TD d'algèbre et topologie – Feuille de TD 5 : Complexes dans les catégories abéliennes; objets injectifs et projectifs; foncteurs Tor et Ext

Grégory Ginot

Dans les exercices suivants, $\mathcal{C}$ désigne une catégorie abélienne, A un anneau (non nécéssairement commutatif) et k un corps.

Exercice 1. *Soit $A \to B \to C$ et $A' \to B' \to C'$ deux complexes dans $\mathcal{C}$. Montrer que ces deux suites sont exactes si et seulement si $A \oplus A' \to B \oplus B' \to C \oplus C'$ est exacte.*

Exercice 2. *Montrer que la catégorie $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ des complexes sur $\mathcal{C}$ est canoniquement munie d'une structure abélienne.*

Exercice 3 (Exactitude). **(1)** *Soit I une catégorie. Rappeler pourquoi $\varinjlim_I$ (resp. $\varprojlim_I$) est exact à gauche (resp. à droite). Montrer que $\varinjlim$ est exact si I est filtrant. En considérant $\varprojlim k[x]/(x^n)$, montrer que $\varprojlim$ n'est pas exact à gauche en général.*

(2) *Montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ est exact à gauche. Que dire de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbb{Z} - \mathbf{mod}$? En considérant la surjection canonique $k[x] \to k \to 0$, montrer que ces foncteurs ne sont pas exacts en général.*

(3) *Montrer que $\oplus$ est exact ainsi que le foncteur $\prod_{i\in I}$ (où I est un ensemble).*

(4) *Soit N un A-module. Montrer que le foncteur $N \otimes_A - : A-\mathbf{mod} \to N$ est exact à droite, mais pas à gauche en général.*

Exercice 4 (cône d'un morphisme). *Soit $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathrm{C}(\mathcal{C})$ deux complexes et $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ un morphisme de complexes. On définit le cône de f par $M^n(f) = X^{n+1} \oplus Y^n$. Soit $d_f : M^\bullet(f) \to M^{\bullet+1}(f)$ définie par la matrice $\begin{bmatrix} -d_X & 0 \\ f^\bullet & d_Y \end{bmatrix}$.*

(1) *Montrer que $(M(f), d_f)$ est un objet de $\mathrm{C}(\mathcal{C})$, c'est à dire un complexe.*

(2) *Montrer que $M(f)$ ne dépend (à isomorphisme pès) que de la classe de f dans $K(\mathcal{C})$, la catégorie homotopique de $\mathcal{C}$.*

(3) *Construire une suite exacte de complexes*

$$0 \to Y^\bullet \to M^\bullet(f) \to X^\bullet[1] \to 0.$$

(4) *Identifier les morphismes $H^\bullet(X) \to H^{\bullet+1}(Y)$ dans la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de la question* **(3)***. En déduire que f est un quasi-isomorphisme si et seulement si $H^\bullet(M(f)) = 0$.*

Exercice 5. *Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert.*

(1) *On note $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I. Soit $C^\bullet$ le complexe*

$$0 \longrightarrow C^\infty(I) \xrightarrow{\mathrm{d}} C^\infty(I) \longrightarrow 0$$

où $\mathrm{d}(f) = f'$. Calculer les modules de cohomologie $H^0(C^\bullet)$ et $H^1(C^\bullet)$.

(2) *On note $C_c^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I à support compact. (On rappelle que le support d'une fonction $f \in C^\infty(I)$ est l'adhérence dans I de l'ensemble $\{x \in I,\ f(x) \neq 0\}$.) Soit $C_c^\bullet$ le complexe*

$$0 \longrightarrow C_c^\infty(I) \xrightarrow{\mathrm{d}_c} C_c^\infty(I) \longrightarrow 0$$

où $\mathrm{d}_c(f) = f'$. Calculer les modules de cohomologie $H^0(C_c^\bullet)$ et $H^1(C_c^\bullet)$.

Exercice 6 (Lemme de Baer). (1) *Soit E un A-module injectif. Montrer que E vérifie la condition suivante :*

$$\text{pour tout idéal } I \text{ de } A, \text{ l'application } \quad \mathrm{Hom}_A(A,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(I,E) \quad \text{est surjective.} \qquad (0.1)$$

(2) *Soit E un A-module vérifiant la condition (0.1). On se donne un diagramme* $\begin{array}{ccc} 0 \to N' & \xrightarrow{f} & N \\ g \downarrow & & \\ E & & \end{array}$. *On note X l'ensemble des couples (P, h_P) où P est un sous-module de N vérifiant $f(N') \subset P \subset N$ et $h_P : P \to E$ est une extension de g, c'est à dire $g = h_P \circ f$. On dit que $(P, h_P) \leq (Q, h_Q)$ si $P \subset Q$ et $h_Q/P = h_P$. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre partiel.*

(3) *Montrer qu'un A-module E est injectif si et seulement si il satisfait à la condition* (0.1) *(on pourra utiliser le* **(2)** *et appliquer le lemme de Zorn).*

Exercice 7 (Les $\mathbb{Z}$-modules $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$). *Soit M un A-module. On note $M^\vee$ le A-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.*

(1) *Montrer que $\mathbb{Q}$ est injectif et plat (on pourra utiliser le Lemme de Baer).*

(2) *Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas projectif, a fortiori non libre.*

(3) *Montrer que $\mathbb{Q}/Z$ est injectif mais pas plat.*

(4) i) *Montrer que l'application naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N^\vee, M^\vee)$ est injective.*

ii) *Montrer que si N est projectif dans $\mathbf{mod} - A$, alors $N^\vee$ est injectif dans $A-\mathbf{mod}$.*

iii) *Montrer que pour tout A-module M, il existe un injectif I et un monomorphisme $M \to I$.*

Exercice 8 (Platitude dans les A-modules). (1) *Montrer qu'un A-module libre est projectif et plat.*

(2) *Soit A un anneau et E un A-module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) E est projectif,
(b) toute suite exacte $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} E \longrightarrow 0$ est scindée,
(c) Il existe un A-module M' tel que $M' \oplus E$ est libre.

(3) *Soit $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules. Montrer que si E' et E'' sont projectifs alors E l'est aussi.*

(4) *Montrer qu'un A-module projectif est plat.*

(5) *Montrer que le produit tensoriel de deux modules projectifs est projectif.*

Exercice 9 (Foncteur Tor). *Soient A un anneau et I et J deux idéaux de A.*

(1) *Montrer que* $\mathrm{Tor}_1^A(A, A/J) = 0$.

(2) *Montrer que* $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) \simeq \dfrac{I \cap J}{IJ}$.

(3) *Montrer que* $\mathrm{Tor}_\bullet^A(\oplus_{i\in I} M_i, N) \cong \oplus_{i\in I} \mathrm{Tor}_\bullet^A(M_i, N)$

Exercice 10 (Foncteur Ext). *Soit A un anneau, M un A-module et $x \in A$ non diviseur de zéro.*

(1) *Calculer* $\mathrm{Ext}_A^1(A/(x), M)$.

(2) *En particulier calculer* $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

(3) *Montrer que* $\mathrm{Ext}_A^\bullet(M, \prod_{i\in I} N_i) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Ext}_A^\bullet(M, N_i)$ *et* $\mathrm{Ext}_A^\bullet(\oplus_{i\in I} M_i, N) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Ext}_A^\bullet(M_i, N)$.

(4) *Montrer qu'un groupe abelien de type fini G est libre si et seulement si* $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G, \mathbb{Z}) = 0$.

Exercice 11. *Soit $A = k[x_1, x_2]$. On considère les A-modules $M' = A/(x_1A + x_2A)$, $M = A/(x_1^2 A + x_1x_2A)$ et $M'' = A/(x_1A)$.*

(1) *Montrer que $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\times x_1} M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte non scindée.*

(2) *Construire des résolutions libres de M' et M'' et en déduire les modules* $\mathrm{Ext}_A^i(M', A)$, $\mathrm{Ext}_A^i(M'', A)$, $\mathrm{Ext}_A^i(M, A)$ *pour tout i.*

(3) *Calculer* $\mathrm{Ext}_A^\bullet(k, k)$ *et* $\mathrm{Tor}_\bullet^A(k, k)$.

(4) *Calculer la cohomologie du complexe de Koszul de A associée à la suite de morphisme (ϕ_1, ϕ_2) où $\phi_1(z) = x_1^2.z$ et $\phi_2(z) = \dfrac{\partial}{\partial_{x_2}} z$.*

Exercice 12 (Algèbre de Weyl). *Soit $W_n = \mathrm{C}[x_1, \ldots, x_n, \partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}]$ la C-algèbre non commutative dont les générateurs vérifient les relations : $x_ix_j = x_jx_i$, $\partial_{x_i}x_j = x_j\partial_{x_i}$ et $\partial_{x_i}\partial_{x_j} = \partial_{x_j}\partial_{x_i}$ pour $i \neq j$ et enfin $\partial_{x_i}x_i = x_i\partial_{x_i} + 1$.*

(1) *On considère le cas $n = 2$. Soit $\varphi_1 : W_2 \longrightarrow W_2$, $\omega \longmapsto \omega x_1$ et $\varphi_2 : W_2 \longrightarrow W_2$, $\omega \longmapsto \omega\partial_{x_2}$. Construire le complexe de Koszul $K^\bullet(W_2, (\varphi_1, \varphi_2))$ et calculer ses modules de cohomologie.*

(2) *Soit $\psi_i : W_n \to W_n$ la multiplication par x_i (à droite). Montrer que $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ est régulière et calculer $H^\bullet(K^\bullet(W_n, (\psi_j)_{j=1\ldots n}))$.*

(3) *On note M le W_n-module à gauche $W_n/(x_1^2, \ldots, x_n^2)$ et Ω le W_n-module à droite $W_n/(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}).W_n$. Calculer les groupes $\mathrm{Tor}_j^{W_n}(\Omega, M)$ (on pourra considérer les endomorphismes de W donnés par la multiplication à droite par x_i^2). .*

Exercice 13. *Soit $M = k[x, y, z]$. Considérons les endomorphismes k-linéaires*

$$\phi_1 = *(x + y), \qquad , \phi_2 = *z^3, \qquad , \phi_3 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$$

où $*$ désigne la multiplication. Montrer que les ϕ_j commutent deux à deux, puis calculer la cohomologie du complexe de Koszul $K^\bullet\big(M, (\phi_1, \phi_2, \phi_3)\big)$.

Exercice 14. *Soit M un A-module et $\varphi = (\varphi_1 \ldots, \varphi_n)$ n endomorphismes de M qui commutent deux à deux. Calculer la cohomologie du complexe de Koszul $K^\bullet(M, \varphi)$ sous l'hypothèse que $\varphi' = (\varphi_1 \ldots, \varphi_p)$ est une suite régulière et $\varphi'' = (\varphi_{p+1} \ldots, \varphi_n)$ est une suite corégulière.*