Corrigé de la feuille de TD n°7 d'Algèbre et Topologie
Un peu de cohomologie des faisceaux

Grégory Ginot

Dans cette feuille d'exercices, k désigne un corps et A un anneau.

Exercice 1. *Soient $X = \mathbb{S}^1$, X_1, X_2 et X_3 trois arcs de cercle et $F_i = k_{X_i}$. Nous supposerons que les intersections $X_{12} = X_1 \cap X_2$, $X_{23} = X_2 \cap X_3$ et $X_{31} = X_3 \cap X_1$ sont non vides et connexes et que $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$.*
Soient les morphismes $\varphi_{12} : F_{2|_{X_{12}}} \xrightarrow{\times\alpha} F_{1|_{X_{12}}}$, $\varphi_{23} : F_{3|_{X_{23}}} \xrightarrow{\times\beta} F_{2|_{X_{23}}}$, $\varphi_{31} : F_{1|_{X_{31}}} \xrightarrow{\times\gamma} F_{3|_{X_{31}}}$ avec $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$.
De même soient les morphismes $\varphi'_{12} : F_{2|_{X_{12}}} \xrightarrow{\times\alpha'} F_{1|_{X_{12}}}$, $\varphi'_{23} : F_{3|_{X_{23}}} \xrightarrow{\times\beta'} F_{2|_{X_{23}}}$, $\varphi'_{31} : F_{1|_{X_{31}}} \xrightarrow{\times\gamma'} F_{3|_{X_{31}}}$ avec $\alpha', \beta', \gamma' \neq 0$.

(1) *Dire pourquoi F le faisceau sur X obtenu par recollement des F_i à l'aide des morphismes φ_{ij} et F' le faisceau sur X obtenu par recollement des F_i à l'aide des morphismes φ'_{ij} sont bien définis.*

(2) *Montrer que $F \simeq F'$ si et seulement si $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$*

(3) *Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β et γ pour que F soit un faisceau constant.*

(4) *Calculer la cohomologie $H^\bullet(S^1, F)$.*

Solution 1. **(1)** Les morphismes φ_{ij}, φ'_{kl} sont des isomorphismes puisque les constantes $\alpha, \beta, \ldots, \gamma'$ sont non nulles. Comme $X_1 \cap X_2, \cap X_3 = \emptyset$, il n'y a pas d'autres conditions à vérifier pour recoller les faisceaux F_i, F'_j.

(2) Commençons par la condition suffisante. On suppose qu'il existe un isomorphisme $\varphi : F \to F'$; celui-ci induit alors des isomorphismes (locaux) $\varphi_i : F_{|_{X_i}} \to F'_{|_{X_i}}$ $(i = 1, 2, 3)$. Or, pour tout i, on a : $F_{|_{X_i}} \simeq F_i \simeq k_{X_i}$ et $F'_{|_{X_i}} \simeq F_i \simeq k_{X_i}$. De plus comme les X_i sont connexes, localement connexes, les morphismes φ_i sont des multiplications par des éléments $a, b, c \in k^*$ (cf. la feuille de TD précédente). Comme F est donné par recollement, on a pour tout U ouvert (en notant, comme d'habitude, $U_i = U \cap X_i$ et $U_{ij} = U \cap X_i \cap X_j$)

$$F(U) = \ker\big(F_1(U_1) \times F_2(U_3) \times F_3(U_3) \longrightarrow F_1(U_{12}) \times F_2(U_{23}) \times F_3(U_{31})\big).$$

On a alors pour tout ouvert U un diagramme commutatif, dans lequel les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & F(U) & \longrightarrow & F_1(U_1) \times F_2(U_2) \times F_3(U_3) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\gamma \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & 1 \end{pmatrix}} & F_1(U_{12}) \times F_2(U_{23}) \times F_3(U_{31}) \\
& \downarrow{\scriptstyle \varphi(U)} & & \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}} & & \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}} \\
0 \longrightarrow & F'(U) & \longrightarrow & F_1(U_1) \times F_2(U_2) \times F_3(U_3) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\gamma' \\ -\alpha' & 1 & 0 \\ 0 & -\beta' & 1 \end{pmatrix}} & F_1(U_{12}) \times F_2(U_{23}) \times F_3(U_{31})
\end{array}$$

On a donc $\begin{pmatrix} a & 0 & -a\gamma \\ -b\alpha & b & 0 \\ 0 & -c\beta & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & -c\gamma' \\ -a\alpha' & b & 0 \\ 0 & -b\beta' & c \end{pmatrix}$ d'où $b\alpha = a\alpha'$, $c\beta = b\beta'$ et $a\gamma = c\gamma'$; il en résulte que $abc\alpha\beta\gamma = abc\alpha'\beta'\gamma'$ et $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$ car $abc \neq 0$.

Réciproquement, si l'on a $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$ on construit un isomorphisme de faisceaux $F \xrightarrow{\varphi} F'$ à l'aide du diagramme qui précède (par recollement une nouvelle fois) en prenant par exemple $a = \dfrac{1}{\alpha'}$, $b = \dfrac{1}{\alpha}$ et $c = \beta'\gamma$. (Avec ce choix, le carré de droite dans le diagramme est commutatif).

(3) D'après le **(2)**, F est constant si et seulement si $\alpha\beta\gamma = 1$ (car pour le faisceau constant k_{S^1}, on a $\alpha = \beta = \gamma = 1$).

(4) On applique la suite exacte de Mayer Vietoris. On a la réunion d'ouverts $S^1 = X_1 \cup I$ où $I = X_2 \cup X_3$ et $X_1 \cap I = X_{12} \coprod X_{31}$ en notant $X_{ij} = X_i \cap X_j$. Remarquons que X_k, I, X_{ij} sont contractiles et que F est localement constant (par définition). En particulier $H^i(X, F) \cong H^i(\{pt\}, F) = 0$ pour $i > 0$. La suite exacte de Mayer Vietoris donne donc une suite exacte

$$\begin{aligned} &0 \to H^0(S^1, F) \to H^0(I, F) \oplus H^0(X_1, F) \to H^0(X_{12}, F) \oplus H^0(X_{31}, F) \to H^1(S^1, F) \\ &\to 0 \to 0 \to \cdots \to 0 \to H^n(S^1, F) \to 0 \to \dots. \end{aligned}$$

En particulier $H^{i>1}(S^1, F) = 0$. Remarquons que l'on a utilisé que $F_{X_{12} \coprod X_{31}} \cong F_{X_{12}} \oplus F_{X_{31}}$. Comme$X_k$, I, X_{ij} sont contractiles, par invariance par homotopie, on a

$$k \cong H^0(\{pt\}, F) \cong H^0(I, F) \cong H^0(X_1, F) \cong H^0(X_{12}, F) \cong H^0(X_{31}, F).$$

Comme la suite est exacte, on a aussi $\dim(H^0(S^1, F)) + 2 = 2 + \dim(H^1(S^1, F))$. Si $\alpha\beta\gamma = 1$, F est constant et $H^0(S^1, F) = F(S^1) = k$ car S^1 est connexe. D'où $H^i(S^1, F) \cong k$ pour $i = 0, 1$ et $H^{i>1}(S^1, F) \cong 0$. Si $\alpha\beta\gamma = 1$, alors F n'est pas constant, et comme S^1 est connexe, localement connexe, $F(S^1) = 0$. D'où $H^i(S^1, F) = 0$ pour tout i.

Exercice 2 (**Faisceaux projectifs et plats).** *Soit $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux unitaires sur X. On va montrer que* mod $(\mathcal{A})$ *n'admet pas assez de projectifs en général mais cependant suffisamment de faisceaux plats.*

(1) *On suppose que $P \in$* mod $(\mathbb{Z}_{\mathbb{R}})$ *est un faisceau projectif sur l'espace topologique $\mathbb{R}$. Montrer que P est nul (on pourra considérer un morphisme naturel $P \to (P_x)_{\mathbb{R}\{x\}}$).*

(2) *Soit $F \in$* mod $(\mathcal{A})$ *un faisceau abélien sur X. Pour tout U ouvert dans X et section $s \in F(U)$, construire un morphisme naturel $\rho_{U,s} : \mathcal{A}_U \to F$ (on pourra construire $\mathcal{A}_U \to F$).*

(3) *Montrer qu'il existe $P \in$* mod $(\mathcal{A})$ *plat et un épimorphisme $P \to F$. Rappelons que P est dit plat si le foncteur $P \otimes_{\mathcal{A}} -$ est exact dans* mod $(\mathcal{A})$.

(4) *Soit $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{A}$-modules avec P et P'' plats. Montrer que P' est plat.*

Solution 2. (1) Montrons que tout module projectif de mod$(\mathbb{Z}_{\mathbb{R}})$ est nul. Par l'absurde, supposons P non nul. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P_x \neq 0$ (sinon le morphisme naturel $P \to 0$ serait un isomorphisme sur chaque germe, donc un isomorphisme). On a un morphisme naturel

$$P \xrightarrow{\psi} (P_x)_{\mathbb{R}\{x\}}.$$

En effet, par adjonction , il suffit de construire un morphisme naturel $i^{-1}_{\{x\}} P \to i^{-1}_{\{x\}} (P_x)_{\mathbb{R}}$ où $i_{\{x\}} : \{x\} \to \mathbb{R}$ est l'injection naturelle (rappelons que $(P_x)_{\mathbb{R}\{x\}} = {i_{\{x\}}}_* \circ i^{-1}_{\{x\}} (P_x)_{\mathbb{R}}$). Comme la faisceautisation est un foncteur, il suffit de constuire un morphisme de préfaisceaux

$$\varinjlim_{\{x\} \subset V} P(V) \longrightarrow \varinjlim_{\{x\} \subset V} (P_x)_{\mathbb{R}}(V) \tag{2.1}$$

naturel en V. Par définition la source de la flèche (2.1) est le germe P_x et le but est le germe $((P_x)_{\mathbb{R}})_x = P_x$ (pour $V \neq 0$). On peut donc prendre l'identité comme application naturelle dans (2.1). Et $\psi : P \longrightarrow (P_x)_{\mathbb{R}\{x\}}$ est définie par adjonction.

Soit $s_x \in \psi(P) - \{0\} \subset P_x$ et un ouvert U, qu'on peut prendre connexe (car $\mathbb{R}$ est localement connexe) tel que $P(U) \neq 0$ et $0 \neq s_x \in \iota_U(P(U))$ (on note $\iota_U : P(U) \to \varinjlim P(U) = P_x$ l'application naturelle). Alors, de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} P(U) & \xrightarrow{\psi(U)} & P_x)_{\mathbb{R}\{x\}}(U) \cong P_x \\ {\scriptstyle \iota_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ P_x & \xrightarrow{\simeq} & P_x, \end{array}$$

on déduit que $\psi(U) \neq 0$.

Soit maintenant V un ouvert contenant x tel que V soit strictement inclus dans U. Comme V contient x, on a un morphisme naturel $\gamma : (P_x)_{\mathbb{R}V} \to (P_x)_{\mathbb{R}\{x\}}$. On voit facilement que γ est un épimorphisme en passant aux germes. On peut remarquer que, jusqu'à présent, nous n'avons pas utilisé le fait que P est projectif. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & {\scriptstyle \varphi}\swarrow & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \\ (P_x)_{\mathbb{R}V} & \longrightarrow & (P_x)_{\mathbb{R}\{x\}} & \xrightarrow{\gamma} & 0 \end{array} .$$

Si P est projectif, l'application pointillée φ (faisant commuter le diagramme) existe. Or par définition, $(P_x)_{\mathbb{R}V}(U) = \varinjlim_{U \subset W \subset V} P_x(W) = 0$ (car U n'est pas inclus dans V) ce qui contredit $\varphi(U) \neq 0$ puisque $\varphi(U) = \gamma(U) \circ \varphi(U)$. Conclusion : il n'y a pas de projectifs non nuls !

(2) Rappelons que $F_U = j_U^{-1} j_{U*} F$ où $j_U : \mathrm{op}(U) \to \mathrm{op}(X)$ est le foncteur évident $U \supset V \mapsto V \subset X$. En particulier (par adjonction) on a un morphisme naturel $F_U \to F$. Soit alors $s \in F(U)$. Alors on a un morphisme naturel $f_s : \mathcal{A}_U(U) = \mathcal{A}(U) \to F_U(U)$ de $\mathcal{A}(U)$-modules défini par $1_{\mathcal{A}(U)} \mapsto s$. Clairement, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_U(U) & \xrightarrow{f_s} & F_U(U) \\ \downarrow{\scriptstyle |V} & & \downarrow{\scriptstyle |V} \\ \mathcal{A}_U(V) & \xrightarrow{f_{s|V}} & F_U(V) \end{array}$$

est commutatif pour tout $V \subset U$. D'où, f_s induit un morphisme de faisceau $\rho_{s,U} : A_U \to F_U \to F$.

(3) Soit $P = \bigoplus_{U, s \in F(U)} A_U$ où U décrit les ouverts de X (cette somme est donc infinie !). D'après la question **(2)** on a un morphisme naturel $p : P \to F$ qui est un épimorphisme puisque pour tout U, $\rho_{s,U}(U) : A_U(U) \to F(U)$ est surjective. Montrons que P est plat. Il suffit de montrer que pour toute suite exacte $0 \to M' \to M \to M" \to 0$, la suite

$$0 \to P \otimes_{\mathcal{A}} M' \to P \otimes_{\mathcal{A}} M \to P \otimes_{\mathcal{A}} M" \to 0$$

est exacte ce qui est équivalent à l'exactitude de la suite

$$0 \to (P \otimes_{\mathcal{A}} M')_x \to (P \otimes_{\mathcal{A}} M)_x \to (P \otimes_{\mathcal{A}} M")_x \to 0$$

pour tout $x \in X$. Or $(P \otimes_A N)_x \cong P_x \otimes_{\mathcal{A}_x} P_x$ et $P_x = \bigoplus \mathcal{A}_x$ est libre donc plat. On en déduit que la deuxième suite est exacte (et donc la première aussi).

(4) Remarquons tout d'abord que si P est plat, alors P_x est plat pour tout $x \in X$. En effet pour toute suite exacte $0 \to M' \to M \to M" \to 0$ dans $\mathrm{mod}(\mathcal{A}_x)$, on a $0 \to M'_X \to M_X \to M"_X \to 0$ est exacte (puisque exacte en chaque germe par définition). Donc la suite

$$0 \to P \otimes_{\mathcal{A}} M'_X \to P \otimes_{\mathcal{A}} M_X \to P \otimes_{\mathcal{A}} M"_X \to 0$$

est exacte puisque P est plat. En prenant le germe en x cela donne l'exactitude de la suite

$$0 \to P_x \otimes_{\mathcal{A}_x} M' \to P_x \otimes_{\mathcal{A}_x} M \to P_x \otimes_{\mathcal{A}_x} M" \to 0$$

ce qui assure que P_x est plat.

De plus, pour tout $N \in \mathrm{mod}(\mathcal{A})$, $P \otimes_A N \to P" \otimes_A N$ est un épimorphisme (puisque c'est déjà le cas au niveau du préfaisceau $U \mapsto P(U) \otimes N(U)$ et que le foncteur de faisceautisation est exact). Soit alors $0 \to M' \to M \to M" \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{A}$-modules. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & P' \otimes_{\mathcal{A}} M' & \longrightarrow & P' \otimes_{\mathcal{A}} M & \longrightarrow & P' \otimes_{\mathcal{A}} M" & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & P \otimes_{\mathcal{A}} M' & \longrightarrow & P \otimes_{\mathcal{A}} M & \longrightarrow & P \otimes_{\mathcal{A}} M" & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & P" \otimes_{\mathcal{A}} M' & \longrightarrow & P" \otimes_{\mathcal{A}} M & \longrightarrow & P" \otimes_{\mathcal{A}} M" & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

dont les lignes du milieu sont exactes. Le lemme du serpent donne alors la conclusion si les colonnes sont exactes. Vérifions que les colonnes sont exactes. Il suffit de le vérifier en chaque germe. Cela résulte alors immédiatement du résultat suivant : Si $Q"$ est un A-module plat et $0 \to Q' \to Q \to Q" \to 0$ est une suite exacate, alors pour tout module M, la suite $0 \to M \otimes Q' \to M \otimes Q \to M \otimes Q" \to 0$ est exacte. Ceci est une conséquence immédiate de la longue suite exacte en homologie associé au foncteur $\mathrm{Tor}^A_\bullet(N, -)$ puisque $\mathrm{Tor}^A_1(N, Q") = 0$ si $Q"$ est plat.

Remarque 1. Le résultat de la question **(1)** dit qu'on ne peut pas trouver de résolutions projectives dans $\mathrm{mod}(\mathcal{A})$ en général (même dans des cas simples). En particulier, on ne peut pas dériver les foncteurs exacts à droite en général. En revanche les questions **(3), (4)** assurent qu'on peut trouver suffisament de modules plats dans $\mathrm{mod}(\mathcal{A})$ et construire des résolutions plates. En d'autres termes il y a assez "d'injectifs" pour le foncteur $- \otimes_{\mathcal{A}} N$ dans $\mathrm{mod}(\mathcal{A})$ (voir le cours pour la terminologie et les détails...). Cela veut dire qu'on peut quand même dériver le foncteur produit tensoriel.

On peut remarquer que la preuve utilisée pour démontrer ce résultat est similaire à celle employée pour les modules sur un anneau. On prend la somme directe de modules constant de rang 1 sur toutes les sections de tous les ouverts de X !

Remarque 2. Dans la résolution de la question **(1)**, on utilise notamment qu'un épimorphisme $F \to G$ de faisceaux ne vérifie pas nécéssairement que $F(U) \to G(U)$ est surjectif pour tout ouvert U (contrairement au cas d'un préfaisceau). On utilise aussi que si $x \in X$, alors $i^{-1}_{\{x\}}(F) \cong F_x$; dans cet isomorphisme on identifie le germe F_x avec le faisceau qu'il définit sur l'espace topologique $\{x\}$.

Exercice 3. *Soit $L \in \mathrm{mod}(k_X)$ un faisceau localement constant sur X de rang 1. On note $L^* = \mathrm{Hom}_{k_X}(L, k_X)$ son faisceau dual.*

(1) *Montrer qu'il y a des isomorphismes naturels $L^* \otimes_{k_X} L \xrightarrow{\sim} k_X$ et $k_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k_X}(L, L)$.*

(2) *On suppose que X est connexe, localement connexe et $L(X) \neq 0$. Montrer que L est constant.*

Solution 3. (1) On peut par exemple utiliser l'isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{k_X}(\mathrm{Hom}_{k_X}(L, k_X) \otimes_{k_X} L, k_X) \cong \mathrm{Hom}_{k_X}(\mathrm{Hom}_{k_X}(L, k_X), \mathrm{Hom}_{k_X}(L, k_X)).$$

Le morphisme identité fournit alors le morphisme naturel $L^* \otimes_{k_X} L \to k_X$ cherché. On montre que c'est un isomorphisme en passant aux germes. Comme L est localement constant de rang 1, pour tout x on a un ouvert $U \ni x$ tel que $L_{|U} \cong k_U$. On en déduit $L_x^* \cong (k_U)* \cong k$. D'où, en passant au germe en x, le morphisme $L^* \otimes_{k_X} L \to k_X$ devient

$$k \otimes_k k \cong L_x^* \otimes_k L_x \cong (L^* \otimes_{k_X} L)_x \to k$$

qui s'identifie à l'isomorphisme naturel $k \otimes_k k \cong k$.

On a de plus un morphisme de k_X-modules donné par $k_x \ni 1 \mapsto \mathrm{Id}_L \in \mathrm{Hom}_{k_X}(L, L)$. Au niveau de chaque germe ce morphisme est l'application $k \mapsto \hom_k(k, k)$ réalisant l'isomorphisme naturel. C'est donc aussi un isomorphisme au niveau des faisceaux.

(2) C'est un corollaire immédiat de l'exercice 2 de la feuille de TD numéro 6.

Exercice 4. *Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.*
On pose $Z_1 = \mathbb{S}^n \cap \big(\mathbb{R}^n \times]-\infty, 0]\big)$ et $Z_2 = \mathbb{S}^n \cap \big(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[\big)$.

(1) *Montrer que Z_1 et Z_2 sont contractiles et que $Z_1 \cap Z_2 = \mathbb{S}^{n-1}$ pour $n \geq 1$.*

(2) *Soit k un corps commutatif ; calculer par récurrence sur n les modules $H^j(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n})$ pour $n \geq 0$ et $j \geq 0$.*

(3) *Calculer $H^j(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^n})$ pour $n \geq 0$ et $j \geq 0$.*

(4) Invariance du domaine : *Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est homotope à $\mathbb{S}^{n-1}$. En déduire que $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^p$ si et seulement si $n = p$.*

Solution 4. (1) Un dessin est très utile pour comprendre cette question ! Pour tout $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, on a $x_{n+1} = \pm\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ et $0 \leq x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1$. En particulier il y a une unique solution sur Z_1 et sur Z_2. On en déduit immédiatement que la projection de $\mathbb{R}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ induit des homéomorphismes de Z_1 et Z_2 avec la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ qui est contractile (on espère que c'est évident pour le lecteur), donc Z_1 et Z_2 le sont aussi, et on a $Z_1 \cap Z_2 = \mathbb{S}^n \cap \big(\mathbb{R}^n \times \{0\}\big) = \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\} \cong S^{n-1}$.

(2) On va bien sur appliquer la suite exacte de Mayer-Vietoris (pour deux fermés). Remarquons d'abord que pour tout $n \geq 1$ on a :

- $H^0(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n}) \simeq \Gamma(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n}) = k$ car $\mathbb{S}^n$ est connexe.
- $H^0(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n, Z_i}) \simeq \Gamma(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n, Z_i})$ car Z_i est fermé et $\Gamma(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n, Z_i}) \simeq \Gamma(Z_i, k_{Z_i}) = k$ et $H^j(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n, Z_i}) = 0$ pour $j \geq 1$ car Z_i est contractile $(i = 1, 2)$.
- pour tout $j \geq 0$: $H^j(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1}}) \simeq H^j(\mathbb{S}^{n-1}, k_{\mathbb{S}^{n-1}})$.

De plus :

- $\mathbb{S}^0 = \{-1, +1\}$, donc $H^0(\mathbb{S}^0, k_{\mathbb{S}^0}) \simeq \Gamma(\mathbb{S}^0, k_{\mathbb{S}^0}) = k^2$ et $H^j(\mathbb{S}^0, k_{\mathbb{S}^0}) = 0$ pour $j \geq 1$.
- Pour $n = 1$ on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow k_{\mathbb{S}^1} \longrightarrow k_{\mathbb{S}^1, Z_1} \oplus k_{\mathbb{S}^1, Z_2} \longrightarrow k_{\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^0} \longrightarrow 0$$

dont la suite longue de cohomologie associée est

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{\binom{1}{1}} k^2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{smallmatrix}\right)} k^2 \longrightarrow H^1(\mathbb{S}^1, k_{\mathbb{S}^1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H^2(\mathbb{S}^1, k_{\mathbb{S}^1}) \longrightarrow 0 \cdots\cdots$$

et de laquelle on déduit que $H^1(\mathbb{S}^1, k_{\mathbb{S}^1}) \simeq k$ et $H^j(\mathbb{S}^1, k_{\mathbb{S}^1}) = 0$ pour $j \neq 0, 1$. On remarquera que les flèches de la premières lignes sont obtenues en remarquant que la restriction $k_X(U) \to k_X(V)$ pour deux ouverts connexes $V \subset U$ est l'identité.

— Pour $n = 2$ on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow k_{\mathbb{S}^2} \longrightarrow k_{\mathbb{S}^2, Z_1} \oplus k_{\mathbb{S}^2, Z_2} \longrightarrow k_{\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1} \longrightarrow 0$$

dont la suite longue de cohomologie associée est

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow k \xrightarrow{\binom{1}{1}} k^2 \xrightarrow{(-1\ 1)} k \\ \longrightarrow H^1(\mathbb{S}^2, k_{\mathbb{S}^2}) \longrightarrow 0 \longrightarrow k \\ \longrightarrow H^2(\mathbb{S}^2, k_{\mathbb{S}^2}) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\ \longrightarrow H^3(\mathbb{S}^2, k_{\mathbb{S}^2}) \longrightarrow 0 \cdots\cdots \end{array}$$

et de laquelle on déduit que $H^2(\mathbb{S}^2, k_{\mathbb{S}^2}) \simeq k$ et $H^j(\mathbb{S}^2, k_{\mathbb{S}^2}) = 0$ pour $j \neq 0, 2$.

Par une récurrence facile, on trouve ainsi que $H^n(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n}) \simeq k$ et $H^j(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n}) = 0$ pour $j \neq 0, n$.

(3) Le lecteur aura surement remarqué que la démonstration précédente marche pour tout faisceau constant A_{S^n} où A est un anneau quelconque. En effet, le seul point est de calculer les conoyaux des premières lignes de chaque suite exacte, ce qui est immédiat vu que les applications sont explicites et très simples. Donc, de la même manière, on trouve que $H^0(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^n}) \simeq \Gamma(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^n}) = \mathbb{Z}$, $H^n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^n}) \simeq \mathbb{Z}$ et $H^j(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^n}) = 0$ pour $j \neq 0, n$.

(4) L'application $\mathbb{S}^{n-1} \times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ telle que $\big((x_1, \ldots, x_n), t\big) \mapsto (tx_1, \ldots, tx_n)$ est un homéomorphisme (sa réciproque est $x \mapsto (x/||x||, ||x||)$). Or $]0, +\infty[$ est homotope à un point, donc $\mathbb{S}^{n-1} \times]0, +\infty[$ est homotope à $\mathbb{S}^{n-1}$ et il en donc de même pour $\mathbb{R}^n$.

Si $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^p$ alors $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ donc $\mathbb{S}^{n-1}$ est homotope à $\mathbb{S}^{p-1}$ mais alors les modules de cohomologie des faisceaux $k_{\mathbb{S}^{n-1}}$ et $k_{\mathbb{S}^{p-1}}$ sont isomorphes. D'après le résultat de la question (2), ce n'est le cas que si $n = p$.

Remarque 3. Le théorème d'invariance du domaine est un résultat très naturel, difficile à démontrer sans cohomologie. Remarquons qu'il implique que si deux ouverts $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^p$ sont homéomorphes alors $n = p$ (la réciproque est vraie si on les suppose de plus convexes). En effet, tout ouvert contient un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et un tel ouvert est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$...

Exercice 5. *Soit X l'espace topologique formé de la réunion des arêtes d'un tétraèdre de $\mathbb{R}^3$ Soit A un anneau commutatif unitaire. Calculer $H^j(X, A_X)$ pour $j \geq 0$.*

Solution 5. On note A, B, C, D les sommets du tétraèdre T. On écrit T comme réunion des 2 fermés $Z_1 = [A, B] \cup [B, C] \cup [C, D]$ et $Z_2 = [B, D] \cup [D, A] \cup [A, C]$. On a $Z_1 \cap Z_2 = \{A, B, C, D\}$. Le complexe de Čech associé à cette réunion de fermés est le complexe de faisceau

$$A^\bullet_{T,\mathcal{Z}} : \qquad 0 \to A_{T,Z_1} \oplus A_{T,Z_2} \to A_{T,Z_1 \cap Z_2} \to 0. \tag{5.1}$$

Le complexe de Čech $A^\bullet_{T,\mathcal{Z}}$ est quasi-isomorphe au fasiceau A_T (voir le cours; il est bon de se rapeller que le complexe de Čech est une sorte de complexe de Koszul...). En particulier sa cohomologie est celle de T. Comme les fermés Z_1 et Z_2 sont contractiles et que les composantes connexes de $Z_1 \cap Z_2$ le sont aussi, les faisceaux du complexe $A^\bullet_{T,\mathcal{Z}}$ ont leur cohomologie concentrée en degré 0 (par le Théorème

d'invariance par homotopie). Il en résulte que la cohomologie $H^j(T, A_T)$ est égale au j-éme module de cohomologie du complexe $\Gamma(T, A^\bullet_{T,\mathcal{Z}})$

$$0 \longrightarrow \Gamma(T, A_{T,Z_1}) \oplus \Gamma(T, A_{T,Z_2}) \xrightarrow{M} \Gamma(T, A_{T,Z_1\cap Z_2}) \longrightarrow 0$$

Cependant : $\Gamma(T, A_{T,Z_i}) = \Gamma(Z_i, A_{Z_i}) = A$ car Z_i est connexe $(i = 1, 2)$, $\Gamma(T, A_{T,Z_1\cap Z_2}) = \Gamma(T, A_{T,\{A,B,C,D\}}) = \Gamma(\{A, B, C, D\}, A_{\{A,B,C,D\}}) = A^4$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

— On a : $H^0(T, A_T) \simeq \Gamma(T, A_T) = A$.

— On a aussi: $H^j(T, A_T) \simeq H^j(\Gamma(T, A^\bullet_{T,\mathcal{Z}})) = 0$ pour $j \geq 2$.

Le fait que M soit de rang 1 ne suffit pas à déterminer son conoyau car un $\mathbb{Z}$-module peut avoir une composante de torsion. Cependant on remarque que $\operatorname{im} M$ est un A-module libre de rang 1 engendré par le vecteur $(1, 1, 1, 1) \in A^4$. On peut compléter en une base de A^4 :

$$\{(1, 1, 1, 1); (0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\}.$$

On obtient ainsi $H^1(T, A_T) \simeq H^1(\Gamma(T, A^\bullet_{T,\mathcal{Z}})) \simeq \operatorname{coker} M \simeq A^3$.

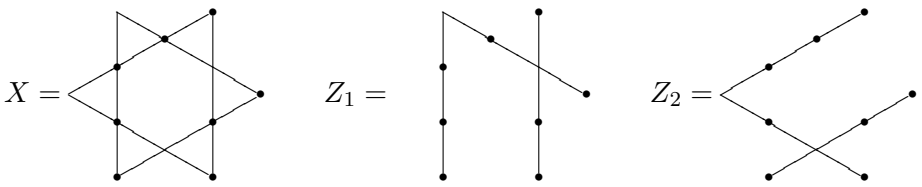
Remarque 4. L'idée ici est de remplacer le faisceau A_T par un complexe de faisceau (le complexe de Čech) associé à un recouvrement fermé de T. Bien sur cette procédure n'est efficace que si on peut choisir les fermés de manière ç que chaque composante du complexe de Čech soit aisée à calculer. Ici, et c'est souvent ce qu'on essaie de faire en pratique, on a pris des fermés contractiles. On peut remarquer que T est homotope à un "trèfle", c'est à dire une réunion de 3 cercles avec un point en commun.

Exercice 6. *Soit $\omega = \exp(2i\pi/3) \in \mathbb{C}$, X_1 l'espace topologique formé de la réunion des arêtes du triangle de sommets 1, ω et ω^2, X_2 l'espace topologique formé de la réunion des arêtes du triangle de sommets -1, $-\omega$ et $-\omega^2$, et $X = X_1 \cup X_2$.*

(1) Soit k un corps commutatif ; calculer $H^j(X, k_X)$ pour $j \geq 0$.

(2) Calculer $H^j(X, \mathbb{Z}_X)$ pour $j \geq 0$.

Solution 6. On raisonne comme dans l'exercice précédent en écrivant $X = Z_1 \cup Z_2$ avec :



L'intersection de Z_1 et de Z_2 est formé de 8 points (marqués par des " • " sur la figure). On trouve alors : $H^0(X, A_X) = A$, $H^1(X, A_X) \simeq A^7$ et $H^j(X, A_X) = 0$ pour $j \geq 2$.

Remarque 5. Le lecteur pourra se convaincre que la cohomologie de ce type d'espace topologique dépend uniquement du nombre de "trou(s)" visible(s) dans le dessin plan (3 trous pour l'exercice précédent et 7 trous pour celui-ci).

Exercice 7. *Soit $T = S^1 \times S^1$ un tore plongé dans $\mathbb{R}^3$ et $P = S^1 \times D^2$ le tore plein dont T est le bord.*

1) *Calculer les groupes de cohomologie $H^*(T, \mathbb{Z})$ et $H^*(P, \mathbb{Z})$.*

2) *Soit $f : T \to T$ et $g : P \to P$ deux homéomorphismes. Décrire $H^*(f) : H^*(T, \mathbb{Z}) \to H^*(T, \mathbb{Z})$ et $H^*(g) : H^*(P, \mathbb{Z}) \to H^*(P, \mathbb{Z})$. En déduire une condition nécéssaire (de nature cohomologique) pour qu'un homéomorphisme $f : T \to T$ s'étende en un homéomorphisme de P.*

3) *Soit $f : T \to T$ un isomorphisme du Tore (en tant que groupe topologique). En utilisant la question* **2)***, donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f s'étende en un homéomorphisme de P.*

Solution 7. 1) C'est immédiat en appliquant la formule de Künneth à coefficients dans un anneau (cf. ci-dessous). Comme la version utilisée n'est pas dans le polycopié, on donne aussi une autre démonstration. Commençons par la cohomologie de P. Comme D^2 est contractile, P est homotope à S^1, d'où $H^i(P, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i \geq 0$ et isomorphe à $\mathbb{Z}$ si $i = 0, 1$.

Pour calculer $H^*(T, \mathbb{Z})$, on peut soit utiliser Mayer-Vietoris ou appliquer le complexe de Čech comme pour le calcul de S^1. Dans le cas présent, le complexe de Čech donne lieu à des calculs plus compliqués. Il vaut donc mieux appliquer Mayer-Vietoris pour les fermés obtenus en "tranchant" le Tore en deux cylindres (ou en considérant les calottes supérieures et inférieures, ce qui donne les mêmes calculs). C'est fait en détail dans le polycopié; on va rappeler ce qui nous sera utile. On note C_1 et C_2 les deux cylindres se recollant pour former le Tore. Leur intersection $C_1 \cap C_2$ est une union disjointe de deux cercles S_1, S_2 (on peut supposer que $S_1 = \{0\} \times S^1$ et $S_2 = \{1/2\} \times S^1$ si on identifie S^1 avec $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). A ce stade, il est indispensable de faire un dessin pour comprendre ce qui se passe ! Chaque C_i est homotope à chaque S_j. On en déduit que la suite exacte courte de fermés donnant lieu à la longue suite exacte Mayer-Vietoris peut se reécrire sous la forme :

$$0 \to \mathbb{Z}_T \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}_{S^1} \oplus \mathbb{Z}_{S^1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}_{S^1} \oplus \mathbb{Z}_{S^1} \to 0$$

Dans le terme du milieu (respectivement le terme de droite) les facteurs de $\mathbb{Z}_{S^1} \oplus \mathbb{Z}_{S^1}$ correspondent à C_1 (respectivement S^1) pour le premier et C_2 (respectivement S_2) pour le deuxième. C'est une bon exercice de se convaincre que cette suite est bien une suite exacte de faisceaux *sur* T. De la connexité de T, S_i, C_j et de la suite de Mayer-Vietoris pour les fermés on déduit une longue suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H^1(T, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H^2(T, \mathbb{Z}) \to 0 \to \dots$$

On en conclut que

$$H^0(T, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \qquad H^1(T, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \qquad H^2(T, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \qquad H^{i>2}(T, \mathbb{Z}) \cong 0.$$

Il faut faire attention que, pour le calcul de $H^1(T, \mathbb{Z})$, l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris nous donne une suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z} \cong \operatorname{coker} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to H^1(T, \mathbb{Z}) \to \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cong \mathbb{Z} \to 0.$$

Cette suite est nécéssairement scindé d'après le théorème de structure des groupes abéliens de type fini (on peut aussi remarquer que, $\mathbb{Z}$ étant projectif sur lui-même, $\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong 0$ et utiliser le Devoir 2). En particulier, les deux facteurs directs du groupe $H^1(T, \mathbb{Z})$ sont engendrés par la section globale $(1, 0) \in H^0(S^1, \mathbb{Z}) \oplus H^0(S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et $(1, 1) \in H^1(S^1, \mathbb{Z}) \oplus H^1(S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Notons que l'on a deux projections $p_1, p_2 : T = S^1 \times S^1 \to S^1$ données respectivement par $(u, v) \mapsto u$ et $(u, v) \mapsto v$ qui induisent donc des morphismes $H^1(p_i) : H^1(S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \to$

$H^1(T,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Par construction, $p_2(T) = S^1$, d'où on déduit (après un calcul pas si compliqué) par fonctorialité de la suite exacte de Mayer-Vietoris que $H^1(p_2)$ est l'inclusion du second facteur $x \mapsto (0,x)$ et $H^1(p_1)$ l'inclusion dans le premier facteur. Cette remarque est en fait immédiate si on utilise la fonctorialité de la formule de Künneth.

2) Si $f : T \to T$ est un homéomorphisme, alors $H^*(f) : H^*(T,\mathbb{Z}) \to H^*(T,\mathbb{Z})$ est un isomorphisme (de groupes abéliens). Donc $H^0(f) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ et $H^2(f) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sont la multiplication par ± 1. En revanche $H^2(f) : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ est donnée par une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifiant $ad - bc = \pm 1$. De même $H^{0,1}(g) = \pm 1$. De même, la permutation $\tau : (u,v) \mapsto (v,u)$ des facteurs de $T = S^1 \times S^1$ induit l'application $H^1(\tau) : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ qui est aussi la permutation des facteurs $(x,y) \mapsto (y,x)$.

Remarquons que l'on a une injection $i : T \hookrightarrow P$ et que, de plus, la projection $p_1 : T \to S^1$ se factorise sous la forme $T \xrightarrow{i} P = S^1 \times D^2 \xrightarrow{(\mathrm{Id},0)} S^1$ Comme D^2 est contractile, on a vu que $H^*((\mathrm{Id},0)) : H^*(S^1,\mathbb{Z}) \to H^*(S^1 \times D^2)$ est l'identité et il suit de la remarque à la fin de la question **1)** que $H^1(i) : \mathbb{Z} \cong H^1(P,\mathbb{Z}) \to H^1(T,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ est l'inclusion $x \mapsto (x,0)$dans le premier facteur.

Si $f : T \to T$ s'étend en un homéomorphisme g du tore plein P (c'est à dire $g_{|T} = f$), alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(T,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{H^1(f)} & H^1(T,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 \\ {\scriptstyle H^1(i)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle H^1(i)} \\ H^1(P,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} & \xrightarrow{H^1(g)} & H^1(P,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \end{array} \tag{7.1}$$

où $H^1(g) = \pm 1$. On en déduit que la matrice de $H^1(f)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ où $a, d = \pm 1$ (en d'autres termes est nécéssairement triangulaire supérieure).

3) Un isomorphisme de groupe topologique du tore $T = S^1 \times S^1 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est donné par un élément de $GL_2(\mathbb{Z})$, c'est à dire une matrice à coefficients entiers, qui a un inverse à coefficients entiers. Plus précisément, il sécrit sous la forme $(u,v) \mapsto (iu + jv, ku + lv)$ où $i,j,k,l \in \mathbb{Z}$ et $il - jk = \pm 1$ (et $u, v \in \mathbb{R}^2$). D'après la question **2)**, il suffit de vérifier que $H^1(f) = \begin{pmatrix} i & k \\ j & l \end{pmatrix}$ pour montrer que si f s'étend à P, alors $j = 0$ (et alors, $a, c = \pm 1$). Réciproquement, si $j = 0$, alors le morphisme f s'étend à P sous la forme $g(u,v,\rho) = (iu, ku + lv, \rho)$ (on a identifié D^2 via les coordonnées polaires (v,ρ)); il faut faire attention que v n'est pas défini pour $\rho = 0$, mais cela n'est pas génant dans la formule, puisque précisément $b = 0$. Il est immédiat que g est continue et que c'est un homéomorphisme (son inverse étant de la même forme $(u,v,\rho) \mapsto (\frac{1}{i}u, -\frac{k}{ij}u + \frac{1}{l}v, \rho)$).

Montrons donc que $H^1(f)(x,y) = (ix + ky, jx + ly)$. Le résultat découle du fait que l'on a un morphisme $\circ f : \mathbb{Z}_{T^2} \to \mathbb{Z}_{T^2}$, qui envoie une fonction localement constante $s : U \to \mathbb{Z}$ sur un ouvert U sur la fonction localement constante $s \circ f : f^{-1}(U) \to \mathbb{Z}$. On en déduit le résultat en appliquant ce morphisme dans la suite exacte courte induisant la suite de Mayer-Vietoris; on rappelle que, comme f est un homéomorphisme, on a un isomorphisme de foncteurs $f^{-1} = (f^{-1})_*$.

Quelques rappels de cohomologie des faisceaux :

Voilà quelques remarques et notations issues du polycopié du cours. Soit A, un anneau unitaire, X un espace topologique. Pour tout ouvert U dans X, le foncteur $\Gamma(U,-) : \mathrm{mod}(A_X) \to \mathrm{mod}(A)$ (défini par $F \mapsto F(U)$) est exact à gauche. En particulier il admet des foncteurs dérivés à droite $R^j\Gamma(U,-)$. On note simplement $H^j(U,F) = R^j\Gamma(U,F)$. En particulier $H^\bullet(X,F)$ est appellé la cohomologie de X

à valeur dans le faisceau F. On s'intéressera surtout au cas où $F = A_X$ est le faisceau constant. On appelle simplement cohomologie de X les groupes $H^\bullet(X, A_X)$ qu'on abrégera parfois sous la forme $H^\bullet(X)$ (quand A est donné sans ambiguité). Les groupes de cohomologie d'un faisceau satisfont plusieurs propriétés importantes (qui permettent notamment de les calculer) :

Calcul de H^0. On a $H^0(U, F) = R^0\Gamma(U, F) = F(U)$ par définition des foncteurs dérivés.

Invariance par homotopie. Si $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie (on dit que X et Y sont homotopes) et $F \in \mathrm{mod}(A_Y)$ est un faisceau localement constant sur Y, alors il y a un isomorphisme naturel $H^\bullet(X, f^{-1}F) \cong H^\bullet(Y, F)$. Rappelons que $F : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie si il existe $g : Y \to X$ telle que $f \circ g : Y \to Y$ et $g \circ f : X \to X$ sont homotopes à l'identité. Tant qu'à faire, rappelons que deux applications $h_0, h_1 : X \to Y$ sont homotopes si il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \to Y$ telle que $H(-, 0) = h_0$ et $H(-, 1) = h_1$.

Cohomologie des espaces contractiles. Un espace est dit contractile s'il est homotope à un point $\{*\}$. En particulier, si X est contractile, on a $H^{j>0}(X, A_X) = 0$ et $H^0(X, A_X) \cong A$.

Mayer Vietoris pour des fermés. Rappelons que pour tout faisceau F et S_1, S_2 deux fermés de X, on a une suite exacte courte de faisceaux $0 \to F_{S_1 \cup S_2} \xrightarrow{f} F_{S_1} \oplus F_{S_2} \xrightarrow{g} F_{S_1 \cap S_2} \to 0$ oú f est donné par les deux morphismes naturels $F_{S_1 \cup S_2} \to F_{S_i}$ et $g = \beta_1 - \beta_2$ avec $\beta_i : F_{S_i} \to F_{S_1 \cap S_2}$ l'appplication naturelle induite par la restriction. Cette suite exacte induit une suite exacte longue en cohomologie qui s'écrit

$$\cdots \to H^j(S_1 \cup S_2, F_{|S_1 \cup S_2}) \to H^j(S_1, F_{|S_1}) \oplus H^j(S_2, F_{|S_2}) \to H^j(S_1 \cap S_2, F_{|S_1 \cap S_2}) \\ \to H^{j+1}(S_1 \cup S_2, F_{|S_1 \cup S_2}) \to \dots$$

Mayer Vietoris pour des ouverts. De manière duale, pour tout faisceau F et U_1, U_2 deux ouverts de X, on a une suite exacte courte de faisceaux $0 \to F_{U_1 \cap U2} \xrightarrow{f} F_{U_1} \oplus F_{U_2} \xrightarrow{g} F_{S_1 \cup S_2} \to 0$ et une suite exacte longue en cohomologie

$$\cdots \to H^j(U_1 \cup U_2, F) \to H^j(U_1, F) \oplus H^j(U_2, F) \to H^j(U_1 \cap U_2, F) \\ \to H^{j+1}(U_1 \cup U_2, F) \to \dots$$

Complexe de Čech. Soit $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_n)$ un recouvrement de X par des fermés. On a une suite exacte de complexes

$$0 \to F_X \to F^0_{\mathcal{S}} \to F^1_{\mathcal{S}} \to \cdots \to F^n_{\mathcal{S}} \to 0 \to 0 \dots \tag{7.2}$$

oú $F^k_{\mathcal{S}} := \bigoplus_{1 \le j_0 < j_1 < \cdots < j_k \le n} F_{S_{j_0 j_1 \cdots j_k}} e_{j_0} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}$. La différentielle $F^k_{\mathcal{S}} \to F^{k+1}_{\mathcal{S}}$ est l'application $x\ e_{j_0} \wedge \cdots \wedge e_{j_k} \sum_{a=1}^{n} \rho_{S_{j_0 j_1 \cdots j_k a}}(x)\ e_{j_0} \wedge \cdots \wedge e_{j_k} \wedge a$ oú $\rho_{S_{j_0 j_1 \cdots j_k a}} : F_{S_{j_0 j_1 \cdots j_k}} \to F_{S_{j_0 j_1 \cdots j_k a}}$ est le morphisme naturel de restriction.

En particuler l'exactitude de la suite (7.2) dit que la cohomologie de X à valeur dans F est la même que celle de X à valeur dans le complexe de faisceau $F^0_{\mathcal{S}} \to F^1_{\mathcal{S}} \to \dots$. Un cas pratique très utile est le suivant : si la cohomologie de chaque $S_{j_0 \dots j_k}$ à valeur dans $F_{|S_{j_0 j_1 \cdots j_k}}$ est concentrée en degré zéro (c'est à dire $H^{j>0}(S_{j_0 \dots j_k}, F_{|S_{j_0 \cdots j_k}}) = 0$) alors le $j^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie $H^j(X, F)$ est donné par le $j^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie du comple de A-modules

$$H^0(X, F^0_{\mathcal{S}}) \to H^0(X, F^1_{\mathcal{S}}) \to H^0(X, F^2_{\mathcal{S}}) \to \dots$$

Ce cas se produit par exemple si F est un faisceau constant et chaque $S_{j_0 j_1 \dots j_k}$ est contractile (ou une union disjointe de sous-espaces contractiles).

Formule de Künneth Soit A un *anneau commutatif unitaire*, M, N des A-modules. Soient X, Y deux espaces admettant des recouvrements finis par des fermés $(S_i)_{i\in I}$ satisfaisant la propriété :

(F): Pour tout sous-ensemble (fini) $J = j_1, \ldots, j_k \subset I$, $S_J = S_{j_1,\ldots,j_k}$ est une union disjointe finie de contractiles.

Alors on a, pour tout $n \geq 0$, une suite exacte courte :

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} H^i(X, M_X) \otimes_A H^j(Y, N_Y) \xrightarrow{\varphi} H^n(X \times Y, M \otimes_A N_{X\times Y}) \to \bigoplus_{k+l=n-1} \mathrm{Tor}_1^A(H^k(X, M_X), H^l(Y, M_Y)) \to 0$$

fonctorielle en X, Y.

En particulier, si A est un corps alors, on a un isomorphisme naturel $H^*(X, M_X) \otimes_A H^*(Y, N_Y) \xrightarrow[\sim]{\varphi} H^*(X \times Y, M \otimes_A N_{X\times Y})$. Bin entendu, ce résultat reste vrai si $H^i(X, M_X)$ (ou $H^i(Y, N_Y)$) est A-plat pour tout $i \geq 0$. De plus si $N = M = A$, alors $M \otimes_A N \cong A$. L'hypothèse **(F)** est par exemple satisfaite par tout (espace homotope à une) variété compacte. Elle est là pour s'assurer que les groupes d'homologie (et non pas cohomologie; oui on a pas vu en classe qui sont ces groupes) de X, Y sont finiment engendré en tout degré.