

TD d'algèbre et topologie – Feuille de TD 4 : Limites inductives et projectives; catégories additives

Grégory Ginot

Exercice 1 (Limites dans $A\text{-mod}$). Soit A un anneau et k un corps.

- (1) Soit I un ensemble filtrant. Montrer que $\varinjlim M_i$ existe (on pourra considérer $\coprod M_i$ modulo la relation $x_i \sim y_j$ si $u_{ki}(x_i) = u_{kj}(y_j)$ pour un $k \geq \max(i, j)$).
- (2) Montrer que tout A -module M est limite inductive filtrante de modules de type fini.
- (3) Montrer que tout A -module de type fini est limite inductive filtrante de modules de présentation finie. (On dit qu'un A -module M est de présentation finie s'il existe un morphisme $f : A^m \rightarrow A^n$ tel que $M = \text{coker } f$.)
- (4) Soit $\alpha : I \rightarrow A\text{-mod}$ un foncteur avec I filtrant. Montrer que l'application naturelle

$$\varinjlim \text{Hom}_C(M, \alpha) \rightarrow \text{Hom}_C(M, \varinjlim \alpha)$$

est injective si M est de type fini et bijective si M est de présentation finie.

- (5) On note $k_n[x]$ les polynômes de degré $\leq n$. Calculer $\varinjlim k_n[x]$ et $\varprojlim k[x]/(x^n)$. En déduire que $\varinjlim \text{Hom}_C(M, k_n[x]) \rightarrow \text{Hom}_C(M, \varinjlim k_n[x])$ n'est pas bijective en général.

Exercice 2 (Limites dans **Ring**). Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ un système inductif filtrant d'anneaux commutatifs unitaires.

- (1) Montrer que $A = \varinjlim A_i$ est naturellement muni d'une structure d'anneau.
- (2) Montrer que si $A \simeq 0$ alors il existe $i \in I$ tel que $A_i \simeq 0$.
- (3) Définir la notion de système inductif $\{M_i\}_{i \in I}$ de A_i -modules et montrer l'existence de la limite inductive $\varinjlim M_i$ comme A -module.
- (4) Soient $\{M_i\}_{i \in I}$ et $\{N_i\}_{i \in I}$ des systèmes inductifs de A_i -modules. Etablir l'isomorphisme canonique

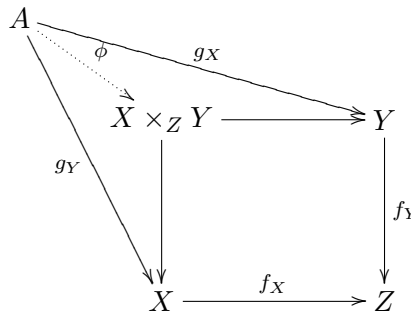
$$\varinjlim (M_i \otimes_{A_i} N_i) \xrightarrow{\sim} \varinjlim M_i \otimes_A \varinjlim N_i$$

Exercice 3 (Produit fibré). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui admet des produits fibrés. Rappelons qu'un produit fibré est la limite projective d'un foncteur $\alpha : I \rightarrow \mathcal{C}$ où I est la catégorie définie par le diagramme :

$$\bullet_1 \longrightarrow \bullet_0 \longleftarrow \bullet_2$$

c'est à dire que I a 3 objets et seulement deux morphismes non triviaux.

- (1) Rappeler pourquoi un produit fibré est la donnée de morphismes $f_X : X \rightarrow Z$, $f_Y : Y \rightarrow Z$ et d'un objet universel $X \times_Z Y$ muni de flèches $p_X : X \times_Z Y \rightarrow X$, $p_Y : X \times_Z Y \rightarrow Y$ telles que $f_X \circ p_X = f_Y \circ p_Y$; c'est à dire que pour tout diagramme commutatif :



l'application $\phi : A \rightarrow X \times_Z Y$ existe et est unique.

- (2) Montrer que si $f_X : X \rightarrow Z$ est un monomorphisme, alors $X \times_Z Y \rightarrow Y$ est un monomorphisme.
- (3) i) Montrer que pour tout $f : X \rightarrow Y$, il existe un morphisme canonique $\delta : X \rightarrow X \times_Y X$ et deux projections canoniques $p_1, p_2 : X \times_Y X \rightarrow X$.
- ii) Montrer que δ est un monomorphisme et p_1, p_2 des épimorphismes.
- iii) Montrer que f est un monomorphisme $\iff \delta$ est un isomorphisme $\iff p_1 = p_2$.

Exercice 4 (Catégories additives). Soit $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, deux catégories additives. Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est dit additif si, pour tout X, Y objets de $\mathcal{C}$, l'application $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{F} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ est un morphisme de groupes. On notera 0 l'objet nul de $\mathcal{C}$ et par 0 les morphismes nuls canoniques : $X \rightarrow 0$, $0 \rightarrow X$, $X \rightarrow 0 \rightarrow X$.

- (1) i) Montrer que pour tout $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, la somme $f + g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est égale à la composée

$$X \xrightarrow{\delta} X \times X \xrightarrow{(f,g)} Y \times Y \xrightarrow{\sim} Y \oplus Y = Y \amalg Y \xrightarrow{\sigma} Y$$

où δ et σ sont les applications naturelles induites par $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ et $\text{Id} : Y \rightarrow Y$.

- ii) Montrer que F est additif si et seulement si il commute à la somme directe (c'est à dire $F(X \oplus Y) = F(X) \oplus F(Y)$).

- (2) Montrer que tout objet X de $\mathcal{C}$ est un objet en groupe, c'est à dire qu'il existe des applications $\mu : X \times X \rightarrow X$, $\alpha : X \rightarrow X$, telles que les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc} X \times X \times X & \xrightarrow{\mu \times \text{Id}} & X \times X & & X \xrightarrow{(\text{Id}, \alpha)} X \times X & & X \xrightarrow{(\alpha, \text{Id})} X \times X \\ \text{Id} \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ X \times X & \xrightarrow{\mu} & X, & & 0 \longrightarrow & X, & 0 \longrightarrow & X, \end{array} \quad (0.1)$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(\text{Id}, 0)} & X \times X \\ & \searrow \text{Id} & \downarrow \mu \\ & & X, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(0, \text{Id})} & X \times X \\ & \searrow \text{Id} & \downarrow \mu \\ & & X. \end{array} \quad (0.2)$$

Montrer de plus que μ est commutatif. (on pourra montrer qu'il existe un morphisme canonique $X \oplus X \rightarrow X$ et regarder la composée $X \times X \xleftarrow{\sim} X \oplus X \rightarrow X$).