TD d'algèbre et topologie – Feuille de TD 1 : Trois exercices sur le produit tensoriel

Grégory Ginot

Exercice 1. *Dans cet exercice on considère le produit tensoriel de $\mathbb{Z}$-modules.*

1. *Montrer que* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \cong 0$.
2. *Montrer que* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. *Montrer que* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
4. *Montrer que si un groupe abélien G est de torsion alors $G \otimes \mathbb{Q}$ est nul.*
5. *Réciproquement montrer que si un groupe abélien de type fini G vérifie $G \otimes \mathbb{Q} = 0$ alors G est de torsion (on pourra utiliser le théorème de structure des groupes abéliens).*

Exercice 2. *Soit k un anneau commutatif unitaire. Soit $(a_1, \dots, a_n)$ une famille génératrice d'un k-module de type fini A et $(b_1, \dots, b_m)$ une famille génératrice d'un k-module de type fini B.*

1. *Montrer que la famille des $\{a_i \otimes b_j\}$ $(i = 1 \dots n, j = 1 \dots m)$ est une famille génératrice du k-module $A \otimes_k B$. En déduire que $A \otimes_k B$ est de type fini.*
2. *On suppose que les familles sont libres. Montrer que $A \otimes_k B$ est un k-module libre isomorphe à k^{nm} et que la famille $\{a_i \otimes b_j\}$ en est une base.*

Exercice 3. *Soit A un anneau commutatif unitaire, B une A-algèbre commutative et M un A-module à droite.*

1. *Montrer qu'on peut munir $B \otimes_A M$ d'une structure de B-module à gauche par la formule*
$$x * \left(\sum b_i \otimes_A m_i\right) = \sum x b_i \otimes_A m_i.$$
2. *Montrer que si M est de type fini (resp. libre de type fini) sur A, alors $B \otimes_A M$ est de type fini sur B (resp. libre de type fini). On pourra utiliser l'exercice précédent.*