Master 1 — Mathématiques — 2008

Devoir d'algèbre et topologie II

Grégory Ginot

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif et M, L, K des A-modules. On note $\mathbb{C}$ la catégorie des A-modules.

(1) Montrer que $\mathbb{C} \ni N \mapsto \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A \mathrm{Hom}_A(N, L), K)$ induit un foncteur (covariant) $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(2) **i)** Donner des conditions sur L, M pour que F soit exact à gauche.

ii) Donner des conditions sur K, M pour que F soit exact à droite.

iii) Donner des conditions sur K, L, M pour que F soit exact.

(3) On suppose $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$ et $K = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

i) Montrer que F est exact à droite.

ii) Soit $m \geq 1$ et $L = \mathbb{Z}$. Calculer $L^i(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

iii) Soit $m, n \geq 1$ et $L = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Calculer $L^i(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2. Soit A un anneau unitaire et M', M'' deux A-modules.

(1) On suppose que $\mathrm{Ext}^1_A(M'', M') = 0$. Montrer que toute suite exacte $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ est scindée (on pourra appliquer le foncteur $\mathrm{Ext}^{\bullet}_A(M'', -)$ à la suite exacte pour trouver une section).

(2) On se propose d'étendre le résultat précédent et de montrer qu'il y a un isomorphisme naturel

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{classes d'isomorphismes de suites exactes} \\ 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \end{array} \right\} \cong \mathrm{Ext}^1_A(M'', M').$$

i) Soit $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ une suite exacte. On note $\xi_{f,g}$ cette suite exacte. Montrer qu'il existe un morphisme naturel $\partial_{\xi_{f,g}} : \mathrm{Hom}_A(M', M') \to \mathrm{Ext}^1_A(M'', M')$ tel que $\partial_{\xi_{f,g}} \circ \psi \circ f = 0$ pour tout $\psi \in \mathrm{Hom}_A(M, M')$.

ii) Soit $0 \xrightarrow{j} K \xrightarrow{p} P \to M''$ une suite exacte avec P projectif. Montrer que l'on a une suite exacte naturelle $\mathrm{Hom}_A(P, M') \xrightarrow{j^*} \mathrm{Hom}_A(K, M') \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1_A(M'', M') \xrightarrow{p^*} 0$.

iii) Montrer que pour tout $\beta : K \to M'$, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"'] & P \arrow[r, "p"] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & \mathrm{coker}(K \xrightarrow{(j,-\beta)} P \oplus M') \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes.

iv) Déduire de *ii)* et *iii)* que pour tout $x \in \mathrm{Ext}^1_A(M'', M')$, il existe une suite exacte $\xi_{f,g} : 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ telle que $\partial_{\xi_{f,g}}(\mathrm{Id}_{M'}) = x$.

v) Montrer que si deux suites exactes $\xi_{f,g} : 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ et $\xi_{h,k} : 0 \to M' \xrightarrow{h} N \xrightarrow{k} M'' \to 0$ sont isomorphes, alors $\partial_{\xi_{f,g}}(\mathrm{Id}_{M'}) = \partial_{\xi_{h,k}}(\mathrm{Id}_{M'})$. En déduire que $\xi_{f,g} \mapsto \partial_{\xi_{f,g}}(\mathrm{Id}_{M'})$ induit une surjection Θ de l'ensemble des classes d'isomorphismes de suites exactes $\xi_{f,g}$: $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ vers $\mathrm{Ext}^1_A(M'', M')$.

vi) Montrer que Θ est un isomorphisme (on pourra reprendre la construction de iii) et iv) pour trouver un inverse.) A quel élément de $\mathrm{Ext}^1_A(M'', M')$ correspond la suite exacte scindée $0 \to M' \to M' \oplus M'' \to M'' \to 0$?

Exercice 3 (partiel 2007)**.** Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne admetant des produits indexés par un ensemble I. On suppose de plus que $\mathcal{C}$ admet assez d'objets injectifs.

1) Montrer que $\prod_{i \in I} X_i$ est injectif si chaque X_i est un objet injectif.

2) Soit $\mathcal{C}'$ une autre catégorie abélienne admetant des produits indexés par I. On suppose de plus que les foncteurs $\prod : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ et $\prod : \mathcal{C}'^I \to \mathcal{C}'$ sont exacts. Soit enfin $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur *additif exact à gauche et commutant aux produits indexés par* I. Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, le j-ème foncteur dérivé $R^j F$ commute aux produits indexés par I, c'est à dire:

$$R^j F \left(\prod_{i \in I} X_i \right) \cong \prod_{i \in I} R^j F(X_i).$$