

Devoir d'algèbre et topologie I

Grégory Ginot

Exercice 1 (Produit tensoriel des $\mathbb{Z}$ -modules de type fini). Le but de cet exercice est de déterminer le produit tensoriel de deux groupes abéliens de type fini.

- (1) Montrer qu'il y a un isomorphisme canonique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\gcd(n,m)\mathbb{Z}$ où $\gcd(n,m)$ désigne le plus grand diviseur commun de n et m .
- (2) Soit M et N deux groupes abéliens de type fini. En utilisant le théorème de structure, déterminer à quel $\mathbb{Z}$ -module de type fini est isomorphe $M \otimes N$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et X, Y deux objets de $\mathcal{C}$. On considère la catégorie $\mathcal{C}_{XY}$ dont les objets sont les paires $(Z \xrightarrow{f} X, Z \xrightarrow{g} Y)$ de flèches de $\mathcal{C}$ avec la même source. Un morphisme de $\mathcal{C}_{XY}$ entre $(Z_1 \xrightarrow{f_1} X, Z_1 \xrightarrow{g_1} Y)$ est la donnée d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow f_1 & \uparrow f_2 \\ Z_1 & \xrightarrow{h} & Z_2 \\ & \searrow g_1 & \downarrow g_2 \\ & & Y \end{array} .$$

- (1) Montrer que $\mathcal{C}_{XY}$ est bien une catégorie.
- (2) Montrer le produit $X \times Y$ existe dans $\mathcal{C}$ si et seulement si la catégorie $\mathcal{C}_{XY}$ a un objet terminal. Expliciter l'objet terminal quand $X \times Y$ existe.
- (3) Énoncer et démontrer un résultat analogue pour le coproduit.

Exercice 3. Soit G un groupe et k un anneau. On note $k[G]$ le k -module libre de base $\{g \in G\}$. il est canoniquement muni d'une structure de k -algèbre (non commutative si G n'est pas abélien) par la formule

$$\sum \lambda_i g_i * \sum \nu_j h_j = \sum \lambda_i \nu_j g_i h_j$$

dont l'unité est l'élément $e \in k[G]$ (on ne demande pas de le démontrer). Si A est une k -algèbre, on note $A^\times$ le sous-ensemble des éléments inversibles. La structure multiplicative de A donne une structure de groupe à $A^\times$. Montrer que $G \mapsto k[G]$ est un foncteur $\text{Gps} \rightarrow k\text{-alg}$ de la catégorie des groupes vers la catégorie des k -algèbres (associatives, non nécessairement commutatives) et que $A \mapsto A^\times$ est un foncteur $k\text{-alg} \rightarrow \text{Gps}$. Montrer ensuite que $G \rightarrow k[G]$ est adjoint à gauche de $A \mapsto A^\times$.

Exercice 4 (Utilisation du lemme du serpent). *Le but de cet exercice est d'utiliser le lemme du serpent pour redémontrer des résultats de la feuille de TD 2. Soit A un anneau commutatif unitaire.*

(1) (Exercice 3.(1)) *Soit A un anneau et $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M''$ une suite exacte de A -modules. Soit N, P deux sous-modules de M tels que $i^{-1}(N) = i^{-1}(P)$ et $\pi(N) = \pi(P)$. On suppose que $N \subset P$. Dédurre du lemme du serpent que $N = P$ (on pourra considérer $\text{coker}(N \subset P)$).*

(2) (Exercice 4.(3)) *Soit A un anneau, M un A -module et N et P des sous-modules de M .*

Soit $f : N \cap P \rightarrow N \oplus P$, $x \mapsto (x, x)$ et $g : N \oplus P \rightarrow N + P$, $(y, z) \mapsto y - z$. Rappelons que la suite $0 \rightarrow N \cap P \xrightarrow{f} N \oplus P \xrightarrow{g} N + P \rightarrow 0$ est exacte. En déduire en utilisant le lemme du serpent l'existence d'une suite exacte $0 \rightarrow \frac{M}{N \cap P} \rightarrow \frac{M}{N} \oplus \frac{M}{P} \rightarrow \frac{M}{N + P} \rightarrow 0$.

Exercice 5. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie munie d'un objet initial $\emptyset$ et d'un objet final pt . On suppose que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{pt}, \emptyset)$ est non vide. Montrer que $\emptyset \cong \text{pt}$, autrement dit qu'il y a un objet nul.*