ un recouvrement de X tel que pour tout $i \in \mathfrak{I}$, $F_{|X_i}$ soit constant, donc $F_{|X_i} \xrightarrow[\sim]{\varphi_i} k_{X_i}$ puisque $(F_{|X_i})_x \cong k_x$. Quitte à remplacer cette famille par la famille de toutes les composantes connexes des X_i (qui sont ouvertes car X est localement connexe), on peut supposer que pour tout $i \in \mathfrak{I}$, X_i est connexe. On note $\varphi_{ij} = \varphi_{i|X_i\cap X_j} \circ \varphi^{-1}_{j|X_i\cap X_j} : k_{X_i\cap X_j} \xrightarrow{\sim} k_{X_i\cap X_j}$.

Le point clé, découlant de la connexité de X, est que si U est un ouvert (non vide) de X alors l'application de restriction $F(X) \to F(U)$ est injective. Commençons par établir ce résultat.
On note $U_i = U \cap X_i$; soit $\sigma \in F(X)$, $f_i = \varphi_i(\sigma_{|X_i})$, $\tau = \sigma_{|U}$ et pour tout $i \in \mathfrak{I}$: $g_i = \varphi_i(\tau_{|U_i}) = f_{i|U_i}$:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[rr, hook] \arrow[ddd] & & \prod_{i\in\mathfrak{I}} k_{X_i}(X_i) \arrow[ddd] \\
& \sigma \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (f_i)_{i\in\mathfrak{I}} \arrow[d, mapsto] \\
& \tau \arrow[r, mapsto] & (g_i)_{i\in\mathfrak{I}} \\
F(U) \arrow[rr, hook] & & \prod_{i\in\mathfrak{I}} k_{X_i}(U_i)
\end{tikzcd}$$

Comme l'application $F(U) \to \prod_{i\in\mathfrak{I}} F(U_i) \simeq \prod_{i\in\mathfrak{I}} k_{X_i}(U_i)$ est injective (car F est un faisceau), pour montrer l'injectivité de la flèche verticale de gauche, il suffit de montrer que la flèche horizontale du haut composée avec la flèche verticale de droite est injective. C'est à dire que si pour tout $i \in \mathfrak{I}$, on a $g_i = 0$, alors $\tau = 0$.

On remarque (par définition du faisceau k_{X_i}) que les applications $k_{X_i}(X_i) \to k_{X_i}(U_i) = k_{X_i}(X_i \cap U)$ sont injectives si $U_i = X_i \cap U \neq \emptyset$ et nulle si $U_i = X_i \cap U = \emptyset$. Si on suppose que $(g_i)_{i\in\mathfrak{I}} = 0$, cela veut donc dire que les seuls $f_i \neq 0$ sont pour des i tels que $U_i = \emptyset$ (car $g_i = f_{i|U\cap X_i}$). On considère donc naturellement $\mathfrak{J} = \{j \in \mathfrak{I},\ U_j = \emptyset \text{ et } f_j \neq 0\}$ et $\mathfrak{K} = \{k \in \mathfrak{I},\ f_k = 0\}$ et $V = \bigcup_{j\in\mathfrak{J}} U_j$ et $W = \bigcup_{k\in\mathfrak{K}} U_k$.
Comme on l'a vu ci-dessus, si $U_k\ \not\emptyset$.

On a évidemment $V \cup W = X$ avec V, W ouverts. De plus $W \neq \emptyset$, sinon pour tout $i \in \mathfrak{I}$, $U_i = \emptyset$ et donc $U = \emptyset$. En particulier $\mathfrak{K} \neq \emptyset$. Supposons que $\mathfrak{J} \neq \emptyset$, comme X est connexe, $V \cap W \neq \emptyset$. Il existe donc $j_0 \in \mathfrak{J}$ et $k_0 \in \mathfrak{K}$ tel que $X_{j_0} \cap X_{k_0} \neq \emptyset$ et $f_{j_0|X_{j_0}\cap X_{k_0}} \neq 0$ car f_{j_0} est une fonction localement constante non nulle sur X_{j_0} qui est connexe, et $X_{j_0} \cap X_{k_0} \neq \emptyset$. Mais, par définition de $\mathfrak{K}$, $f_{k_0} = 0$ et donc $f_{k_0|X_{j_0}\cap X_{k_0}} = 0$. Or $f_{j_0|X_{j_0}\cap X_{k_0}} = \varphi_{j_0k_0}\big(f_{k_0|X_{j_0}\cap X_{k_0}}\big)$ d'où une contradiction. Conclusion : $\mathfrak{J} = \emptyset$. D'où (rappelons qu'on a supposé que le produit $(g_i)_{i\in\mathfrak{I}} = 0$), pour tout $i \in \mathfrak{I}$, on a $f_i = 0$. Par injectivité de $F(X) \to \prod_{i\in\mathfrak{I}} k_{X_i}(X_i)$, on obtient $\tau = 0$ ce qui termine la démonstration de l'injectivité de $F(X) \to F(U)$ pour tout ouvert non vide U.

Montrons enfin que F est constant, plus précisément isomorphe au faisceau k_X. D'après le cours on a $\Gamma(X, F) \cong \hom(k_X, F)$. Rappelons que ce résultat peut s'obtenir par adjonction: en effet, comme $k_X = \overline{k_X}^a$ est le faisceau associé au préfaisceau constant $U \mapsto k$, on a $\hom(k_X, F) \cong \hom_{\mathrm{PSh}(k_X)}(\overline{k_X}, F) \cong \hom_k(k, F(X))$ (la dernière égalité est par définition de $\overline{k_X}$). Donc si $\Gamma(X, F) \neq 0$, il existe une application non nulle $f : k_X \to F$ induite par une section non nulle $f : k \to F(X)$. Il reste à voir que f est un isomorphisme. Il suffit de le démontrer sur les germes. Or pour tout point $x \in X$ et tout ouvert connexe $U \ni x$, on a que $f(U) : k \to F(U)$ est non-nulle puisque $F(X) \to F(U)$

est injective. On en déduit alors que $f_x : k \cong (k_X)_x \to F_x \cong k$ est injective (car tout point admet un voisinage connexe). Pour des raisons de dimension (k est un corps), f_x est un isomorphisme pour tout $x \in X$, d'où f aussi.

Remarque 2. Une fois que l'on a prouvé que $F(X) \to F(U)$ est injective; on peut aussi terminer la démonstration comme suit. On a obtenu que :

— $F(X) \simeq K$ car $0 \neq F(X) \hookrightarrow F(X_i) \simeq K$ (ce dernier isomorphisme vient de ce que X_i est connexe et $F_{|X_i} \simeq k_{X_i}$).

— Pour tout ouvert connexe non vide U on a $F(U) \neq 0$ et donc il existe un isomorphisme ψ_U : $F(U) \xrightarrow{\sim} k$ (Il suffit d'appliquer ce qu'on vient de prouver pour X à l'ouvert U).

— Pour tout couple d'ouverts connexes non vides $V \subset U$ le morphisme de restriction

$$\rho_{UV} : F(U) \to F(V)$$

est un isomorphisme, car il est injectif et $F(U)$ et $F(V)$ dont tout deux isomorphes à k. Par contre cet isomorphisme n'est pas nécéssairement égal à $\psi_U^{-1} \circ \psi_V$ a priori, donc ψ n'est pas nécéssairement un isomorphisme de faisceaux.

On modifie maintenant ψ pour obtenir un isomorphisme de faisceau Pour chaque ouvert connexe non vide U on note $a_U = \psi(U) \circ \rho_{UX} \circ \psi_X^{-1}(1) \in k^*$ si bien que pour tout couple d'ouverts connexes non vides $U \subset V$ on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[d, "\rho_{VX}"] \arrow[dd, bend right=60, "\rho_{UX}"'] & k \arrow[r, "\times 1"'] \arrow[d, "\times a_V"] \arrow[dd, bend right=40, "\times a_U"'] & k \arrow[r, equal] \arrow[d, "\times 1"'] \arrow[dd, bend left=40, "\times 1"] & k_X(X) \arrow[d] \arrow[dd, bend left=60] \\
F(V) \arrow[r, "\psi_V"] \arrow[d, "\rho_{UV}"] & k \arrow[r, "\times \frac{1}{a_V}"] \arrow[d, "\times \frac{a_U}{a_V}"] & k \arrow[r, equal] \arrow[d, "\times 1"'] & k_X(V) \arrow[d] \\
F(U) \arrow[r, "\psi_U"] & k \arrow[r, "\times \frac{1}{a_U}"] & k \arrow[r, equal] & k_X(U)
\end{tikzcd}$$

ce qui montre l'isomorphisme $F \simeq k_X$.

Remarque 3. On a utilisé la propriété suivante: dans un espace localement connexe, les composantes connexes sont ouvertes. Rappelons en une démonstration:

Soit U un ouvert de X et $(U_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ ses composantes connexes ; on considère pour tout i un point $x_i \in U_i$ et V_{x_i} un voisinage connexe de x_i ; nécessairement $V_i \subset U_i$ car V_i est connexe, donc U_i est un voisinage de x_i ; ceci montre que U_i est un ouvert puisqu'il est voisinage de tous ses points.

Exercice 4. *Soit X un espace topologique connexe et localement connexe. Soit A un anneau commutatif unitaire. Montrer que si $A_X \xrightarrow{\varphi} A_X$ est un isomorphisme de faisceau alors il existe $a \in A$ inversible tel que pour tout ouvert U de X l'isomorphisme $A_X(U) \xrightarrow{\varphi(U)} A_X(U)$ soit la multiplication par a.*

Solution 4. Comme X est localement connexe, on peut recouvrir tout ouvert U de X par une famille $(U_i)_{i\in\mathfrak{I}_U}$ d'ouverts connexes (en prenant ses composantes connexes par exemple). Il suffit alors de montrer qu'il existe $a \in A^\times$ tel que pour tout U ouvert connexe, φ_U est la multiplication par a. On a alors $M_X(U) = A$. D'où $\varphi(U) : A \to A$ est de la forme $\varphi(U)(b) = \varphi(U)(1).b$. On note $a_U := \varphi(U)(1)$. Clairement, si φ est un isomorphisme si et seulement si a_u est un élément inversible de A. Comme X est connexe, on a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, equal] \arrow[d, "a_X"'] & A(X) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi(X)"'] & A(U) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi(U)"] & A \arrow[d, "a_U"] \\
A \arrow[r, equal] & A(X) \arrow[r, equal] & A(U) \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

ce qui montre que pour tout ouvert U on a $a_U = a_X = a \in A$.

Remarque 4. Une démonstration similaire montre le résutat plus général suivant :

Soit X un espace topologique connexe, localement connexe et A un anneau commutatif unitaire et M un A-module. Si $M_X \xrightarrow{\varphi} M_X$ est un morphisme de faisceau alors il existe $f \in \hom_A(M, M)$ tel que pour tout ouvert U de X le morphisme $M_X(U) \xrightarrow{\varphi(U)} M_X(U)$ soit défini par $s \mapsto f \circ s$.

Exercice 5. *Soit X un espace topologique et S_1 et S_2 deux fermés de X tel que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. On pose $S = S_1 \cup S_2$. Montrer que $k_{XS} \simeq k_{XS_1} \oplus k_{XS_2}$.*

Solution 5. Si F est un faisceau, comme les espaces considérés sont fermés, on a une suite exacte : $0 \to F_{S_1 \cup S_2} \to F_{S_1} \oplus F_{S_2} \to F_{S_1 \cap S_2} \to 0$, or $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ donc $F_{S_1 \cap S_2} = 0$ d'où l'isomorphisme $F_S \simeq F_{S_1} \oplus F_{S_2}$.

Exercice 6 (Opérations sur les faisceaux). *Soit $f : X \to Y$ une application continue et $G, H \in \mathrm{Mod}(k_Y)$ et $F \in \mathrm{Mod}(k_X)$.*

(1) *Soit $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$ et $Z = \{(x,y) \in X,\ xy \geq 1\}$. On définit $f : X \to Y$ par $f(x,y) = y$. Calculer $f_* k_{XZ}$.*

(2) *Soit $Y = \mathbb{R}$ et $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy > 1,\ x > 0\}$. On définit $f : Z \to Y$ par $f(x,y) = xy$. Calculer $f_* k_Z$.*

(3) *Montrer qu'il y a un isomorphisme naturel $\mathcal{H}\mathrm{om}_{k_Y}(G, f_*F) \xrightarrow{\sim} f_* \mathcal{H}\mathrm{om}_{k_X}(f^{-1}G, F)$ dans $\mathrm{Mod}(k_Y)$.*

(4) *Montrer qu'il y a un isomorphisme naturel $f^{-1}(G \otimes_{k_Y} H) \xrightarrow{\sim} f^{-1}G \otimes_{k_X} f^{-1}H$ dans $\mathrm{Mod}(k_X)$.*

Solution 6. (1) Z a deux composantes connexes qui sont fermées dans X :

$$Z^+ = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ xy \geq 1\} \quad \text{et} \quad Z^- = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^-)^2,\ xy \geq 1\}$$

donc $f_* k_{XZ} = f_* k_{XZ^+} \oplus f_* k_{XZ^-}$. Rappelons que si S est un fermé de X, alors $k_{XS} = i_{S*} {i_S}^{-1} k_X$ où $i_S : S \hookrightarrow X$ est l'injection naturelle. Or, par définition, ${i_S}^{-1} k_X$ est le faisceau sur S associé au préfaisceau $U \in \mathrm{Op}(S) \mapsto \varinjlim_{U \subset i_S^{-1}(V)} k_X(V) \cong \varinjlim_{U \subset V \cap S} k_X(V) \cong \varinjlim_{U \subset V} k_X(V)$, c'est à dire les fonctions localement constantes sur U (le dernier isomorphisme provient du fait que la limite est filtrante). Il en découle que ${i_S}^{-1} k_X = k_S$ et $k_{XS} = i_{S*} k_S$.

Par ailleurs, si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(I) = \mathbb{R} \times I$ et on a :

$$\Gamma(I, f_* k_{XZ^+}) = \Gamma(\mathbb{R} \times I, k_{XZ^+}) = \Gamma((\mathbb{R} \times I) \cap Z^+, k_{Z^+}).$$

(La dernière égalité résulte du fait que si S est un fermé de X alors $k_{XS} = j_* k_S$ où $i_S : S \hookrightarrow X$ est l'injection naturelle.) On voit facilement (faire un dessin) que $(\mathbb{R} \times I) \cap Z^+ = \emptyset$ si $I \subset R^{-*}$ et que $(\mathbb{R} \times I) \cap Z^+$ est connexe sinon, donc :

$$\Gamma((\mathbb{R} \times I) \cap Z^+, k_{Z^+}) = \begin{cases} 0 \text{ si } I \subset \mathbb{R}^{-*} \\ k \text{ sinon} \end{cases}$$

On en déduit que $f_* k_{XZ^+} = k_{Y\mathbb{R}^+}$; on a aussi $f_* k_{XZ^-} = k_{Y\mathbb{R}^-}$ d'où : $f_* k_{XZ} = k_{Y\mathbb{R}^-} \oplus k_{Y\mathbb{R}^+}$.

(2) On procède comme en **(1)** et on trouve $f_* k_Z = k_{Y,[1,+\infty[}$ (bien faire attention qu'on suppose désormais $x > 0$ et $xy > 1$; en particulier $y > 0$).

(3) Rappelons que $\hom_{k_Y}(G, f_*F) \xrightarrow{\sim} \hom_{k_X}(f^{-1}G, F)$ où $\hom_{k_Z}(A, B)$ désigne l'ensemble des morphismes de faisceau (que l'on note avec un h minuscule au lieu d'un $\mathcal{H}$ en majuscule curviligne pour le faisceau des morphismes de faisceaux !). Il est clair que pour tout U ouvert de Y, $(f_*F)_{|U} = {f_{|f^{-1}(U)}}_* F_{|f^{-1}(U)}$. Par ailleurs pour tout V ouvert de $f^{-1}(U)$,

$$\varinjlim_{V \subset f^{-1}(W)} G(W) = \varinjlim_{V \subset f^{-1}(W') \subset f^{-1}(U)} G(W')$$

car la limite inductive considérée est filtrante et que tout ouvert W avec $f^{-1}(W) \supset V$ a un morphisme de restriction vers $W \cap U$ et $f^{-1}(W \cap U) \supset V$. Il en découle que $(f^{-1}G)_{|V} = f^{-1}_{|f^{-1}(U)} G_{|U}$. D'où, pour tout $U \subset Y$ ouvert, on a un isomorphisme

$$\hom_{k_{Y|U}}(G_{|U}, (f_*F)_{|U}) \xrightarrow{\sim} \hom_{(k_X)_{|f^{-1}(U)}}((f^{-1}G)_{|f^{-1}(U)}, F_{|f^{-1}(U)})$$

naturel, commutant avec les restrictions de manière évidente (tous les foncteurs considérés, sont des morphismes de faisceaux) qui donne l'isomorphisme de faisceaux cherché.

(4) On commence par établir un morphisme naturel $\psi : f^{-1}(G \otimes_{k_Y} H) \to f^{-1}G \otimes_{k_X} f^{-1}H$. Le faisceau $f^{-1}G \otimes_{k_X} f^{-1}H$ est le faisceau (sur X) associé au préfaisceau

$$\mathcal{B} : \mathrm{Op}(Y) \ni U \mapsto \varinjlim_{U \subset f^{-1}(V)} G(V) \otimes_k \varinjlim_{U \subset f^{-1}(W)} H(W).$$

De même, $f^{-1}(G \otimes_{k_Y} H)$ est le faisceau (sur X) associé au préfaisceau $\mathcal{A} : \mathrm{Op}(Y) \ni U \mapsto \varinjlim_{U \subset f^{-1}(V)} G(V) \otimes_k H(V)$. Il est clair que l'application

$$G(V) \otimes_k H(V) \longrightarrow \varinjlim_{U \subset f^{-1}(V)} G(V) \otimes_k \varinjlim_{U \subset f^{-1}(W)} H(W)$$

induite par les morphismes naturels $G(V) \to \varinjlim_{U \subset f^{-1}(V)} G(V)$ et $H(V) \to \varinjlim_{U \subset f^{-1}(V)} H(V)$ est un morphisme de préfaisceau. En passant aux faisceaux associés on obtient ψ. Pour montrer que ψ est un morphisme de faisceaux, il suffit de le vérifier sur les germes. C'est à dire de montrer que $\psi_x : (f^{-1}(G \otimes_{k_Y} H))_x \to (f^{-1}G \otimes_{k_X} f^{-1}H)_x$ est un isomorphisme pour tout $x \in X$. Or, d'après le cours, on a des isomorphismes canoniques $f^{-1}(G \otimes_{k_Y} H))_x \cong (G \otimes_{k_Y} H))_{f(x)} \cong G_{f(x)} \otimes_k H_{f(x)}$ et de même $(f^{-1}G \otimes_{k_X} f^{-1}H)_x \cong G_{f(x)} \otimes_k H_{f(x)}$. Il est clair, par construction de ψ à partir de la propriété universelle des limites et l'unicité des applications vers une limite inductive, que la composition

$$G_{f(x)} \otimes_k H_{f(x)} \xrightarrow{\sim} (f^{-1}(G \otimes_{k_Y} H))_x \xrightarrow{\psi_x} (f^{-1}G \otimes_{k_X} f^{-1}H)_x \xrightarrow{\sim} G_{f(x)} \otimes_k H_{f(x)}$$

est l'identité. D'où ψ_x est un isomorphisme.

Remarque 5. Dans la question **(3)**, on utilise implicitement que pour deux préfaisceaux F, G sur X, on a $F^a \otimes_{k_X} G^a = (F \overset{\mathrm{Pshf}}{\otimes} G)^a$ où F^a désigne le faisceau associé à un préfaisceau et $F \overset{\mathrm{Pshf}}{\otimes} G$ est le préfaisceau $U \mapsto F(U) \otimes G(U)$. Ce résultat provient par exemple de la suite d'isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\mathrm{om}_{k_X}(F^a \otimes_{k_X} G^a, H) \cong \mathcal{H}\mathrm{om}_{k_X}(F^a, \hom_{k_X}(G^a, H) &\cong \mathcal{H}\mathrm{om}_{k_X}(F^a, \mathcal{H}\mathrm{om}(G, \iota_X(H))) \\
&\cong \mathcal{H}\mathrm{om}(F, \mathcal{H}\mathrm{om}(G, \iota_X(H))) \\
&\cong \mathcal{H}\mathrm{om}(F \overset{\mathrm{Pshf}}{\otimes} G, \iota_X(H)) \\
&\cong \mathcal{H}\mathrm{om}_{k_X}((F \overset{\mathrm{Pshf}}{\otimes} G)^a, H)
\end{aligned}$$

où on note $\iota_X : \ \mathrm{mod}\ (k_X) \to \mathrm{Pshf}(X)$ le foncteur oubli.

Exercice 7. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : Y \longrightarrow X$ une application continue, surjective telle que tout point de X admet un voisinage ouvert U tel que $f^{-1}(U) = V_1 \sqcup V_2$ et $f_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ soit un homéomorphisme ($i = 1, 2$). Soit k un corps.*

(1) *Décrire une application naturelle* $\mathrm{nat} : k_X \longrightarrow f_* k_Y$.

(2) *Montrer qu'il existe un morphisme* $\mathrm{tr} : f_* k_Y \longrightarrow k_X$ *tel que* $\mathrm{tr} \circ \mathrm{nat} = 2\,\mathrm{Id}_{k_X}$. *(Utiliser l'exercice 2.(1).)*

(3) *En déduire que si k est de caractéristique différente de 2 alors il existe un faisceau de k-espace vectoriel L sur X localement constant de dimension 1, tel que* $f_* k_Y \simeq k_X \oplus L$.

(4) *Montrer que si Y est connexe, le faisceau L n'est pas constant.*

(5) *Construire un exemple...*

Solution 7. **(1)** Pour tout ouvert U de X, $k_X(U)$ est l'ensemble des fonctions localement constantes sur V. De plus $f_* k_Y(U) = k_Y(f^{-1}(U))$ est l'ensemble des fonctions localement constantes sur $f^{-1}(V)$. On pose alors, pour tout $s \in k_X(U)$, $\mathrm{nat}_U(s) = s \circ f$. C'est bien une fonction localement constante sur $f^{-1}(U)$. Il est immédiat que cette construction induit un morphisme de faisceau $\mathrm{nat} : k_X \to f_* k_Y$.

(2) Par hypothèse, X admet un recouvrement par des ouverts U_i tels que $f^{-1}(U_i) = V_{i,1} \sqcup V_{i,2}$ et $f_{|V_{i,j}} : V_{i,j} \longrightarrow U_i$ soit un homéomorphisme. Pour fabriquer le morphisme tr il suffit de le définir sur ces ouverts U_i. (On obtient tr par recollement grâce à l'exercice 1.)

On a $f_* k_Y(U_i) = k_Y(V_{i,1}) \times k_Y(V_{i,2})$ puisque $V_{i,1}$ et $V_{i,2}$ sont disjoints. Soit alors $t = (t_1, t_2) \in f_* k_Y(U_i)$; t_1, t_2 sont respectivements des fonctions (localement constantes) sur $V_{i,1}$, $V_{i,2}$. On pose $\mathrm{tr}(t_1, t_2) = t_1 \circ f^{-1}_{V_{i,1}} + t_2 \circ f^{-1}_{V_{i,2}}$. On vérifie sans peine que cette construction préserve les restrictions et induit un morphisme de faisceau.

Si $s \in k_X(U_i)$, on a alors $\mathrm{tr} \circ \mathrm{nat}(s) = \mathrm{tr}(s \circ f, s \circ f) = 2s$.

(3) Soit $L = \ker(\mathrm{tr})$. On déduit des 2 questions précédentes que la suite exacte $0 \to L \to f_* k_Y \to k_X \to 0$ est scindée (en divisant nat par 2). Donc $f_* k_Y \simeq k_X \oplus L$.

On utilise les notations de la question (2). On a $L_{|U_i} = \ker(k_{Y|V_{i,1}} \oplus k_{Y|V_{i,2}} \to k_{U_i})$. Or, $k_{Y|V_{i,1}} = f^{-1}_{V_1\,*} k_{U_i} \cong k_{U_i}$ puisque f_{V_1} est un homéomorphisme. On en déduit aisément que $L_{|U_i} \simeq k_{U_i}$ donc L est localement constant.

(4) On va utiliser l'exercice 2. On a $L(X) = \ker\big((f_* k_Y)(X) \xrightarrow{\mathrm{tr}} k_X(X)\big) = \ker\big((k_Y)(Y) \xrightarrow{\mathrm{tr}} k_X(X)\big)$ (car f surjective). Si Y est connexe alors X l'est aussi et alors $L(X) = \ker(k \xrightarrow{\times 2} k) = 0$ Donc L n'est pas constant.

(5) $X = Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ et $f : z \mapsto z^2$.