Corrigé du TD n°8 d'Algèbre et Topologie – Cohomologie et applications; groupe fondamental

Grégory Ginot

Dans cette feuille d'exercices, k désigne un corps. On identifie $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ et note respectivement S^n la sphère unité de dimension n et D^n la boule unité de dimension n. On note ∂D^i le bord de D^i qui est identifié à S^{i-1}.

Exercice 1 (Espaces projectifs complexes). *L'espace projectif complexe de dimension n est le quotient $\mathbb{C}P_n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\mathbb{C} - \{0\} \cong S^{2n+1}/S^1$. On note $[z_0, \dots, z_n]$ la classe de $[z_0, \dots, z_n] \neq 0$ dans $\mathbb{C}P_n$. Par définition $[z_0, \dots, z_n] = [\lambda z_0, \dots, \lambda z_n]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Les inclusions canoniques $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^i = \mathbb{C}^{n+i}$ induisent des morphismes continus $\mathbb{C}P_n \to \mathbb{C}P_{n+i}$. on notera $p : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P_n$ la projection canonique.*

(1) *Montrer que pour tout $k = 1 \dots n$, le sous-ensemble $U_k = \{[z_0, \dots, z_n] \mid z_k \neq 0\}$ est ouvert et homéomorphe à $\mathbb{C}^n$ (on pourra admettre que p est ouverte). Montrer que $\mathbb{C}P_n - U_n \cong \mathbb{C}P_{n-1}$.*

(2) *Soit $f : D^{2n} \to \mathbb{C}P_n$ l'application $(z_0, \dots, z_{n-1}) \mapsto \left[z_0, \dots, z_{n-1}, \sqrt{1 - (|z_0|^2 + \dots + |z_{n-1}|^2)}\right]$. Montrer que $f(\partial(D^{2n})) \subset \mathbb{C}P_n - U_n$ et que $f_{|D^{2n} - \partial(D^{2n})}$ est injective à valeur dans U_n. On note $f_0 = f_{|\partial(D^{2n})} : \partial(D^{2n}) \to \mathbb{C}P_n - U_n \cong \mathbb{C}P_{n-1}$. Montrer que f_0 est surjective.*

(3) *Montrer que $\mathbb{C}P_n$ est homéomorphe à $\mathbb{C}P_{n-1} \cup_{f_0} D^{2n} = \left(\mathbb{C}P_{n-1} \coprod D^{2n}\right) / (\partial D^{2n} \ni x \sim f(x) \in \mathbb{C}P_n)$, la réunion de D^{2n} et $\mathbb{C}P_{n-1}$ où on identifie les points du bord de D^{2n} avec leur image dans $\mathbb{C}P_{n-1}$. Montrer que $\mathbb{C}P_1 \cong S^2$.*

(4) *En déduire la cohomologie $H^\bullet(\mathbb{C}P_n, k_{\mathbb{C}P_n})$.*

(5) *Quelle est la cohomologie de $\mathbb{C}P_\infty = \lim_{\to} \mathbb{C}P_n$?*

Solution 1. (1) On a $p^{-1}(U_k) = \{(z_1, \dots, z_n) | z_k \neq 0\}$ qui est ouvert; d'où U_k est ouvert par définition de la topologie quotient. Soit $h : \mathbb{C}^n \to U_k$ l'application définie par $(z_1, \dots, z_n) \mapsto [z_1, \dots, z_{k-1}, 1, z_k, \dots, z_n]$ et soit $g : U_k \to \mathbb{C}^n$ l'application définie par

$$[z_1, \dots, z_n] \mapsto \left(\frac{z_1}{z_k}, \frac{z_2}{z_k}, \dots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \dots, \frac{z_n}{z_k}\right).$$

L'application est bien définie puisque $z_k \neq 0$, et si $z_i = \lambda z_i'$ (pour $i = 1 \dots n$) on a bien $\frac{z_i}{z_k} = \frac{z_i'}{z_k'}$.

Clairement $g \circ h = \mathrm{Id}$ et $h \circ g = \mathrm{Id}$ aussi puisque $[z_1, \dots, z_n] = \left[\frac{z_1}{z_k}, \frac{z_2}{z_k}, \dots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, 1, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \dots, \frac{z_n}{z_k}\right]$.

Il reste à voir que h, g sont continues. Soit V un ouvert de U_k. par définition, cela veut dire que $p^{-1}(V)$ est ouvert dans $\mathbb{C}^{n+1} - \{z_k = 0\}$; en particulier $p^{-1}(V) \cap \{z_k = 1\}$ est ouvert dans $\{z_k = 1\} \cong \mathbb{C}^n$. Par construction $h^{-1}(V) = p^{-1}(V) \cap \{z_k = 1\}$ d'où h est continue. Par ailleurs l'application composée $g \circ p : \mathbb{C}^{n+1} - \{z_k = 0\} \to \mathbb{C}^n$ est continue (car polynomiale). D'où il suit que $p^{-1}(g^{-1}(V))$ est ouvert pour tout ouvert $V \subset \mathbb{C}^n$. Donc $g^{-1}(V)$ est ouvert et g est continue. Conclusion : h et g sont des homéomorphismes inverse l'un de l'autre. On peut remarquer que $U_k = \{[z_0, \dots, z_{k-1}, 1, z_{k+1}, \dots, z_n]\}$.

on a $\mathbb{C}P_n - U_n = p(\mathbb{C}^n - 0 \oplus 0) \cong \mathbb{C}P_{n-1}$ par définition. Remarquons que

$$\mathbb{C}P_n - U_n = \{[z_0, \dots, z_{n-1}, 0] \mid z_0, \dots, z_n \text{ non tous nuls}\}.$$

(2) Pour simplifier on note $z = (z_0, \ldots, z_{n-1})$. Si $z \in \partial(D^{2n})$, alors $|z| = 1$, d'où $f(z) = [z_0, \ldots, z_{n-1}, 0] \in \mathbb{C}P_n - U_n$. Par ailleurs si $f(z) \in \mathbb{C}P_n - U_n$, alors $1 = |z|^2$ d'où $z \in \partial(D^{2n}) \cong S^{2n-1}$. De plus f est clairement continue car c'est la composée d'une fonction continue $D^{2n} \to \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ et de la projection $p : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P_n$. Clairement f n'est pas injective sur $\partial(D^{2n}) = S^{2n-1}$, puisque si $|z| = 1$ alors $f(\lambda z) = f(z)$ pour tout $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$. En revanche $f(\partial D^{2n}) = p(\mathbb{C}^n - \{0\}) = \mathbb{C}P_{n-1}$, d'où la surjectivité de $f_0 = f_{|\partial D^{2n}}$. Si $|z| < 1$, alors $f(z) \in U_n$ par définition. Soit $z, z' \in D^{2n} - \partial(D^{2n})$, i.e. $|z|, |z'| < 1$. Si $f(z) = f(z')$ alors, par définition de $\mathbb{C}P_n$, il existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tel que $z = \lambda z'$ et $\sqrt{1 - |z|^2} = \lambda\sqrt{1 - |z'|^2}$. Cette dernière relation force $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. En prenant les carrés on obtient $\lambda^2 = 1$ ce qui force $\lambda = 1$ et $z = z'$.

(3) On a un morphisme $j : (\mathbb{C}P_n - U_n) \coprod D^{2n} \to \mathbb{C}P_n$ induit par l'injection $\mathbb{C}P_n - U_n \hookrightarrow \mathbb{C}P_n$ et par $f : D^{2n} \to \mathbb{C}P_n$. Comme $f(\partial(D^{2n})) \subset \mathbb{C}P_n - U_n$, on obtient un morphisme $\tilde{j} : \mathbb{C}P_{n-1} \cup_{f_0} D^{2n} \to \mathbb{C}P_n$. De plus $f_{|D^{2n} - \partial(D^{2n})} : D^{2n} - \partial(D^{2n}) \to U_n$ est injective par la question **(2)** et surjective car pour tout $[z_0, \ldots, z_{n-1}, 1]$ on a

$$[z_0, \ldots, z_{n-1}, 1] = [\mu z_0, \ldots, \mu z_n, \sqrt{1 - \mu^2(|z|^2)}] = f(\mu z)$$

où $\mu = 1/(1 + |z|^2)$. Il est alors clair que $\tilde{j} : \mathbb{C}P_{n-1} \cup_{f_0} D^{2n} \to \mathbb{C}P_n$ et bijective. Comme $\mathbb{C}P_{n-1}$, D^{2n} et $\mathbb{C}P_n$ sont compacts, $\tilde{j}$ est un homéomorphisme.

Lorsque $n = 1$, $\mathbb{C}P_0$ est un point. D'où $\mathbb{C}P_0 \cup_{f_0} D^2 \cong D^2/(\partial(D^2)) \cong S^2$.

(4) On va appliquer un argument de type Mayer Vietoris pour des fermés où l'un des fermés sera homotope à $\mathbb{C}P_{n-1}$. Comme d'habitude on note $i_{\mathbb{C}P_{n-1}} : \mathbb{C}P_{n-1} \to \mathbb{C}P_n$ l'inclusion.

- On commence par montrer que $k_{\mathbb{C}P_{n-1}} \cong (k_{\mathbb{C}P_n})_{|\mathbb{C}P_{n-1}}$. En effet soit $U \subset \mathbb{C}P_{n-1}$ un ouvert, alors que que soit $\varepsilon > 0$, on a $U = p(p^{-1}(U) \times]-\epsilon, \epsilon[) \cap \mathbb{C}P_{n-1}$. Comme $\mathbb{C}P_{n-1}$ est compact, tout ouvert $V \in \mathbb{C}P_n$ contenant U contient un ouvert de la forme $p(p^{-1}(U) \times]-\epsilon, \epsilon[) \cap \mathbb{C}P_{n-1}$ pour un ϵ suffisament petit. Donc le préfaisceau $U \mapsto \varinjlim_{U \subset i^{-1}_{\mathbb{C}P_{n-1}}(V)} k_{\mathbb{C}P_n}(V)$ sur $\mathbb{C}P_{n-1}$ est isomorphe au préfaisceau $U \mapsto \varinjlim_{V_\epsilon = p(p^{-1}(U) \times]-\epsilon, \epsilon[)} k_{\mathbb{C}P_n}(V_\epsilon)$. Or comme U et V_ϵ ont le même nombre de composantes connexes, ce dernier préfaisceau est isomorphe au faisceau $k_{\mathbb{C}P_{n-1}}$. En particulier $k_{\mathbb{C}P_n} \cong (k_{\mathbb{C}P_{n+1}})_{|\mathbb{C}P_n}$.
- Découpons maintenant notre espace $\mathbb{C}P_n$ en deux fermés. L'idée naive serait de prendre $\mathbb{C}P_{n-1}$ et son complémentaire comme recouvrement. Evidemment ce complémentaire est ouvert, et on ne peut pas appliquer Mayer-Vietoris (on pourrait s'en tirer si on connaissait la cohomologie à support...). L'idée est alors de remarquer que $\mathbb{C}P_{n-1} \cong f_0(S^{2n-1})$. Donc l'image d'une couronne fermée contenant le bord $S^{2n-1} = \partial(D^{2n})$ de D^{2n} est un fermé de $\mathbb{C}P_n$ qui contient $\mathbb{C}P_{n-1}$. De plus il est clair qu'une telle couronne est trivialement homotope à S^{2n-1} (c'est un retract par déformation) dans D^{2n}; d'où il suit que l'image par f d'une telle couronne est homotope à $\mathbb{C}P_{n-1}$ dans $\mathbb{C}P_n$ (faire un dessin...). En termes plus mathématiques; soit $0 < \epsilon < 1$ et $C_\epsilon = \tilde{j}(\{z \in D^{2n} | \, |z| \geq 1 - \epsilon\}) \subset \mathbb{C}P_n$; c'est un fermé de $\mathbb{C}P_n$. On a une inclusion $i : \mathbb{C}P_{n-1} \hookrightarrow C_\epsilon$ et une projection $r : C_\epsilon \to \mathbb{C}P_{n-1} = \tilde{j}(S^{2n-1})$ donnée par $r(z) = \tilde{j}(z/|z|)$; cette application est bien définie puisque $\tilde{j}$ est injective sur $C_\epsilon - S^{2n-1}$ et est l'identité sur S^{2n-1}. Donc $f \circ r = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}P_{n-1}}$. De plus l'application $F : C_\epsilon \times [0,1] \to C_\epsilon$ donnée par $F(z,t) = \tilde{j}(z/(t|z| + 1 - t))$ est encore bien définie et donne une homotopie entre C_ϵ et S^{2n-1}.
- Soit alors $D_\epsilon = \tilde{j}(\{z \in D^{2n} | \, |z| \leq 1 - \epsilon\})$. C'est un fermé de $\mathbb{C}P_n$, et comme $\tilde{j}$ est injective sur $\{z \in D^{2n} | \, |z| < 1\}$, D_ϵ est homéomorphe à un disque D^{2n}. Il est en particulier contractile. On a $D_\epsilon \cap C_\epsilon = \tilde{j}(\{z \in D^{2n} | \, |z| = 1 - \epsilon\}$. De même, $D_\epsilon \cap C_\epsilon \cong S^{2n-1}$. On applique maintenant la suite exacte de Mayer Vietoris pour le recouvrement fermé de $C_\epsilon \cup D_\epsilon = \mathbb{C}P_n$. Pour simplifier les notations on omet désormais le faisceau k_X dans la notation $H^\bullet(X, k_X)$;

on écrira simlement $H^\bullet(X)$. Comme C_ϵ est homotope à $\mathbb{C}P_{n-1}$ et $D_\epsilon \cong D^{2n}$, on obtient (grace à $k_{\mathbb{C}P_n} \cong (k_{\mathbb{C}P_{n+1}})_{|\mathbb{C}P_n}$) une longue suite exacte

$$0 \to H^0(\mathbb{C}P_n) \to H^0(\mathbb{C}P_{n-1}, k) \oplus H^0(D^{2n}) \to H^0(S^{2n-1}) \to H^1(\mathbb{C}P_n) \to \cdots$$

$$\cdots \to H^i(\mathbb{C}P_n) \to H^i(\mathbb{C}P_{n-1}) \oplus H^i(D^{2n}) \to H^i(S^{2n-1}) \to H^{i+1}(\mathbb{C}P_n) \to \cdots$$

– D'après **(3)**, $\mathbb{C}P_1 \cong S^2$, d'où $H^0(\mathbb{C}P_1) \cong H^2(\mathbb{C}P_1) \cong k$ et $H^i(\mathbb{C}P_1)$ pour $i \neq 0, 2$. Comme $\mathbb{C}P_n$ est connexe, on a $H^0(\mathbb{C}P_n) = k$. la suite exacte longue de Mayer Vietoris montre alors que pour $n \geq 2$, on a pour $i > 0$, $H^i(\mathbb{C}P_n) \cong H^i(\mathbb{C}P_{n-1}) \oplus H^{i+1}(S^{2n-1})$. Comme $H^{j>0}(S^{2n-1}) = 0$ si $j \neq 2n-1$ et $H^{2n-1}(S^{2n-1}) = k$, un raisonement par récurrence donne

$$H^{2i}(\mathbb{C}P_n) = k \text{ si } 0 \leq i \leq n, \qquad H^{2i+1}(\mathbb{C}P_n) = 0 = H^{>2n}(\mathbb{C}P_n).$$

(5) Par définition $\mathbb{C}P_\infty$ est la limite inductive (filtrante) induite par les inclusions canoniques $i_{\mathbb{C}P_n} : \mathbb{C}P_n \to \mathbb{C}P_{n+1}$. On note $i_n : \mathbb{C}P_n \to \varinjlim \mathbb{C}P_i \cong \mathbb{C}P_\infty$ l'inclusion canonique. On a vu au début de la question **(4)** que $k_{\mathbb{C}P_{n-1}} \cong (k_{\mathbb{C}P_n})_{|\mathbb{C}P_{n-1}}$. Rappelons que, par définition, $(k_{\mathbb{C}P_n})_{|\mathbb{C}P_{n-1}} = i^{-1}_{\mathbb{C}P_n}(k_{\mathbb{C}P_n})$. On démontre de même qu'à la question **(4)** que, pour tout n, $k_{\mathbb{C}P_n} \cong i_n^{-1}(k_{\mathbb{C}P_\infty})$ et que l'application induite $k_{\mathbb{C}P_\infty} \to \varprojlim i_{n*} \circ i_n^{-1} k_{\mathbb{C}P_n}$ est un isomorphisme (il suffit de le vérifier en chaque germe, ce qui est une tautologie).

D'après la question **4)**, on a un isomorphisme de k-espaces vectoriels $\bigoplus_{i \geq 0} H^i(\mathbb{C}P_n, k) \cong k[x]/(x^{n+1})$ où x est de degré 2 (donc x^i est un générateur du groupe de cohomologie en degré $2i$). De plus l'application induite $i_n^\# : H^*(\mathbb{C}P_n, k) \to H^*(\mathbb{C}P_{n-1}, k)$ est un épimorphisme; il s'agit de l'application canonique $k[x]/(x^{n+1}) \to k[x]/(x^n)$. En vertu du critère de Mittag-Lefler, on obtient

$$H^\bullet(\mathbb{C}P_\infty, k_{\mathbb{C}P_\infty}) \cong \varprojlim H^\bullet(\mathbb{C}P_n, k_{\mathbb{C}P_n}) \cong \varprojlim k[x]/(x^{n+1}) \cong k[[x]].$$

En d'autres termes; $H^{2i}(\mathbb{C}P_\infty, k_{\mathbb{C}P_\infty}) \cong k$ et $H^{2i+1}(\mathbb{C}P_\infty, k_{\mathbb{C}P_\infty}) = 0$ pour tout $i \geq 0$.

Remarque 1. (a) On a utilisé que si $f : K \to X$ est injective et continue avec K compact alors $f : K \to f(K)$ est un homéomorphisme. Il suffit de montrer que $f^{-1} : f(K) \to K$ est continue. On sait que $f(K)$ est compact (image continue d'un compact). Il suffit de montrer que quel que soit $F \subset K$ un fermé, $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ est fermé. Or F est fermé dans un compact, donc compact et f continue implique que $f(F)$ est compact donc fermé (Note: dans la définition de compact on exige que l'espace soit séparé; on dit aussi Hausdorff en anglais. Sinon un compact n'est pas nécéssairement fermé...)

(b) Il ne peut pas faire de mal d'indiquer quelques résultats relatifs aux recollements d'espaces. Soient X, Y deux espaces topologiques, $Y_0 \subset Y$ un sous-espace non vide et $f : Y_0 \to X$ continue. On note nabituellement $X \cup_f Y$ l'espace $X \coprod Y / \{Y_0 \ni y \sim f(y) \in X\}$ obtenu en prenant la réunion disjointe de X et Y et en identifiant les points de Y_0 avec leur images dans X. En particulier on dispose du quotient $q : X \coprod Y \to X \cup_f Y$. La topologie sur $X \cup_f Y$ est la topologie quotient, c'est à dire $U \subset X \cup_f Y$ est ouvert si et seulement si $q^{-1}(U) \subset X \coprod Y$ est ouvert. Un ouvert de $X \coprod Y$ est évidement la réunion d'un ouvert de X et d'un ouvert de Y. Notons que q est injective sur X et sur $Y - Y_0$.

Lorsque X et Y sont compacts, et Y_0 fermé dans Y, alors $X \cup_f Y$ est encore compact (en particulier séparé; ce qui est le seul point délicat à montrer). Dans ces conditions, $q_X : X \to q(X)$ est un homéomorphisme (puisque bijective et continue sur un compact à valeur dans un séparé). Bien sur, si X et Y sont connexes, $X \cup_f Y$ l'est aussi.

Exercice 2. *Quelle est la cohomologie d'un cornet de glace (avec 1 boule)? Il est préférable de répondre avant que la glace fonde. Même question si on suppose que la boule de glace est creuse (cas peu enviable il est vrai).*

Solution 2. Après un petit dessin, on se convainc facilement qu'on peut se ramener à considèrer la réunion un demi-cône fermé et d'une boule tangente intérieurement au demi-cône suivant un cercle. Dans le deuxième cas on se ramène à la réunion un demi-cône fermé et d'une sphère tangente intérieurement au demi-cône suivant un cercle.

Les deux cas se résolvent en utilisant une suite exacte longue de Mayer Vietoris appliquée à la réunion de fermés $C \cup B$ où C est le demi-cone et B la boule (respectivement la sphère). On a alors, en notant G la glace, la longue suite exacte

$$0 \to H^0(G, k_G) \to H^0(C, k_C) \oplus H^0(B, k_B) \to H^0(S^1, k_{S^1}) \to H^1(G) \to H^1(C, k_C) \oplus H^1(B, k_B) \to$$

$$H^1(S^1, k_{S^1}) \to H^2(G) \to H^2(C, k_C) \oplus H^2(B, k_B) \to H^2(S^1, k_{S^1}) \to H^3(G) \to \cdots$$

Notons que C est contractible. Comme $H^{i>2}(S^1) = H^{i>2}(B) = H^{i>2}(C) = 0$, on a immédiatement $H^{i>2}(G) = 0$. De plus par connexité $H^0(G) \cong k$. Si B est une boule, elle est cobntractile et on obtient alors $H^0(G) \cong H^2(G) \cong k$, $H^{i\neq 0,2}(G) = 0$. Si B est une sphère, alors $H^2(G) \cong k \oplus k$, $H^0(G) \cong k$ et $H^{i\neq 0,2}(G) = 0$. Evidemment si la glace a fondue, elle est homotope à un point et sa cohomologie est triviale...

Remarque 2. On remarque facilement, dans le cas où la boule est pleine qu'en contractant la boule sur un point, on obtient une homotopie entre le cornet de glace et une sphère. Ceci donne immédiatement la cohomologie du cornet dans ce cas là et est de fait une démonstration tout à fait valable. On peut remarquer que dans le cas où la boule a un trou (intérieur), on a une homotopie entre le cornet et le cas où la sphère est creuse. De plus ce dernier cas est homéomorphe à une sphère avec une membrane intérieure.

Exercice 3 (Cup produit). *On suppose $k = \mathbb{C}$ et soit X une variété C^∞ (de dimension n).*

(1) *Rappeler pourquoi il y a un isomorphisme naturel $H^\bullet(X, \mathbb{C}_X) \cong H^\bullet(\Gamma(X, DR_X^\bullet))$.*

(2) *Soit $(U_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ un recouvrement de X par des ouverts tels que $U_i \cong V_i$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. Soit $\omega_i \in DR^p(V_i)$, $\nu_i \in DR^q(V_i)$. Montrer que le produit extérieur $\omega_i \wedge \nu_i \in DR^{p+q}(V_i)$ induit une multiplication associative sur $H^\bullet(X, \mathbb{C}_X)$. On note $\cup$ cette multiplication et on l'appelle le cup produit.*

(3) *Montrer que le cup produit est gradué commutatif, c'est à dire que, pour tout $a \in H^p(X, \mathbb{C}_X)$, $b \in H^q(X, \mathbb{C}_X)$, on a*

$$a \cup b = (-1)^{pq} b \cup a.$$

L'algèbre $(\bigoplus H^i(X, \mathbb{C}_X), \cup)$ est dite graduée commutative. Montrer que le cup produit est naturel; c'est à dire que si $\phi : X \to Y$ est une application continue, alors $\phi^\# : H^\bullet(Y, \mathbb{C}_Y) \to H^\bullet(X, \mathbb{C}_X)$ est un morphisme d'algèbres.

Solution 3. (1) C'est dans le poly du cours. Essentiellement, en recouvrant X par des ouverts U_i tels qu'il existe des homéomorphismes $h_i : U_i \cong \mathbb{R}^n$ (ce qui est possible puisque X est une variété), $DR_X^\bullet$ est le recollement des faisceaux $(h_i^{-1})_*(DR_{\mathbb{R}^n}^\bullet)$. Or $DR_{\mathbb{R}^n}^\bullet)$ est le complexe de Koszul $\mathfrak{K}(C^\infty(\mathbb{R}^n), (\partial_1, \ldots, \partial_n))$ où ∂_i est la dérivée partielle par rapport à la variable x_i. En particulier les fonctions localement constantes forment un sous-espace de $DR_{\mathbb{R}^n}^0(U)$ pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Il en suit un morphismes de complexes de faisceaux $k_{\mathbb{R}^n} \to DR_X^\bullet$ où $k_{\mathbb{R}^n}$ est concentré en degré 0. Par recollement, on en déduit un morphisme de faisceaux $k_X \to DR_X^\bullet$. Par le lemme de Poincaré, $k_{\mathbb{R}^n} \to DR_X^\bullet$ est un quasi-isomorphisme, d'où il suit que $k_X \to DR_X^\bullet$ aussi (il suffit de passer aux germes et de remarquer que tout point x contient un voisinage homéomorpheà $\mathbb{R}^n$). De plus, d'après le cours les faisceaux $DR_{\mathbb{R}^n}^i \cong C_{\mathbb{R}^n}^\infty \otimes_{k_\mathbb{R}} \Lambda^i(k_\mathbb{R})^n$ sont c-mous (c-soft en anglais). Il suit que $DR_X^\bullet$ est une résolution de k_X par des faisceaux c-mous. Par conséquent (Théorème 5.5.2 du poly du cours) on a un isomorphisme $H^\bullet(X, \mathbb{C}_X) \cong H^\bullet(\Gamma(X, DR_X^\bullet))$.

(2) On peut supposer $V_i = \mathbb{R}^n$ puisque V_i et $\mathbb{R}^n$ sont homéomorphes. Le produit extérieur $\Lambda^p(k_\mathbb{R})^n \otimes \Lambda^q(k_\mathbb{R})^n \to \Lambda^{p+q}(k_\mathbb{R})^n$ donne alors un morphisme $DR^p(V_i) \otimes DR^q(V_i) \to DRp+q(V_i)$ défini, pour $f, g \in C^\infty_{V_i}$, $d_x \in \Lambda^p(k_\mathbb{R})^n$, $dy\Lambda^q(k_\mathbb{R})^n$, par $fdx \otimes gdy \mapsto (fg)dx \wedge dy$. Il est clair que ce produit est associatif. Par recollement on en déduit le résultat demandé.

(3) Clairement, pour $f, g \in C^\infty_{V_i}$, $d_x \in \Lambda^p(k_\mathbb{R})^n$, $dy\Lambda^q(k_\mathbb{R})^n$, par $(fg)dx \wedge dy = (-1)^{pq}(gf)dy \wedge dx$. On en déduit que $(H^\bullet(X, \mathbb{C}_X), \cup)$ est graduée commutative. Pour la naturalité, il suffit de vérifier le résultat pour tout $\phi_i : V_i \to W_i$ où V_i, W_i sont des ouverts convexes de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, on remarque que $\phi_i^\#$ est donné par l'application $\phi_i^* : DR^\bullet_{W_i} \to DR^\bullet_{V_i}$ qui vérifie $fdx \mapsto f \circ \phi_i d(x \circ \phi_i)$; en effet il suffit de voir que les ϕ_i induisent un morphisme de complexes $\mathbb{C}_Y[-1] \to DR^\bullet_Y \to \phi^{-1}\mathbb{C}_Y \to \phi_i^{-1} DR^\bullet_Y \cong \mathbb{C}_X \to DR^\bullet_X$. Mias alors

$$\varphi_i^*(fdx) \cup \varphi_i^*(gdy) = (f \circ \varphi_i^{-1} g \circ \varphi_i^{-1})dx \circ \varphi_i^{-1} \wedge dy \circ \varphi_i^{-1} = (fdx \cup gdy) \circ \varphi_i^{-1} = \varphi_i^*(fdx \cup gdy)$$

ce qui termine la preuve.

Remarque 3. Le cup-produit se définit dans une bien plus grande généralité. En fait pour tout anneau A et espace X, il existe un cup-produit gradué commutatif $H^p(X, A_X) \otimes H^q(X, A_X) \to H^{p+q}(X, A_X)$. On peut déjà remarqué que les démonstrations pour $\mathbb{R}_X$ à la place de $\mathbb{C}_X$ sont identiques.

Exercice 4 (Degré d'une application et applications). *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $[S^n]$ un générateur du $\mathbb{Z}$-module $H^n(S^n, \mathbb{Z}_{S^n}) \cong \mathbb{Z}$.*

(1) *Soit $j : \mathbb{Z}_{S^n} \to \mathbb{R}_{S^n}$ le morphisme naturel de faisceaux.*

- **i)** *Montrer que $w_n := H^n(j)([S^n])$ est un générateur de $H^n(S^n, \mathbb{R}_{S^n})$.*
- **ii)** *Soit $f : S^n \to S^n$. Montrer qu'il existe $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ tel que $f^\#(w_n) = \deg(f) w_n$ et que $\deg(f) = \deg(g)$ si f et g sont homotopes. Ce nombre $\deg(f)$ s'appelle le degré de f.*

(2) (Structures de groupes sur les sphères) *On va montrer qu'il n'y a pas de structures de groupe topologique sur les sphères S^{2n} pour $n > 0$.*

- **i)** *Montrer que $H^k(S^m \times S^m, \mathbb{R}_{S^m \times S^m}) \cong \bigoplus_{i+j=k} H^i(S^m, \mathbb{R}_{S^m}) \otimes H^j(S^m, \mathbb{R}_{S^m})$ et que pour toute application $\mu : S^m \times S^m \to S^m$, il existe $\deg_1(\mu), \deg_2(\mu) \in \mathbb{R}$ tels que $\mu^\#(w_m) = \deg_1(\mu) w_m \otimes 1 + \deg_2(\mu) 1 \otimes w_m$.*
- **ii)** *Montrer que si $\mu : S^m \times S^m \to S^m$ admet une unité, alors $\deg_1(\mu) = \deg_2(\mu) = 1$.*
- **iii)** *En utilisant que $w_n \cup w_n = 0$, montrer que $\deg_1(\mu)\deg_2(\mu) = 0$ si n est pair (on pourra utiliser que le cup-produit est gradué commutatif).*
- **iv)** *Conclure.*

Solution 4. (1) i) La suite exacte courte de groupes abéliens $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to 0$ induit une suite exacte courte de faisceaux $0 \to \mathbb{Z}_X \to \mathbb{R}_X \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z})_X \to 0$ pour tout espace X (il suffit de passer aux germes pour le vérifier). Cette suite de faisceaux induit une suite exacte longue en cohomologie

$$\cdots \to H^i(S^n, (\mathbb{R}/\mathbb{Z})_{S^n}) \to H^{i+1}(S^n, \mathbb{Z}_{S^n}) \to H^{i+1}(S^n, \mathbb{R}_{S^n}) \to H^{i+1}(S^n, (\mathbb{R}/\mathbb{Z})_{S^n}) \to \dots$$

Comme $H^{i \neq 0,n}(S^n, E_{S^n}) = 0$ et $H^n(S^n, E_{S^n}) \cong E$, on en déduit pour $n > 1$ et $i = n-1$, que $H^n(S^n, \mathbb{Z}_{S^n}) \to H^n(S^n, \mathbb{R}_{S^n})$ est injective. Il suit que $H^n(j)([S^n]) \neq 0$, donc engendre le $\mathbb{R}$-module $H^n(S^n, \mathbb{R}_{S^n}) \cong \mathbb{R}$. Pour $n = 1$, on obtient la suite exacte longue

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to H^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1}) \to H^1(S^1, \mathbb{R}_{S^1}) \to \dots$$

Comme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un épimorphisme, $H^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1}) \to H^1(S^1, \mathbb{R}_{S^1})$ est injective et on conclut de même que $H^1(j)([S^1])$ est un générateur de $H^1(S^1, \mathbb{R}_{S^1})$.

ii) Toute application continue $f : S^1 \to S^1$ induit un morphisme naturel $f^\# : H^n(S^n, F) \to H^n(S^n, F)$ pour tout faisceau $F \in \mathrm{Mod}(k_{S^n})$. Par naturalité il en découle un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^n(S^n, \mathbb{Z}_{S^n}) & \xrightarrow{f^\#} & H^n(S^n, \mathbb{Z}_{S^n}) \\ {\scriptstyle H^n(j)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H^n(j)} \\ H^n(S^n, \mathbb{R}_{S^n}) & \xrightarrow{f^\#} & H^n(S^n, \mathbb{R}_{S^n}). \end{array}$$

Comme $w_n = H^n(j)([S^n])$, il suit que $f^\#(w_n) = f^\# \circ H^n(j)([S^n]) = H^n(j) \circ f^\#([S^n])$. Or, comme $[S^n]$ est un générateur du $\mathbb{Z}$-module $H^n(S^n, \mathbb{Z}_{S^n})$, il existe un entier $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ tel que $f^\#([S^n]) = \deg(f)[S^n]$. Par linéarité de $H^n(J)$, on en déduit $f^\#(w_n) = \deg(f)w_n$. Comme les faisceaux considérés sont localement constants, on sait que $f^\#$ ne dépend que du type d'homotopie de f, c'est à dire $f^\# = g^\#$ si f et g sont homotopes.

(2) i) Comme $\mathbb{R}$ est un corps, on peut appliquer le Théorème de Künneth : $H^n(X \times Y, \mathbb{R}_{X\times Y}) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(X, \mathbb{R}_X) \otimes H^q(Y, \mathbb{R}_Y)$. En particulier on applique ce résultat à $X = Y = S^m$. Pour $n = m$, on obtient

$$H^m(S^m \times S^m, \mathbb{R}_{S^m\times S^m}) \cong H^m(S^m, \mathbb{R}_{S^m}) \otimes H^0(S^m, \mathbb{R}_{S^m}) \oplus H^0(S^m, \mathbb{R}_{S^m}) \otimes H^m(S^m, \mathbb{R}_{S^m}).$$

Or $H^0(S^m, \mathbb{R}_{S^m}) = \Gamma(S^m, \mathbb{R}) = \{s : S^m \to \mathbb{R} \text{ localement constantes}\} \cong \mathbb{R}$ (car S^m est connexe). Un générateur est donc donné par la fonction constante égale à 1, que l'on notera par abus 1 dans la suite. Il suit que $H^m(S^m, \mathbb{R}_{S^m}) \otimes H^0(S^m, \mathbb{R}_{S^m} \cong \mathbb{R}$ est engendré par $w_m \otimes 1$ et de même $H^0(S^m, \mathbb{R}_{S^m}) \otimes H^m(S^m, \mathbb{R}_{S^m}) \cong \mathbb{R}$ est engendré par $1 \otimes w_m$. D'où $H^m(S^m \times S^m, \mathbb{R}_{S^m\times S^m}) \cong \mathbb{R}\, w_m \otimes 1 \oplus \mathbb{R}\, 1 \otimes w_m$. Par conséquent pour tout $\mu : S^m \times S^m \to S^m$, $\mu^\#(w_n) = \deg_1(\mu)w_m \otimes 1 + \deg_2(\mu)1 \otimes w_m$ et de plus $\deg_1(\mu), \deg_2(\mu)$ sont uniques (et indépendant du type d'homotopie de μ). Ceci termine la question.

Faisons cependant une remarque très utile pour la suite. Soit $x \in S^n$ un point. On a un homéomorphisme $S^m \cong S^m \times \{x\}$ qui induit une injection $i_x : S^m \cong S^m \times \{x\} \xrightarrow{\mathrm{Id}\times i} S^m \times S^m$ en notant $i : \{x\} \hookrightarrow S^1$ l'injection canonique. De même, en notant $j : S^m \to \{x\}$ l'application constante on a un morphisme $j_x : S^m \times S^m \xrightarrow{\mathrm{Id}\times j} S^m \times \{x\} \cong \mathbb{S}^m$. Par naturalité de l'isomorphisme de Künneth, on obtient, pour tout i, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^i(S^m \times S^m, \mathbb{R}_{S^m\times S^m}) & \xrightarrow{\simeq} & \bigoplus_{p+q=i} H^p(S^m, \mathbb{R}_{S^m}) \otimes H^q(S^m, \mathbb{R}_{S^m}) \\ {\scriptstyle (\mathrm{Id}\times i)^\#}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\otimes i^\#} \\ H^i(S^m \times \{x\}, \mathbb{R}_{S^m\times\{x\}}) & \xrightarrow{\simeq} & \bigoplus_{p+q=i} H^p(S^m, \mathbb{R}_{S^m}) \otimes H^q(\{x\}, \mathbb{R}_{\{x\}}) \\ {\scriptstyle (\mathrm{Id}\times j)^\#}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\otimes j^\#} \\ H^i(S^m \times S^m, \mathbb{R}_{S^m\times S^m}) & \xrightarrow{\simeq} & \bigoplus_{p+q=i} H^p(S^m, \mathbb{R}_{S^m}) \otimes H^q(S^m, \mathbb{R}_{S^m}) \end{array}$$

Etant donné que $H^q(\{x\}, \mathbb{R}_{\{x\}})$ est concentré en degré 0, $j^\# : H^n(\{x\}, \mathbb{R}_{\{x\}}) \to H^n(S^m, \mathbb{R}_{S^m})$ et $i^\# : H^n(S^m, \mathbb{R}_{S^m}) \to H^n(\{x\}, \mathbb{R}_{\{x\}})$ sont nuls en degré $n > 0$ et égaux à l'identité en degré 0 (par connexité de S^n comme le montre un calcul direct en interprétant $H^0(X, k_X) = \Gamma(X, k_X)$). Il suit alors du haut du diagramme et des calculs précédents que

$$i_x^\#(\lambda w_m \otimes 1 + \mu 1 \otimes w_m) = \lambda w_m.$$

De même le bas du diagramme donne

$$j_x^\#(w_m) = w_m \otimes 1.$$

ii) Soit e une unité; alors $\mu(x,e)=x$ pour tout $x\in S^m$. Soit $i_1 : S^m \to S^m \times S^m$ l'application $x\mapsto(x,e)$. Alors $\mu\circ i_1 = \mathrm{Id}_{S^m}$. Comme $\mathrm{Id}^{\#}=\mathrm{Id}$, on a $\deg(\mathrm{Id}_{S^m})=\deg(\mu\circ i_1)=1$. C'est à dire

$$w_m=(\mu\circ i_1)^{\#}(w_m)=i_1^{\#}\big(\mu^{\#}(w_m)\big) \quad = \quad i_1^{\#}\big(\deg_1(\mu)w_m\otimes 1+\deg_2(\mu)1\otimes w_m\big) \tag{4.1}$$

D'après la remarque à la fin de la question **i)**, on a $i_1^{\#}(w_m\otimes 1)=w_m$ et $i_1^{\#}(1\otimes w_m)=0$ (car $i_1=i_e$). D'où l'équation (4.1) donne $\deg_1(\mu)=1$ par linéarité de $i_1^{\#}$. En considérant l'aplication $x\mapsto(x,e)$ on obtient de même $\deg_2(\mu)=1$.

iii) On a $w_m\cup w_m\in H^{2m}(S^m,\mathbb{R}_{S^m})=0$ (on utilise les notations et résultats de l'exercice 3). Par naturalité du produit cup, on en déduit que $0=\mu^*(w_m\cup w_m)=\mu^*(w_m)\cup\mu^*(w_m)$. Or, si m est pair, le cup produit de $H^\bullet(S^m\otimes S^m,\mathbb{R}_{S^m\times S^m})$ est commutatif puisque les seules classes de cohomologie non nulles sont concentrées en degré pair et que le cup-produit est gradué commutatif. On peut donc appliquer la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\mu^*(w_m)\cup\mu^*(w_m) &= (\deg_1(\mu)w_m\otimes 1+\deg_2(\mu)1\otimes w_m)\cup(\deg_1(\mu)w_m\otimes 1+\deg_2(\mu)1\otimes w_m)\\ &= 2\deg_1(\mu)\deg_2(\mu)w_m\otimes 1\cup 1\otimes w_m+\deg_1(\mu)^2 w_m\otimes 1\cup w_m\otimes 1\\ &\quad +\deg_2(\mu)1\otimes w_m\cup 1\otimes w_m.\end{aligned}$$

Par naturalité de la formule de Künneth, on trouve $x\otimes y\cup x'\otimes y'=x\cup x'\otimes y\cup y'$; d'où $\mu^*(w_m)\cup\mu^*(w_m)=2\deg_1(\mu)\deg_2(\mu)w_m\otimes w_m+0$.Il suit que $\deg_1(\mu)\deg_2(\mu)=0$.

iv) Si S^m admet une structure de groupe topologique, il admet en particulier une multiplication continue $\mu : S^m\times S^m\to S^m$ et une unité e. D'après **ii)**, on doit avoir $\deg_1(\mu)=1=\deg_2(\mu)$ et par **iii)**, on doit avoir $\deg_1(\mu)=0$ ou $\deg_2(\mu)=0$ ce qui est contradictoire.

Remarque 4. On peut remarquer que la preuve n'utilise jamais l'associativité de la multiplication; juste l'existence d'une unité. De fait, comme les constructions sont invariantes à homotopie près; on a seulement besoin de l'existence d'une unité à homtopie près. On peut montrer qu'une telle chose existe dans les cas impairs si et suelement si $n=1,3,7$. Notons qu'on utilise sans l'avoir démontrer que le cup-produit est compatible à l'isomorphisme de Künneth.

Exercice 5 (**Théorèmes de séparation de Jordan généralisés**). *Dans ce qui suit on considère les groupes de cohomologie d'un espace X à coefficient dans le faisceau constant k_X (qu'on oublie dans les notations).*

(1) *Soit $f : D^r\to S^n$ une immersion. Montrer que $H^\bullet(S^n-f(D^r))\cong H^\bullet(\{*\})$ et en déduire que $S^n-f(D^r)$ est connexe (on pourra raisonner par récurrence, écrire $D^n\cong D^{n-1}\times I$ et considérer les fermés $D^{n-1}\times[0,1/2]$ et $D^{n-1}\times[1/2,1]$).*

(2) *Soit $f : S^r\to S^n$. Montrer que $H^\bullet(S^n-f(S^r))\cong H^\bullet(S^{n-r-1})$ si $r<n$.*

(3) *En déduire que si $r=n-1$, alors $S^n-f(S^{n-1})$ a exactement deux composantes connexes qui sont acycliques et dont les bords sont exactement $f(S^{n-1})$.*

(4) *Déduire de* **(2)** *que si $f : S^{n-1}\to\mathbb{R}^n$ est une immersion avec $n\geq 2$, alors $\mathbb{R}^n-f(S^{n-1})$ a deux composantes connexes. De plus une d'entre elle est bornée et acyclique et l'autre est non-bornée.*

Solution 5. Rappelons qu'une application continue $f : X\to Y$ est dite *une immersion* si elle induit un homéomorphisme $f : X\to f(X)$ sur son image. En d'autres termes, elle est injective et la bijection inverse $f^{-1} : f(X)\to X$ est également continue.

(1) Bien que le résultat soit intuitif, la démonstration de cette question est assez délicate. Commençons par emarquer que si $H^\bullet(X)\cong H^\bullet(\{*\})$, alors $H^0(X)\cong k$ d'où, comme $H^0(X)$ a la dimesnison du nombre de composantes connes de X, on a X est connexe. Il nous reste donc à montrer que $H^\bullet(S^n-f(D^r))\cong H^\bullet(\{*\})$. On raisonne par récurrence sur r (avec $f : D^r\to S^n$). Pour $r=0$, D^r est un point et $S^n-f(D^0)$ est S^n privé d'un point qui est homéomorphe à D^n, donc

contractile. Par conséquent $H^\bullet(S^n - f(D^0)) \cong H^\bullet(\{*\})$ (puisque la cohomologie à valeur d'un faisceau localement constant est invariant par homotopie). Supposons maintenant avoir démontré le résultat pour toute immersion $D^{r-1} \to S^n$ avec $r \geq 1$. Soit $f : D^r \to S^n$ une immersion. On a un homéomorphisme $D^r \cong I^r$ (où $I = [0,1]$) d'où $D^r \cong D^{r-1} \times I$ est recouvert par les fermés $D^+ =^{r-1} \times [0,1/2]$ et $D^- = D^{r-1} \times [1/2,1]$. Leur intersection est $D^{r-1} \times \{1/2\} \cong D^{r-1}$. Le recouvrement fermé précédent donne un recouvrement ouvert de $S^n - f(D^{r-1} \times \{1/2\}) = U^+ \cup U^-$ en notant $U_= = S^n - f(D^+)$, $U^- = S^n - f(D^-)$. On a $U^+ \cap U^- = S^n - f(D^r)$

Soit $x \in S^n - f(D^r)$. On veut montrer que $H^\bullet(S^n - f(D^r)) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(\{x\})$ où l'application est induite par l'inclusion. On a $H^{i>0}(\{x\}) = 0$ et $H^0(\{x\}) \cong k$ qui s'identifie aux fonctions constantes sur la composante connexe de x dans $S^n - f(D^r)$ (respectivement de $S^n - f(D^\pm)$), nulles sur les autres composantes connexes. On note désormais (pour tout sous-espace $X \subset S^n$ contenant x) $\tilde{H}^\bullet(X) := H^\bullet(X)/H^\bullet(\{x\})$. On constate alors que $\tilde{H}^{i>0}(X) = H^{i>0}(X)$ et que $\tilde{H}^0(X) \cong k^{\#X - 1}$ où $\#X$ est le nombre de composantes connexes de X. Par conséquent, $H^\bullet(X) \cong H^\bullet(\{*\})$ est équivalent à $\tilde{H}^\bullet(X) = 0$.

Puisque $U^+ \cap U^- = S^n - f(D^r)$ ainsi que les espaces $U^\pm = S^n - f(D^\pm)$, $U^+ \cup U^- = S^n - f(D^{r-1} \times \{1/2\})$ contiennent x, la suite exacte de Mayer-Vietoris donne la suite exacte longue

$$0 \to \tilde{H}^0(U^+ \cup U^-) \to \tilde{H}^0(U^+) \oplus \tilde{H}^0(U^-) \to \tilde{H}^0(U^+ \cap U^-) \to \tilde{H}^1(U^+ \cup U^-) \to \dots$$

$$\dots \to \tilde{H}^i(U^+ \cup U^-) \to \tilde{H}^i(U^+) \oplus \tilde{H}^i(U^-) \to \tilde{H}^i(U^+ \cap U^-) \to \tilde{H}^{i+1}(U^+ \cup U^-) \to \dots$$

On note $p^\pm : \tilde{H}^i(U^\pm) \to \tilde{H}^i(U^+ \cap U^-)$ les applications dans la suite précédente. Supposons qu'il existe $\alpha_0 \neq 0$ dans $\tilde{H}^i(U^+ \cap U^-)$. Par hypothèse de récurrence on sait que $\tilde{H}^i(U^+ \cup U^-) = 0$. De la suite précédente, on déduit qu'il existe α_1 dans $\tilde{H}^i(U^+)$ ou dans $\tilde{H}^i(U^-)$ tel que $p^+(\alpha_1) = \alpha_0$ (ou $p^-(\alpha_1) = \alpha_0$). En particulier $\alpha_1 \neq 0$. On note p_1, celle des applications $p^\pm$ telle que $p(\alpha_1) = \alpha_0$. Comme, $D^{r-1} \times [a,b] \cong D^r$ (avec $a < b$), on peut refaire le même raisonement avec $S^n - f(D^+)$ à la place de $S^n - f(D^r)$. On obtient donc qu'il existe $\alpha_2 \neq 0$ dans $\tilde{H}^i(S^n - f(D^{r-1} \times [a_2, b_2]))$ (où $b_2 - a_2 = 1/2^2$) et tel que $p_2(\alpha_2) = \alpha_1$. En itérant ce raisonement, on obtient une suite $0 \neq \alpha_n \in \tilde{H}^i(S^n - f(D^{r-1} \times [a_n, b_n]))$ avec $b_n - a_n = 1/2^n$, les segments $[a_j, b_j]$ forment une suite décroissante et, pour tout n, $p_n(\alpha_n) = \alpha_{n-1}$. Par un raisonement similaire à celui de la question **(5)** de l'Exercice 1, on montre que l'on a

$$\lim_{\leftarrow} \tilde{H}^\bullet(S^n - f(D^{r-1} \times [a_j, b_j])) \cong \tilde{H}^\bullet\left(\lim_{\rightarrow} (S^n - f(D^{r-1} \times [a_j, b_j]))\right).$$

La suite des α_i fournit donc un élément non nul dans $\lim_{\leftarrow} \tilde{H}^i(S^n - f(D^{r-1} \times [a_j, b_j]))$. Or $\lim_{\rightarrow} (S^n - f(D^{r-1} \times [a_j, b_j])) \cong S^n - f(D^{r-1} \times z)$ où z est le point d'intersection de la suite de compacts emboités $[a_j, b_j]$. Par l'hypothèse de récurence, $\tilde{H}^i(S^n - f(D^{r-1} \times z)) \cong 0$. Ceci est une contradiction ce qui force que tous les éléments de $\tilde{H}^\bullet(S^n - f(D^r))$ sont nuls.

(2) Supposons $n > 0$. Soit D_r^+, D_r^- les hémisphères supérieurs et inférieurs de S^r. Par Mayer-Vietoris, on a une suite exacte longue

$$\dots \to \tilde{H}^i(S^n - f(D_r^+)) \oplus \tilde{H}^i(S^n - f(D_r^-)) \to \tilde{H}^i(S^n - f(S^r)) \to$$

$$\tilde{H}^{i+1}(S^n - f(S^{r-1})) \to \tilde{H}^{i+1}(S^n - f(D_r^+)) \oplus \tilde{H}^{i+1}(S^n - f(D_r^-)) \to \dots$$

Les groupes $\tilde{H}$ (dits réduits) sont pris par rapport à l'inclusion de n'importe quel point de l'intersection $S^n - f(S^r)$. Par le **(1)**, on sait que $\tilde{H}^i(S^n - f(D_r^\pm)) = 0$. Par récurrence descendante, il suffit alors de montrer le résultat pour $r = 0$. Comme S^0 est la réunion disjointe de 2 points, on $S^n - f(S^0) \cong S^n - \{N, S\} \cong \mathbb{R}^n - \{S\}$ en notant N, S les poles nord et sud. Or $\mathbb{R}^n - \{S\}$ est homotope à S^{n-1} d'oú le résultat.

(3) Si $r = n-1$, par **(2)**, on a $H^0(S^n - f(S^{n-1})) \cong H^0(S^0) \cong k \oplus k$. D'oú $S^n - f(S^{n-1})$ a exactement deux composantes connexes (puisque son H^0 est de dimesnion 2). De plus, $H^{i>0}(S^n - f(S^{n-1})) \cong$

0. Si Z_1, Z_2 sont les deux composantes connexes de $S^n - f(S^{n-1})$, on a $H^i(S^n - f(S^{n-1})) \cong H^i(Z_1) \oplus H^i(Z_2)$ d'où Z_1 et Z_2 sont acyliques (c'est à dire à cohomologie nulle). Le dernier point est un argument de topologie. On a $f(S^{n-1})$ compact, donc fermé dans S^n, donc son complémentaire est ouvert dans S^n. De plus tout point x de S^n admet un voisinage homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, donc incluse dans une des composantes connexes Z_1, Z_2 si $x \in S^n - f(S^{n-1})$. il suit que le bord $\partial Z_i \subset f(S^{n-1})$. Montrons l'inclusion inverse. Si il existe $y \in f(S^{n-1})$ tel que $y \notin \partial Z_1$, alors il existe un voisinage B de y homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ dans $S^n - Z_1 = Z_2$. Soit W un voisinage de $f^{-1}(y)$ dans S^{n-1}, homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^{n-1}$ tel que $f(W) \subset B$. Comme $S^{n-1} - W \cong D^{n-1}$, par **(1)** on a $S^n - f(S^{n-1} - W)$ est connexe. Il est aussi ouvert et par hypothèse de plus

$$S^n - f(S^{n-1} - W) = \big(Z_1 \cap S^n - f(S^{n-1} - W)\big) \cup \big((Z_2 \cup B) \cap S^n - f(S^{n-1} - W)\big)$$

est une réunion disjointe de deux ouverts de $S^n - f(S^{n-1} - W)$. C'est donc une contradiction, ce qui prouve que $\partial Z_1 = S^n - f(S^{n-1})$ et de même pour ∂Z_2.

(4) On a $f(S^{n-1}) \subset \mathbb{R}^n \subset S^n$ oú on a identifié $\mathbb{R}^n = S^n - \{N\}$. D'après **(3)**, $S^n - f(S^{n-1})$ a deux composantes connexes acycliques Z_1, Z_2 avec par exemple $N \in Z_1$ (puisque $N \notin S^n - f(S^{n-1})$). Il est alors clair que $\mathbb{R}^n - f(S^{n-1})$ est la réunion disjointe des ouverts $(Z_1 - \{N\})$ et Z_2. La cohomologie de Z_2 est acyclique. De plus Z_2 est fermé dans le compact S^n, donc compact, donc borné. Par construction $Z_1 - \{N\}$ est non borné (c'est un voisinage du point à l'infini...).

Exercice 6. *On considère trois sphères de Riemann S_1, S_2 et S_3 plongées dans $\mathbb{R}^3$. On suppose qu'elles sont deux à deux tangentes extérieurement et on note $x_{ij} = S_i \cap S_j$. Soit $X = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.*

(1) *Calculer la cohomologie $H^i(X, k_X)$.*

(2) *Calculer le groupe fondamental $\pi_1(X, x_{ij})$ (on pourra utiliser Van Kampen).*

Solution 6. Il faut bien sur commencer par faire un dessin.

(1) On considère le recouvrement $X = S_1 \cup Y$ où $Y = S_2 \cup S_3$. Les espaces S_1 et Y sont fermés dans X. De plus $S_1 \cap Y$ est réduit aux 2 points x_{12} et x_{13}, simplement notés y, z dans la suite. On applique la suite exacte de Mayer-Vietoris :

$$0 \to H^0(X, k_X) \to H^0(S_1, k_{S_1}) \oplus H^0(Y, k_Y) \to H^0(y, k_y) \oplus H^0(z, k_z) \to H^1(X, k_X) \to$$

$$H^1(S_1, k_{S_1}) \oplus H^1(Y, k_Y) \to H^1(y, k_y) \oplus H^1(z, k_z) \to H^2(X, k_X) \to H^2(S_1, k_{S_1}) \oplus H^2(Y, k_Y) \to$$

$$\cdots \to H^n(y, k_y) \oplus H^n(z, k_z) \to H^{n+1}(X, k_X) \to H^{n+1}(S_1, k_{S_1}) \oplus H^{n+1}(Y, k_Y) \to \dots$$

On a bien sur utiliser que $H^i(\{x, y\}, k_{\{x,y\}}) \cong H^i(y, k_y) \oplus H^i(z, k_z)$ ce qui provient de l'isomorphisme de faisceaux $k_{\{x,y\}} \cong k_x \oplus k_y$ (cf TD 6, Exercice 4). Il nous faut maintenant calculer la cohomologie de $Y = S_2 \cup S_3$. On applique évidemment Mayer-Vietoris au recouvrement par les fermés S_2 et S_3. On a $S_2 \cong S^3 \cong S_3$, $H^i(S_j, k_{S_j}) \cong 0$ si $i \neq 0, 2$ et k sinon et Y est connexe, d'où $H^0(Y, k_Y) \cong k$. De plus $S_2 \cap S_3$ est réduit à un point donc sa cohomologie est nulle en degrés > 0. On obtient alors d'après la suite exacte de Mayer Vietoris, une suite longue

$$0 \to k \to k \oplus k \to k \to H^1(Y, k_Y) \to 0 \to 0 \to H^2(Y) \to k \oplus k \to 0 \to \dots$$

de laquelle on déduit $H^0(Y, k_Y) \cong k$ $H^2(Y, k_Y) \cong k \oplus k$ et $H^{i \neq 2}(Y, k_Y) = 0$.

On applique les calculs précédents et la connaissance de la cohomologie de S_1 et d'un point à la suite exacte longue de Mayer-Vietoris pour X. On obtient

$$0 \to k \to k \oplus k \to k \oplus k \to H^1(X, k_X) \to 0 \to 0 \to H^2(X, k_X) \to k^3 \to 0 \cdots \to 0 \to H^n(X, k_X) \to 0 \to \dots$$

Conclusion : $H^{i \geq 3}(X, k_X) = 0$, $H^0(X, k_X) \cong k \cong H^1(X, k_X)$ et $H^2(X, k_X) \cong k^3$.

(2) On ne peut pas utiliser le recouvrement précédent pour calculer $\pi_1(X, x_{ij})$ car l'intersection n'est pas connexe. On remarque d'abord que X étant connexe par arcs, tous les $\pi_1(X, x_{ij})$ sont isomorphes entre eux. Il suffit donc de calculer $\pi_1(X, x_{12})$. On commence par calculer $\pi_1(S_1, x_{12})$. On écrit $S_1 = D_+ \cup D_-$ où D_+, D_- sont deux hémisphères ouverts contenant x_{12} et tels que leur intersection est une couronne C contenant x_{12} homéomorpheà un cylindre $]0,1[\times S^1$ (Faire un dessin). On applique le Théorème de Van Kampen : $\pi(S_1, x_{12}) \cong \varinjlim \pi_1(U_i, x_{12})$ où $U_1 = D_+, U_2 = D_-, U_3 = C$. Comme U_1, U_2 sont contractiles, leurs groupes fondamentaux sont nuls donc $\pi_1(S_1, x_{12}) \cong 0$. Un raisonement similaire donne également que $\pi_1(Y, x_{12}) = 0$.

Afin de pouvoir calculer $\pi_1(X, x_{12})$, on note γ un arc de cercle dans S_1 joignant x_{12} et x_{23}. On a le recouvrement par des ouverts $X = U_1 \cup U_2$ où U_1 est un ouvert contenant S^1 et qui lui est homotope obtenu en rajoutant deux petits disques ouverts autour de x_{12}, x_{23} à S_1. De même, soit $D_\gamma \subset S^1$ un disque ouvert de S_1 contenant γ, on pose $U_2 = Y \cup D_\gamma$. Clairement U_1, U_2 et $U_1 \cup U_2$ sont des ouverts connexes par arcs, localement connexes par arcs et contenant x_{12}. On applique maintenant le Théorème de Van Kampen à $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$. Comme U_1 est homotope à S_1, on a $\pi_1(U_1, x_{12}) = 0$. De plus $U_1 \cap U_2$ est homotpe à D_γ, donc contractile donc son groupe fondamental est réduit à 0. On obtient finalement que $\pi_1(X, x_{12}) \cong \pi_1(U_2, x_{12})$

Il nous reste à calculer $\pi_1(U_2, x_{12})$. On note D_2^+, D_2^- les ouverts $D_+ \cup D_\gamma$ et $D_- \cup D_\gamma$. On remarque que $D_2^+ \cap D_2^-$ est homotope à un bouquet de trois cercles $C_1 \vee C_2 \vee C_3$ où $C_1 \supset \gamma$ (Là encore il faut faire un dessin). De plus D_2^+ et D_2^- sont homotopes à C_1 (en contractant les hémisphères sur un point). Il résulte de Van-Kampen que $\pi_1(U_2, x_{12})$ est la limite du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(C_1 \vee C_2 \vee C_3, x_{12}) & \longrightarrow & \pi_1(C_1, x_{12}) \\ \downarrow & & \vdots \\ \pi_1(C_1, x_{12}) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \pi_1(U_2, x_{12}) \end{array} .$$

Mais $\pi_1(C_1, x_{12}) \cong \mathbb{Z}$ et $\pi_1(C_1 \vee C_2 \vee C_3, x_{12}) = F(x_1, x_2, x_3)$ le groupe libre sur 3 générateurs. L'application $\pi_1(C_1 \vee C_2 \vee C_3, x_{12}) \to \pi_1(C_1, x_{12})$ est simplement la projection $F(x_1, x_2, x_3) \to F(x_1) = \mathbb{Z}$ puisque elle est induite par les injections $C_1 \vee C_2 \vee C_3 \hookrightarrow D_2^+$ et $C_1 \vee C_2 \vee C_3 \hookrightarrow D_2^-$ pour lesquelles les composantes sur C_2, C_3 deviennent triviales puisque incluses dans un disque contractiles. Il suit que $\pi_1(U_2, x_{12}) \cong F(x, x')/F(x^{-1}x') \cong \mathbb{Z}$.

Conclusion : $\pi_1(X, x_{12}) \cong \mathbb{Z}$.

Remarque 5. Dans la question **(2)**, on applique beaucoup de raisonements de déformation homotopique dans $\mathbb{R}^3$ et ce, en laissant les détails au lecteur. Il faut noter que le recouvrement ouvert introduit dans cette question, permet aussi de calculer les groupes de cohomologie de X par un argument de type Mayer-Vietoris.

Exercice 7. *Le but de cet exercice est de montrer que tout groupe G est le groupe fondamental d'un espace topologique X.*

(1) *Montrer que pour tout groupe G, il existe un ensemble $\mathfrak{I}$ et un sous groupe normal N du groupe $F(\mathfrak{I}) := \coprod_{i \in \mathfrak{I}} \mathbb{Z}$ tel que $G \cong F(\mathfrak{I})/N$ (on pourra commencer par construire un épimorphisme $F(\mathfrak{I}) \to G$). Le coproduit dans la définition de $F(\mathfrak{I})$ est le coproduit dans la catégorie des groupes (et pas des groupes abéliens !).*

(2) *Soit X un espace topologique connexe, localement connexe et localement simplement connexe $f : I \to X$ un lacet (i.e. $f(0) = f(1)$). On note D^2, le disque unité de $\mathbb{R}^2$ et on identifie f avec un morphisme de $S^1 = \partial D^2 \to X$. On note $D^2 \cup_f X$ l'espace topologique $(D^2 \coprod X)/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par $S^1 \ni y \sim f(y) \in X$. Montrer que $\pi_1(D^2 \cup_f X) \cong \pi_1(X)/N(f)$ où $N(f)$ est le sous-groupe normal de $\pi_1(X)$ engendré par la classe d'homotopie du lacet f.*

(3) *Montrer que pour tout ensemble $\mathfrak{I}$, il existe X et $x \in X$ tels que $F(\mathfrak{I}) = \pi_1(X, x)$ (on pourra regarder des bouquets de cercles).*

(4) *Déduire des questions précédentes que pour tout groupe G, il existe un espace topologique X connexe tel que $G \cong \pi_1(X)$.*

Solution 7. On notera $G * H$ le coproduit $G \coprod H$ de deux groupes G, H dans la suite (c'est une notation courante en topologie algébrique).

(1) Soit $\mathfrak{I} = \{g \in G - \{1\}\}$. On a un morphisme de groupes $F(\mathfrak{I}) \to G$ donné par les morphismes $\rho_g : \mathbb{Z} \to G$ qui envoient pour tout $i \in \mathfrak{I}$, la composante $\mathbb{Z}$ correspondant à l'indice g dans G par $k \mapsto g^k$. Ces morphismes ρ_g sont de smorphismes de groupes, et, par propriété universelle du coproduit, on obtient un morphisme de groupes $F(\mathfrak{I}) \to G$. Ce morphisme est surjectif puisque si $g \in G_{\{}1\}$, on a $g = \rho_g(1)$. Soit $N = \ker(F(\mathfrak{I}) \to G)$; puisque c'est un noyau, N est normal et $G \cong F(\mathfrak{I})/N$.

(2) Comme X est connexe, $X \cup_f D^2$ aussi, et les groupes d'homotopie de X, $X \cup_f D^2$ ne dépendent pas du choix du point base (à isomorphisme près). On va appliquer le théorème de Van Kampen en prenant $U = D^2 - \partial D^2$, $V = X \cup_f C$ où $C = \left\{z \in D^2 \,|\, ||z|| > 1/2\right\}$. Les espaces U, V sont des ouverts de $X \cup_f D^2$, ainsi que $U \cap V$ par conséquent. De plus ces ouverts vérifient les hypothèses du Théorème de Van Kampen. On en déduit que $\pi_1(X \cup_f D^2, x)$ (avec $x \in U \cap V$) est le coproduit cofibré

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x) & \xrightarrow{\ j\ } & \pi_1(U, x) \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow \\ \pi_1(V, x) & \longrightarrow & \pi_1(X \cup_f D^2, x) \end{array}$$

c'est à dire la limite inductive du diagramme formé par la ligne du haut et la colonne de gauche. L'espace $V = X \cup_f C$ est homotope à X (en rétractant la couronne C sur le bord de D^2). D'où $\pi_1(V, x) \cong \pi_1(X, x)$. $U = D^2 - \partial D^2$ est contractile, donc $\pi_1(V, x) = 0$. De plus $U \cap V$ est homotope à une couronne ouverte de D^2, donc à S^1 et $\pi_1(U \cap V, x) \cong \mathbb{Z}$. En conséquence, $\pi_1(X \cup_f D^2, x) \cong \pi_1(X, x)/N(p(\mathbb{Z}))$ où $N(H)$ désigne le sous-groupe normal engendré par un sous-groupe H. Il reste évidemment à identifier p. Cette application est l'application induite en passant au groupe fondamental par l'inclusion $U \cap V \to V$. Un générateur de $\mathbb{Z}$ est donné par un lacet γ circulare dans la couronne C parcourant une fois un cercle centré en le centre de D^2. On choisit un point base x_0 sur ∂D^2. Le lacet γ est alors homotope au bord ∂D^2, d'où $p(\gamma)$ est la classe d'homotopie de f dans $\pi_1(X)$. Conclusion : $\pi_1(X \cup_f D^2, x) \cong \pi_1(X)/N(f)$.

(3) On choisit un point base x_0 sur le cercle S^1. On recolle $\mathfrak{I}$ copies de S^1 ensemble en identifiant tous leurs points x_0 (c'est un "bouquet" de n-cercles) pour former l'espace X, noté en général $\bigvee_{\mathfrak{I}} S^1$.

On considère x_0 comme point base et le recouvrement ouvert donné par U_i avec, pour tout $i\mathfrak{I}$, U_i est la réunion du cercle S^1 indicé par $\mathfrak{I}$ et des arcs $]x_0 - 1/4, x_0 + 1/4[$ dans les autres S^1. Le théorème de Van Kampen donne alors immédiatement que $\pi_1(X, x_0) \cong \coprod_{\mathfrak{I}} \pi_1(S^1, x_0) \cong F(\mathfrak{I})$.

(4) D'après la question **(1)**, il existe un ismorphisme $G \cong F(\mathfrak{I})/N$. On construit X comme en **(3)** vérifiant $\pi_1(X, x) \cong F(\mathfrak{I})$. Notons que X ainsi obtenu a été choisi connexe, localement connexe localement simplement connexe. Soit $\mathfrak{K}$ un système de générateurs de N. A tout élément $h \in \mathfrak{K}$, correspond la classe d'homotopie d'un lacet $f_h : S^1 \to X$. Pour tout $h \in \mathfrak{K}$, on attache un disque D^2 à X suivant f comme dans l'énoncé de la question **(2)**. On note Y l'espace obtenu (qui est connexe par construction). Un raisonement analogue à celui de la question **(3)** (avec tous les $h \in \mathfrak{K}$ en même temps) donne alors $\pi_1(Y, x_0) \cong F(\mathfrak{I})/N$.

Exercice 8. *Soit $f : Y \to X$ une application continue et F un faisceau abélien sur Y. On note $F^\bullet$ une résolution injective du faisceau F.*

(1) *Rappeler pourquoi le foncteur f_* est exact à gauche. On note $R^i f_* F$ le $i^{ème}$ foncteur dérivé à droite de $f_* F$.*

(2) *Montrer que, pour tout $x \in X$, on a $\left(R^i f_* F\right)_x \cong H^i\left((f_* F^\bullet)_x\right)$.*

(3) *On suppose désormais que tout $x \in X$ admet un voisinage ouvert U_x tel que $H^j(f^{-1}(U_x), F) = 0$ pour $j > 0$. Déduire du* **(2)** *que $\left(R^i f_* F\right) = 0$ pour tout $j > 0$.*

(4) *En déduire que $f_* F^\bullet$ est une résolution injective de $f_* F$.*

(5) *Montrer que pour tout ouvert U de X, on a $H^j(U, f_* F) \cong H^j(f^{-1}U, F)$.*

(6) *Construire un exemple explicite.*

Solution 8. **(1)** Puisque f_* admet un adjoint à gauche (en l'occurence f^{-1}), il est exact à gauche.

(2) Par définition $R^i f_* F = H^i(f_*(F^\bullet))$ où $F^\bullet := F^0 \to F^1 \to F^2 \to \dots$ est une résolution injective de F. Notons que les groupes de cohomologie sont pris dans la catégorie abélienne des faisceaux de groupes abéliens sur X. Pour tout $x \in X$, le foncteur $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X) \ni G \mapsto G_x \in \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ est exact. Il commute donc avec la cohomologie; d'où $= H^i(f_*(F^\bullet))_x \cong H^i\left(\left(f_*(F^\bullet)\right)_x\right)$.

(3) D'après la question **(2)**, on a, pour $i > 0$,

$$\begin{aligned}
\left(R^i f_* F\right)_x &= H^i\left(\left(f_*(F^\bullet)_{|U}\right)_x\right) \\
&= H^i\left(\varinjlim_{x \in U} \Gamma\big(U, f_*(F^\bullet)\big)\right) \\
&= \varinjlim_{x \in U} H^i\left(\Gamma\big(U, f_*(F^\bullet)_{|U}\big)\right) \text{ (car une limite inductive filtrante est exacte)} \\
&= \varinjlim_{x \in U} H^i\left(\Gamma\big(f^{-1}(U), {F^\bullet}_{|U}\big)\right) \text{ (par définition de } f_*(F^\bullet) \\
&= \varinjlim_{x \in U} H^i\left(f^{-1}(U), F_{|U}\big)\right) \text{ (car } {F^\bullet}_{|U} \text{ est une résolution injective de } F_{|U}) \\
&= \varinjlim_{x \in U} H^i\left(f^{-1}(U), F\big)\right) = 0
\end{aligned}$$

par hypothèse puisque $\varinjlim_{x \in U} = \varinjlim_{x \in V \subset U_x}$ et $H^i(U, G_{|U}) = H^i(U, G)$ pour tout ouvert U (voir le cours pour ce dernier point, qui est à connaitre).

(3) Il y a deux choses à vérifier:

- pour tout j, $f_*(F^j)$ est injectif. Ceci est une conséquence formelle du fait que f_* admet un adjoint à gauche; en effet on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{k_Y}(f^{-1}(-), F^i) \cong Hom_{k_X}(-, f_*(F^i)).$$

  Donc si F^i est injectif, le foncteur de gauche est exact, donc celui de droite aussi et $f_*(F^i)$ est injectif.

- Il faut montrer que $f_*(F^0) \to f_*(F^1) \to f_*(F^2) \to \dots$ est une résolution de $f_*(F)$. Puisque f_* est exact à gauche, $H^0(f_*(F^\bullet)) \cong f_*(H^0(F^\bullet)) \cong f_*(F)$. Il reste à voir que $H^{j>0}(f_*(F^\bullet)) = 0$ ce qui est précisément le résultat de **(3)**.

(5) Comme $f_*F^\bullet$ est une résolution injective de$f_*(F)$, par définition, on a

$$H^j\big(U, f_*(F)\big) \cong H^j\big(\Gamma(U, f_*(F^\bullet))\big) \cong H^j\big(\Gamma(f^{-1}(U), F^\bullet)\big) = H^j(f^{-1}(U), F).$$

(6) Bien entendu, il suffit de prendre $Y \to X$ tel que pour tout x, il existe un voisinage ouvert de x dont la préimage par f est contractile et F localement constant sur Y. C'est par exemple le cas d'un fibré vectoriel sur une variété.

Les revêtements sont un autre exemple important. Soit $f : Y \to X$ est un revêtement de fibre S admettant un recouvrement par des ouverts trivialisants localements contractibles. On a donc que pour tout $x \in X$ il existe U_x, contractile tel que $f^{-1}(U_x) \cong U_x \times S$. Si F est un faisceau localement constant dans $\mathrm{Mod}(k_Y)$, alors, d'après la formule de Künneth, on a

$$H^{j>0}(U_x \times S, F) \cong \bigoplus_{p+q=j} H^p(U_x, F) \otimes H^q(S, k_S) = 0$$

puisque, S étant discret $H^{j>0}(S, k_S) = 0 = H^j(U_x, F)$ (car U_x contractile et F localement constant). Par conséquent ces revêtements (qui sont très généraux) vérifient les hypothèses.

Exercice 9 (**Théorème de Borsuk-Ulam**). *On note encore S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ (on suppose $n \geq 1$). L'application antipodale $a : S^n \to S^n$ est l'application $x \mapsto -x$ (c'est bien sur la symétrie par rapport au centre de la sphère). Cette application induit donc une action de $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur S^n. L'espace quotient S^n/k est (par définition) l'espace projectif réel de dimension n, noté $\mathbb{R}P_n$. En particulier la projection $p : S^n \to \mathbb{R}P_n$ est un revêtement à 2 feuillets.*

(1) *Montrer que $p : S^n \to \mathbb{R}P_n$ vérifie les hypothèses de l'exercice 8 question* **(3)**.

(2) *Montrer que $p : S^n \to \mathbb{R}P_n$ vérifie les hypothèses de l'exercice 6 de la feuille de TD 6. En déduire (on prendra garde que k est de caractéristique 2) qu'il existe une suite exacte de faisceaux*

$$0 \longrightarrow k_{\mathbb{R}P_n} \xrightarrow{\mathrm{nat}} p_*(k_{S^n}) \xrightarrow{\mathrm{tr}} k_{\mathbb{R}P_n} \longrightarrow 0.$$

(3) *Déduire de la question précédente et de l'exercice 8, question* **(5)**, *qu'il y a une suite exacte longue en cohomologie*

$$0 \to H^0(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \xrightarrow{n} H^0(S^n, k_{S^n}) \xrightarrow{t} H^0(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \to H^1(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \xrightarrow{n} H^1(S^n, k_{S^n}) \to \dots$$

$$\dots \to H^{n-1}(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \to H^n(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \xrightarrow{n} H^n(S^n, k_{S^n}) \xrightarrow{t} H^n(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \to 0$$

où on note respectivement n, t les morphismes induits en cohomologie par nat *et* tr.

(4) *Montrer que $n \circ t : H^n(S^n, k_{S^n}) \to H^n(S^n, k_{S^n})$ est l'application nulle. En déduire que dans la suite exacte de la question* **(3)**, *les flèches sont alternativement un isomorphisme et* 0.

(5) *Montrer que si $f : S^n \to S^m$ vérifie $f \circ a = a \circ f$, alors $n \leq m$ (on pourra utiliser que la longue suite exacte de* **(4)** *est naturelle)*

(6) Borsuk-Ulam : *En déduire que pour tout $f : S^n \to \mathbb{R}^n$. Il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$. C'est le Théorème de Borsuk-Ulam*

(7) Applications : i) *Montrer qu'à tout instant, il y a deux points antipodaux à la surface de la terre où et la température et la pression atmosphérique sont les mêmes.*

ii) *Soient $A_1, \dots A_m$ des sous-ensembles mesurables (au sens de Lebesgue) de $\mathbb{R}^m$. Montrer qu'il existe un hyperplan affine de $\mathbb{R}^m$ qui divise chauqe A_i en deux parties égales. En déduire qu'on peut diviser, en un seul coup de couteau, un sandwich au jambon en deux parties avec exactement les mêmes quantités de pain et de jambon...*

Solution 9. **(1)** pour tout point $x \in \mathbb{R}P_n$, on prend U un voisinage, dans S^n, homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ contenant un point de $p^{-1}(x)$ et suffisament petite pour que $U \cap -U = \emptyset$. On a alors $p(U) = p(U \cup -U)$ est ouvert et vérifie l'hypothèse demandée (puisque une boule ouverte est contractile).

(2) Par construction de la topologie sur $\mathbb{R}P_n$, p est continue et de plus p est revêtement à 2 feuillets en prenant les voisinages U construits en **(1)** comme ouverts de trivialisation. Les hypothèses de l'exercice 6 de la feuille de TD 6 sont donc vérifiées. D'après cet exercice, il existe des morphismes de faisceaux $\mathrm{tr} : p_*(k_{S^n}) \to k_{\mathbb{R}P_n}$ et $\mathrm{nat} : k_{\mathbb{R}P_n} \to p_*(k_{S^n})$ tels que $\mathrm{tr} \circ \mathrm{nat} = 2\,\mathrm{Id} = 0$ puisque $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a donc un complexe

$$0 \longrightarrow k_{\mathbb{R}P_n} \xrightarrow{\mathrm{nat}} p_*(k_{S^n}) \xrightarrow{\mathrm{tr}} k_{\mathbb{R}P_n} \longrightarrow 0. \tag{9.1}$$

En passant au germe en tout x dans $\mathbb{R}P_n$, on obtient la suite exacte $0 \to k \to k \oplus k \to k \to 0$, ce qui assure que le complexe de faisceau (9.1) est une suite exacte.

(3) La suite exacte de faisceaux (9.1) induit une longue suite exacte en cohomologie

$$0 \to H^0(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \xrightarrow{n} H^0(\mathbb{R}P_n, p_*k_{\mathbb{R}P_n}) \xrightarrow{t} H^0(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \to H^1(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \xrightarrow{n} H^1(\mathbb{R}P_n, p_*k_{\mathbb{R}P_n}) \to \dots.$$

Or d'après l'exercice 8, question **(5)** et la question **(1)** du présent exercice, on a $H^i(\mathbb{R}P_n, p_*k_{\mathbb{R}P_n}) \cong H^i(S^n, k_{S^n})$. D'où la suite exacte cherchée.

(4) La suite exacte donne que $t \circ n = 0$ mais pas $n \circ t = 0$. Le morphisme $n \circ t : H^p(S^n, k_{S^n}) \to H^p(S^n, k_{S^n})$ est nul pour $p \neq 0, n$ puisque la cohomologie est nulle. Un calcul au niveau des sections globales montre (en utilisant la définition de tr, cf TD 6, exercice 6.(2)) que t est la multiplication par 2, donc nul puisque $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Rappelons que $a : S^n \to S^n$ est la transformation antipodale. Alors, en reprenant la définition de tr et nat, on constate facilement que $\mathrm{nat} \circ \mathrm{tr} = 1 + \psi_a$ où $\psi_a : k_{S^n} \to a_* \circ a^{-1} k_{S^n} = k_{S^n}$ est le morphisme induit par le morphisme de foncteurs $\mathrm{Id} \to a_* \circ a^{-1}$. On en déduit que $n \circ t = \mathrm{Id} + a^{\#n} : H^n(S^n, k_{S^n}) \to H^n(S^n, k_{S^n})$. Or : $H^n(S^n, k_{S^n}) \cong k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, d'où comme $a^{\#n} \circ a^{\#} = (a \circ a)^{\#} = \mathrm{Id}^{\#} = \mathrm{Id}$, on obtient $a^{\#} = 1$ (merci la caractéristique 2...) et $1 + a^{\#} = 0$. On a montré $n \circ t = 0$. On a en particulier, comme $H^0(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \xrightarrow{n} H^0(\mathbb{R}P_n, p_*k_{\mathbb{R}P_n})$ est injective, que $H^0(\mathbb{R}P_n, p_*k_{\mathbb{R}P_n}) \xrightarrow{t} H^0(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n})$ est nulle (ce qu'on à déjà vu du reste); d'où la première application est un isomorphisme par exactitude de la suite de la question **(3)**. Comme $H^1(S^n, k_{S^n}) = 0$, on obtient que la troisième flèche $H^0(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \to H^1(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n})$ est un isomorphisme et la suivante est nulle (trivialement...). En itérant ce raisonement on obtient le résultat demandé.

(5) Si $f : S^n \to S^m$ vérifie $f \circ a = a \circ f$, alors f induit un morphsime $\tilde{f} : \mathbb{R}P_n \to \mathbb{R}P_m$ par passage au quotient. On vérifie sans peine que les contructions de nat et tr sont naturelles; on en déduit que la longue suite exacte de la question **(3)** est naturelle également. En particulier, en utilisant la question **(4)**, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
H^0(\mathbb{R}P_n) & \xrightarrow{\cong} & H^0(S^n) & \xrightarrow{0} & H^0(\mathbb{R}P_n) & \xrightarrow{\cong} & H^1(\mathbb{R}P_n) & \xrightarrow{0} & H^1(S^n) & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \tilde{f}^{\#}} & & \downarrow{\scriptstyle f^{\#}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}^{\#}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}^{\#}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}^{\#}} & & \\
H^0(\mathbb{R}P_m) & \xrightarrow{\cong} & H^0(S^m) & \xrightarrow{0} & H^0(\mathbb{R}P_m) & \xrightarrow{\cong} & H^1(\mathbb{R}P_m) & \xrightarrow{0} & H^1(S^m) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

en omettant les faisceaux constant dans la notation. Il est clair que $\tilde{f}^{\#} : H^0(\mathbb{R}P_n) \to H^0(\mathbb{R}P_n)$ est un isomorphisme (puisque $\mathbb{R}P_n$, $\mathbb{R}P_m$ sont connexes). Il suit du diagramme précédent que $\tilde{f}^{\#} : H^1(\mathbb{R}P_n) \to H^1(\mathbb{R}P_n)$ est alors un isomorphisme. Supposons $m < n$. On peut itérer le raisonement précédent pour montrer que $\tilde{f}^{\#} : H^i(\mathbb{R}P_n) \to H^i(\mathbb{R}P_n)$ est un isomorphsime pour tout $i \leq m$. Or du diagramme commutatif précédent, on peut extraire le carré

$$\begin{array}{ccc}
H^m(\mathbb{R}P_n) & \xrightarrow{t} & H^m(S^n) \\
\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle f^{\#}} \\
H^m(\mathbb{R}P_m) & \xrightarrow[\cong]{t} & H^m(S^m)
\end{array}.$$

Or $H^m(S^n) = 0$ et $H^m(S^m) \cong k$. Donc la composée de la ligne du hat et de la colonne de droite est nulle, alors que la composée de la colonne de gauche avec la ligne du bas ets un isomorphisme non nul. C'est une contradiction.

(6) On raisonne par l'absurde : sinon l'application $g : x \mapsto (f - f \circ a)(x)/||(f - f \circ a)(x)\ ||$ est une application bien définie et continue de S^n dans S^{n-1} qui vérifie $g \circ a = a \circ g$; ce qui contredit la question **(5)**.

(7) i) C'est un corollaire immédiat du Théorème de Borsuk Ulam avec $n = 2$.

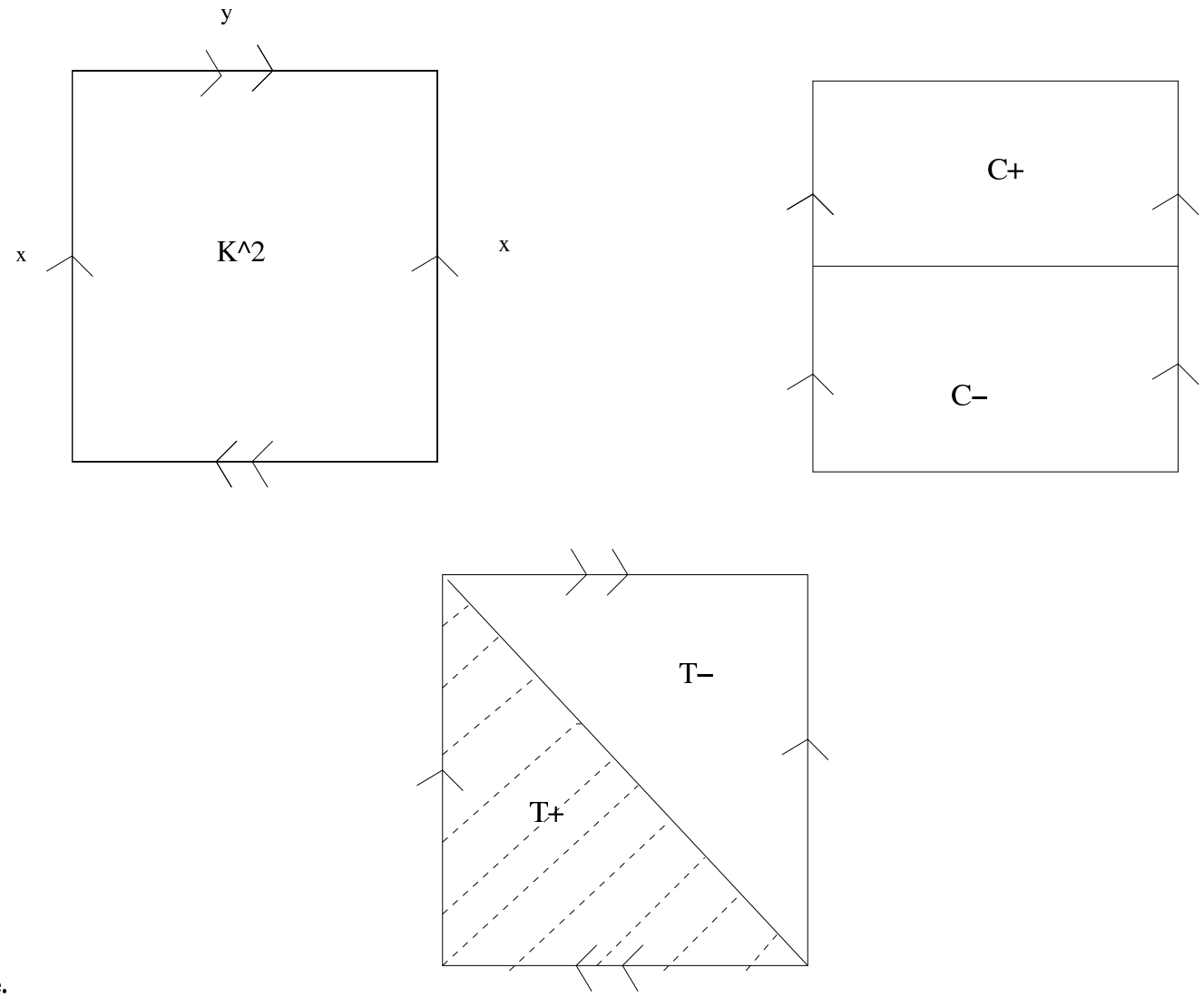
ii) On définit $f : S^m \to \mathbb{R}^m$ par $f = (f_1, \ldots, f_m)$ où $f_i(x)$ est la mesure de l'ensemble $H_x \cap A_i$ et H_x est l'hyperplan orthogonal au vecteur unitaire $x \in S^n$ de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$. Ces fonctions sont continues car les A_i sont bornés et le Théorème de Borsuk Ulam donne immédiatement la conclusion.

Exercice 10 (Bouteille de Klein). *Soit K^2 l'espace topologique, appelé bouteille de Klein, obtenu comme le quotient du plan $\mathbb{R}^2$ par les transformations affines $\alpha(x, y) = (x + 1, y)$ et $\beta(x, y) = (1 - x, y + 1)$. On note $x_0 \in K^2$ la classe du point $(0, 0)$*

1) *Calculer les groupes de cohomologie $H^*(K^2, \mathbb{Z})$.*

2) *Calculer $\pi_1(K^2, x_0)$.*

Solution 10. Modulo l'action de α et β, tout point du plan peut être identifié à un point du carré $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. L'action de α ou β envoie les points dans l'intérieur du carré sur des points en dehors du carré. Enfin, α identifie les bords gauche (c'est à dire $\{0\} \times [0, 1]$) et droite du carré alors que β identifie un point $x \times \{0\}$ du bord inférieur (c'est à dire $[0, 1] \times \{0\}$) au point $(1-x) \times \{1\}$ du bord supérieur. Par conséquent, K^2 est homéomorphe au carré $[0, 1]^2$ où on a recollé les bords gauche et droite et recollé les bords inférieurs et supérieurs mais en changeant le sens. On note $p : [0, 1]^2 \to K^2$ l'application in-



duite.

1) On va appliquer la suite exacte de Mayer-Vietoris. Pour cela on découpe K^2 en deux fermés de la façon suivante. Soit L l'image dans K^2 du segment $[0,1] \times 1/2$. On note respectivement C^+ et C^- les images dans K^2 des rectangles $[0,1] \times [1/2,1]$ et $[0,1] \times [0,1/2]$ dessinés par L. Il est évident que C^+ et C^- sont des fermés et que $K^2 = C^+ \cup C^-$.

Remarquons que C^+ est C^- sont homéomorphes à des carrés dont les bords gauche et droite ont été recollés. Ce sont donc des cylindres et par conséquent ils sont homotopes à un cercle S^1.

Enfin $C^+ \cap C^-$ est la réunion disjointe de L et de l'image du bord supérieur (identifié à celle du bord inférieur dans K^2) $[0,1] \times \{1\}$. En particulier $C^+ \cap C^-$ est donc une réunions disjointe $S^1 \coprod S^1$ de deux cercles.

La suite exacte longue de Mayer-Vietoris est la suite exacte longue en cohomologie déduite de la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathbb{Z}_{K^2} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_{C^+} \oplus \mathbb{Z}_{C^-} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_{S^1 \coprod S^1} \cong \mathbb{Z}_{S^1} \oplus \mathbb{Z}_{S^1} \to 0$$

où f et g sont induites par les morphismes de restriction. Par invariance par homotopie, on peut remplacer $\mathbb{Z}_{C^+}$ par $\mathbb{Z}_{S^1}$ et via cette identification, les morphismes de restriction de $\mathbb{Z}_{C^+}$ vers $\mathbb{Z}_L \cong \mathbb{Z}_{S^1}$ et $\mathbb{Z}_{p([0,1]\times\{1\})} \cong \mathbb{Z}_{S^1}$ sont l'identité. De même, $\mathbb{Z}_{C^-}$ s'identifie à $\mathbb{Z}_{S^1}$ et son morphisme de restriction vers $\mathbb{Z}_L \cong \mathbb{Z}_{S^1}$ est l'identité. En revanche, le bord inférieur de C^- est $p([0,1] \times \{0\}) \cong S^1$ qui est identifié à $p([0,1] \times \{1\}) \cong S^1$ via l'application $a : S^1 \to S^1$, $\theta \mapsto -\theta$. Il suit que le morphisme de faisceau $\mathbb{Z}_{C^-} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p([0,1]\times\{1\})}$ s'identifie à $\mathbb{Z}_{S^1} \xrightarrow{\circ a} \mathbb{Z}_{S^1}$ (qui a une fonction localement constante d'un ouvert U).

En conclusion, il nous suffit d'appliquer la suite exacte de Mayer-Vietoris à la suite exacte courte de faisceaux:

$$0 \to \mathbb{Z}_{K^2} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_{S^1} \oplus \mathbb{Z}_{S^1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}} \mathbb{Z}_{S^1} \oplus \mathbb{Z}_{S^1} \to 0. \tag{10.1}$$

Les sections globales de S^1 sont des fonctions constantes car S^1 est connexe. Il suit que $a^{\#} : H^0(S^1, \mathbb{Z}) = \Gamma(S^1, \mathbb{Z}_{S^1}) \to H^0(S^1, \mathbb{Z}) = \Gamma(S^1, \mathbb{Z}_{S^1})$ est l'identité. Vérifions que $a^{\#} : H^1(S^1, \mathbb{Z}) \to H^1(S^1, \mathbb{Z})$ est l'application $n \mapsto -n$. On identifie S^1 au quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. S^1 est alors recouvert par les fermés $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$ dont l'intersection est deux points. Clairement, a échange les deux segments $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$, qui sont contractiles. On a donc un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^0([0,1/2],\mathbb{Z}) \oplus H^0([1/2,1],\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & H^1(S^1, \mathbb{Z})] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & & \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & & \downarrow{\scriptstyle a^{\#}} & & \\
H^0([0,1/2],\mathbb{Z}) \oplus H^0([1/2,1],\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\simeq]{} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & H^1(S^1, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

En particulier on a identifié $H^1(S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}(1, 0)$ (dans le conoyau de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$). On a alors que $a^{\#}(1, 0) = (0, 1) = -(1, 0) + (1, 1)$, c'est à dire $a^{\#} = -\mathrm{id}$.

On peut (enfin !) calculer la suite exacte longue associée en cohomologie associée à la suite courte (10.1) précédente. On trouve :

$$0 \to \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H^1(K^2, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H^2(K^2, \mathbb{Z}) \to 0 \to \dots$$

On note φ l'application $\varphi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Clairement φ est injective (car elle l'est sur $\mathbb{R}$ puisque de déterminant égal à 2) et l'application $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ a pour conoyau $\mathbb{Z}$. Il suit que $H^1(K^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Enfin $H^2(K^2, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{coker}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour établir le dernier isomorphisme, il suffit de voir qu'un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Im}(\varphi)$ si et seulement si $a + b \cong 0$ modulo 2 (ceci se déduit immédiatement des deux équations $x - y = a$ et $x + y = b$ en remarquant que $-y = y$ modulo 2). Remarquons que $H^2(K^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ modulo $\mathrm{Im}(\varphi)$.

2) L'idée est d'utiliser le théorème de Van-Kampen. Comme K^2 est connexe, on peut remarquer que le résulat ne dépend pas du point base choisi. On ne peut pas utiliser le même recouvrement pour calculer le groupe fondamental de K^2, car $C^+ \cap C^-$ n'est pas connexe. On utilise donc un autre recouvrement par deux triangles T^+, T^- obtenus en traçant la première diagonale du carré $[0, 1]^2$ (où T^+ est le triangle de gauche). On a que $T^+ \cap T^-$ est un bouquet de 3 cercles (c'est à dire 3 cercles S^1 avec comme suel point commun, le point $x_0 = (0, 0) \in \mathbb{K}^2$). Clairement, T^+, T^- et $T^+ \cap T^-$ sont connexes et contienent x_0. Pour appliquer Van Kampen, il convient de calculer $\pi_1(T^{\pm}, x_0)$. Le triangle T^+ est homotope à l'image de ses bords verticaux et horizontaux $p([0, 1] \times \{1\})$ et $p(\{0\} \times [0, 1])$; pour voir cela, il suffit de considérer la projection sur ces bords parallélement à l'autre diagonale (c'est à dire orthogonale au 3ème côté de T^+). On obtient que T^+ est homotope au bouquet $S^1 \vee S^1$ de deux cercles (qui sont les images respectives de

$p([0,1]\times\{1\})$ et $p(\{0\}\times[0,1])$). Donc $\pi_1(T^+,x_0)\cong\pi_1(S^1\vee S^1)\cong F(x,y)$ en notant F le groupe libre engendré par deux éléments x,y où x est la classe de $p([0,1]\times\{1\})$ et y est la classe de $p(\{0\}\times[0,1])$ (autrement dit $F(x,y)\cong\mathbb{Z}\coprod\mathbb{Z}$, où le coproduit est pris dans la catégorie des groupes). De même, $\pi_1(T^-,x_0)\cong\pi_1(S^1\vee S^1)\cong F(u,v)$ et $\pi_1(T^+\cap T^-,x_0)\cong\pi_1(S^1\vee S^1\vee S^1)\cong F(a,b,c)$ où u,a sont les classes de $p([0,1]\times\{1\})$, v,b sont les classes de $p(\{0\}\times[0,1])$ et c est la classe du segment diagonal.

D'après le Théorème de Van Kampen, $\pi_1(K^2,x_0)$ est la colimite du diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(a,b,c) & \xrightarrow{i^+} & F(x,y) \\ {\scriptstyle i^-}\downarrow & & \downarrow \\ F(u,v) & \longrightarrow & \pi_1(K^2,x_0), \end{array} \tag{10.2}$$

c'est à dire le quotient de $F(x,y,u,v)$ par les relations $i^+(z)=i^-(z)$ pour tout $z\in F(a,b,c)$. Par définition $i^+(a)=x$ et $i^+(b)=y$ (ce sont les classes d'homotopie d'un même lacet). $i^+(c)$ est la classe d'homotopie, dans $\pi_1(T^+,x_0)$ du segment diagonal. L'homotopie entre T^+ et $S^1\vee S^1$ envoie ce segment diagonal sur la composée de $p(\{0\}\times[0,1])$ et de $p([0,1]\times\{1\}$; d'où $i^+(c)=x.y$. De même, $i^-(a)=u$, $i^-(b)=v$ et $i^-(c)$ est la classe d'homotopie du lacet $p([0,1]\times\{0\})=p([0,1]\times\{1\}$ parcouru dans l'autre sens et de $p(\{1\}\times[0,1])=p(\{0\}\times[0,1])$. C'est à dire $i^-(c)=y^{-1}.x$. On en déduit

$$\pi_1(K^2,x_0)\cong F(a,b)/\{xyx^{-1}y\}.$$

Remarque 6. On peut, bien sur, utiliser le recouvrement de la question **2)** pour calculer la cohomologie de K^2. Les calculs sont cependant un tout petit peu plus compliqué (on obtient des termes en $\mathbb{Z}^4$ et $\mathbb{Z}^3$).