TD d'algèbre et topologie – Feuille de TD 2 : suites exactes et complexes

Grégory Ginot

Dans tous les exercices, A désigne un anneau unitaire et k un corps.

Exercice 1. *(1) Soit* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M" \longrightarrow 0$ *une suite exactes de $\mathbb{Z}$-modules finis. Montrer que $\#M = \#M' * \#M"$ où $\#M$ désigne le cardinal de M.*

(2) Déterminer l'ensemble des $\mathbb{Z}$-modules M tels qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Toutes les suites exactes ainsi obtenues sont-elles scindées ? Que se passe-t-il si on considère seulement les suites exactes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-modules ?

Exercice 2. *On considère une longue suite exacte*

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \longrightarrow 0$$

de k-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que

$$\sum_{i\geq 0} \dim(M_{2i}) = \sum_{i\geq 0} \dim(M_{2i+1}).$$

Exercice 3. *Soit A un anneau et $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M''$ une suite exacte de A-modules. Soit N, P deux sous-modules de M tels que $i^{-1}(N) = i^{-1}(P)$ et $\pi(N) = \pi(P)$.*

(1) On suppose que $N \subset P$. Montrer que $N = P$.

(2) Donner un exemple où N est différent de P (suggestion : prendre $M = \mathbb{R}^2$ et $M' = M'' = \mathbb{R}$).

Exercice 4. *Soit A un anneau, M un A-module et N et P des sous-modules de M. Soit $f : N \cap P \longrightarrow N \oplus P$, $x \longmapsto (x, x)$ et $g : N \oplus P \longrightarrow N + P$, $(y, z) \longmapsto y - z$.*

(1) Montrer que la suite $0 \longrightarrow N \cap P \xrightarrow{f} N \oplus P \xrightarrow{g} N + P \longrightarrow 0$ est exacte.

(2) On choisit $A = k[X, Y]$, où k est un corps, $M = A$, $N = XA$ (c'est a dire le sous-module de $k[X, Y]$ formé des polynômes multiples de X) et $P = YA$. Montrer que dans ce cas la suite exacte qui précède n'est pas scindée.

(3) Établir l'existence d'une suite exacte $0 \longrightarrow \dfrac{M}{N \cap P} \longrightarrow \dfrac{M}{N} \oplus \dfrac{M}{P} \longrightarrow \dfrac{M}{N + P} \longrightarrow 0.$

Exercice 5. *(Lemme des 5) Considérons le diagramme commutatif de A-modules :*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & N_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & N_5
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes sont des suites exactes. Montrer que :

(1) si f_1 est surjective et f_2 et f_4 injectives, alors f_3 est injective.

(2) si f_5 est injective et f_2 et f_4 surjectives, alors f_3 est surjective.

Remarquons que ce lemme est utilisé souvent de la manière suivante **(à retenir)** *:*

(3) Si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

Exercice 6 (Lemme du Serpent). *Soit A un anneau. On considère le diagramme commutatif de complexes de A-modules :*

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[d, "d''"] \\
N' \arrow[r, "v"] & N \arrow[r, "q"] & N''.
\end{tikzcd} \tag{0.1}$$

En particulier $p \circ u = 0 = q \circ v$.

(1) *Montrer que u, p et v, q induisent des applications linéaires naturelles $\tilde{u} : \ker d' \to \ker d$, $\tilde{p} : \ker d \to \ker d''$, $\bar{v} : \operatorname{coker} d' \to \operatorname{coker} d$ et $\bar{q} : \operatorname{coker} d \to \operatorname{coker} d''$ tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
\ker d' \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, hook, "i'"] & \ker d \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, hook, "i"] & \ker d'' \arrow[d, hook, "i''"] \\
M' \arrow[r, "u"] & M \arrow[r, "p"] & M''
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\pi'"] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi"] & N'' \arrow[d, "\pi''"] \\
\operatorname{coker} d' \arrow[r, "\bar{v}"] & \operatorname{coker} d \arrow[r, "\bar{q}"] & \operatorname{coker} d''
\end{tikzcd}$$

(2) *Montrer que $\tilde{p} \circ \tilde{u} = 0$ et que $\bar{q} \circ \bar{v} = 0$.*

(3) *Montrer que si u est injective alors $\tilde{u}$ l'est aussi.*
Montrer que si q est surjective alors $\bar{q}$ l'est aussi.

(4) *Montrer que si $\ker p = \operatorname{im} u$ et si v est injective alors $\ker \tilde{p} = \operatorname{im} \tilde{u}$.*
Montrer que si $\ker q = \operatorname{im} v$ et si p est surjective alors $\ker \bar{q} = \operatorname{im} \bar{v}$.

(5) *On suppose maintenant que le diagramme (0.1) est exact (c'est à dire $\ker p = \operatorname{im} u$ et $\ker q = \operatorname{im} v$) et que, de plus, v est injective et p surjective. Montrer alors qu'il existe une application linéaire naturelle $\delta : \ker d'' \to \operatorname{coker} d'$ et que la suite*

$$0 \longrightarrow \ker d' \xrightarrow{\tilde{u}} \ker d \xrightarrow{\tilde{p}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\bar{q}} \operatorname{coker} d'' \longrightarrow 0$$

est exacte.

En pratique l'énoncé (5) est très utile. On l'utilise le plus souvent sous la forme suivante qu'il faut **impérativement retenir***: étant donné un diagramme commutatif de A-modules*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "v"] & N \arrow[r, "q"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont des suites exactes, on peut compléter de façon naturelle ce diagramme pour obtenir le suivant, appelé diagramme du serpent :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \ker d' \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, "i'"'] & \ker d \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "i"'] & \ker d'' \arrow[d, "i''"'] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta"'] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\pi'"'] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi"'] & N'' \arrow[r] \arrow[d, "\pi''"'] & 0 \\
 & \operatorname{coker} d' \arrow[r, "\bar{v}"] \arrow[d] & \operatorname{coker} d \arrow[r, "\bar{q}"] \arrow[d] & \operatorname{coker} d'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

et dans lequel :

$$0 \longrightarrow \ker d' \xrightarrow{\tilde{u}} \ker d \xrightarrow{\tilde{p}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\bar{q}} \operatorname{coker} d'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte.

Exercice 7. *(Lemme des 9) Considérons le diagramme commutatif de A-modules :*

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
 & N' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "g'"'] & N \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & N'' \arrow[d, "g''"'] & \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "\gamma'"] & L \arrow[r, "\gamma"] & L'' &
\end{tikzcd}$$

dans lequel toutes les lignes sont des suites exactes ainsi que la colonne droite et la colonne gauche. Montrer que si de plus la colonne du milieu est un complexe, alors c'est une suite exacte.

Exercice 8. *On considère un complexe C de A-modules*

$$\ldots \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+2} \longrightarrow \ldots$$

où $n \in \mathbb{Z}$. On fera l'abus de notation consistant à écrire simplement d au lieu de d_n. On dit que C est **scindé** *si il existe des applications $s_n : C_n \to C_{n-1}$ ($n \in \mathbb{Z}$) telles que $d = dsd$ (en notant abusivement s au lieu de s_n).*

(1) On suppose C scindé. Montrer que les applications $d_n s_{n+1}$ et $s_{n+1} d_n$ sont des projecteurs de C_n.

(2) On suppose toujours que C est scindé. Montrer que le complexe C est exact si et seulement si il existe $h_n : C_n \to C_{n-1}$ tels que $hd + dh = \mathrm{Id}$. On dit que les morphismes h sont des homotopies. Montrer que les applications h scindent C (c'est à dire dhd=d).

(3) On suppose que C est une suite exacte de A-modules libres **bornée supérieurement***, c'est à dire que $C_n = \{0\}$ pour $n \geq n_0$. Montrer que C est nécessairement scindé.*

(4) Trouver un contre-exemple si C n'est pas supposé supérieurement borné (on pourra prendre $C_n = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $d = *2$).