Feuille de TD 6 d'algèbre et topologie
Faisceaux abéliens

Grégory Ginot

Dans cette feuille d'exercices, k désigne un corps.

Exercice 1 (**Quelques exemples**). Soit X un espace topologique et M un k-module.

1) Faisceau constant Expliciter le faisceau constant M_X associé au préfaisceau $U \mapsto M$ sur $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Que peut-on-dire de M_X en général ?

2) "skyscraper sheaf" Soit $x \in X$. Pour tout ouvert $U \subset X$, on définit $S_x(U) = \{0\}$ si $x \notin U$ et $S_x(U) = M$ si $x \in U$. Si $U \subset V$, on définit une fonction de restriction $\rho_{U,V} : S_x(V) \to S_x(U)$ par l'identité si $x \in U$ et l'application nulle sinon. Montrer que $U \mapsto S_x(U)$ est un faisceau de k-modules.

3) On suppose $X = \mathbb{R}$. On note $F(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \,/\, f$ est continue, bornée$\}$. Montrer que F définit un préfaisceau séparé sur $\mathbb{R}$ mais pas un faisceau.

4) Soit $X = \{1, 2, \dots, n\}$ muni de la topologie discrète. Pour tout sous-ensemble $I = \{i_1 < \cdots < i_{\#I}\}$ (où # désigne le cardinal), on définit $F(I) = M(\#I, k)$ (le k-espace vectoriel des matrices carrées de taille $\#I$). Si $J \subset I$, on définit $\rho_{J \subset I} : M^{(\#I)^2} \to M^{(\#J)^2}$ par la projection sur les matrices de taille $\#J$ obtenue en ne gardant que les lignes et colonnes indexées par des éléments de J. Montrer que F est un préfaisceau mais n'est pas séparé (et donc n'est pas un faisceau).

Exercice 2 (**Morphismes de faisceaux et recollement**). Soient X un espace topologique et $X = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} X_i$ un recouvrement de X par des ouverts. Nous noterons $X_{ij} = X_i \cap X_j$ et $X_{ijk} = X_i \cap X_j \cap X_k$.

(1) Soient $F, G \in \mathrm{Mod}(k_X)$ deux faisceaux. On suppose donné, pour chaque $i \in \mathfrak{I}$, un morphisme $\varphi_i \in \hom(F_{|X_i}, G_{|X_i})$ tels que $\forall (i,j) \in \mathfrak{I}^2 : \varphi_{i|X_i \cap X_j} = \varphi_{j|X_i \cap X_j}$. Montrer qu'il existe un unique $\varphi \in \hom(F, G)$ tel que $\varphi_{|X_i} = \varphi_i$.

(2) Montrer que si les φ_i sont des isomorphismes, alors φ est un isomorphisme.

(3) On se donne maintenant, pour chaque $i \in \mathfrak{I}$, un faisceau F_i sur X_i et pour chaque couple $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$ un isomorphisme $\varphi_{ij} : F_{j|X_{ij}} \longrightarrow F_{i|X_{ij}}$. Pour tout ouvert U de X on définit :

$$\begin{aligned} \Phi_U : \prod_{i \in \mathfrak{I}} F_i(X_i \cap U) &\longrightarrow \prod_{(i,j) \in \mathfrak{I}^2} F_i(X_{ij} \cap U) \\ (s_i)_{i \in \mathfrak{I}} &\longmapsto \big(s_{i|X_{ij} \cap U} - \varphi_{ij}(s_{j|X_{ij} \cap U})\big)_{(i,j) \in \mathfrak{I}^2} \end{aligned}$$

et on pose $F(U) = \ker \Phi_U$. Montrer que F est un faisceau.

(4) On suppose désormais que pour tout $i \in \mathfrak{I}$ on a $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{F_i}$ et que pour tout $(i,j,k) \in \mathfrak{I}^3$ on a $\varphi_{ij|X_{ijk}} \circ \varphi_{jk|X_{ijk}} = \varphi_{ik|X_{ijk}}$.

i) Montrer pour tout $i \in \mathfrak{I}$ l'existence d'un unique isomorphisme de faisceau $F_i \xrightarrow[\sim]{\varphi_i} F_{|X_i}$ tel que pour tout $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$ on ait : $\varphi_{i|X_{ij}} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{j|X_{ij}}$.

ii) Soit G est un faisceau sur X ; on suppose que pour tout $i \in \mathfrak{I}$ il existe un isomorphisme $F_i \xrightarrow[\sim]{\psi_i} G_{|X_i}$ et que pour tout $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$ on a $\psi_{j|X_{ij}} = \psi_{i|X_{ij}} \circ \varphi_{ij}$; montrer qu'il existe un unique isomorphisme $F \xrightarrow{\psi} G$ tel que pour tout $i \in \mathfrak{I}$ on ait $\psi_i = \psi_{|X_i} \circ \varphi_i$.

(On dit que F est le recollement des faisceaux F_i à l'aide des isomorphismes φ_{ij}.)

(5) On suppose maintenant donné, pour chaque $i \in \mathfrak{I}$, un homéomorphisme $h_i : U_i \to V_i$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $i,j \in \mathfrak{I}$, on a $h_j \circ h_i^{-1} : h_i(U_{ij}) \to h_j(U_{ij})$ soit de classe C^∞ (en d'autres termes on suppose que X est une variété et que la famille $(X_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ en est un atlas C^∞).

i) Montrer que $(h_i^{-1})_* C^\infty(V_i)$ est un faisceau sur U_i et que $C^\infty(M)$ est le recollement des $(h_i^{-1})_* C^\infty(V_i)$.

ii) On $DR(V)$ le complexe de De Rham d'un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que les faisceaux $(h_i^{-1})_* DR(V_i)$ se recollent. On note $DR(M)$ leur recollement. On l'appelle complexe de de Rham de M.

iii) Montrer que la différentielle de De Rham sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$ s'étend en une différentielle sur $DR(M)$.

Exercice 3. Soit k un corps et X un espace topologique connexe tel que tout point de X admette une base de voisinages connexes (on dit que X est localement connexe). Soit F un faisceau de k-espaces vectoriels localement constant sur X tel que pour tout $x \in X$ on ait $F_x \simeq k$. Montrer que si $\Gamma(X, F) \neq (0)$, alors F est constant.

Exercice 4. Soit X un espace topologique connexe, localement connexe et A un anneau commutatif unitaire. Montrer que si $A_X \xrightarrow{\varphi} A_X$ est un isomorphisme de faisceau alors il existe $a \in A$ inversible tel que pour tout ouvert U de X l'isomorphisme $A_X(U) \xrightarrow{\varphi(U)} A_X(U)$ soit la multiplication par a.

Exercice 5. Soit X un espace topologique et S_1 et S_2 deux fermés de X tel que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. On pose $S = S_1 \cup S_2$. Montrer que $k_{XS} \simeq k_{XS_1} \oplus k_{XS_2}$.

Exercice 6 (Opérations sur les faisceaux)**.** Soit $f : X \to Y$ une application continue et $G, H \in \mathrm{Mod}(k_Y)$ et $F \in \mathrm{Mod}(k_X)$.

(1) Soit $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$ et $Z = \{(x,y) \in X,\ xy \geq 1\}$. On définit $f : X \to Y$ par $f(x,y) = y$. Calculer $f_* k_{XZ}$.

(2) Soit $Y = \mathbb{R}$ et $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy > 1,\ x > 0\}$. On définit $f : Z \to Y$ par $f(x,y) = xy$. Calculer $f_* k_Z$.

(3) Montrer qu'il y a un isomorphisme naturel $\mathrm{Hom}_{k_Y}(G, f_*F) \xrightarrow{\sim} f_* \mathrm{Hom}_{k_X}(f^{-1}G, F)$ dans $\mathrm{Mod}(k_Y)$.

(4) Montrer qu'il y a un isomorphisme naturel $f^{-1}(G \otimes_{k_Y} H) \xrightarrow{\sim} f^{-1}G \otimes_{k_X} f^{-1}H$ dans $\mathrm{Mod}(k_X)$.

Exercice 7. Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : Y \longrightarrow X$ une application continue, surjective telle que tout point de X admet un voisinage ouvert U tel que $f^{-1}(U) = V_1 \sqcup V_2$ et $f_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ soit un homéomorphisme $(i = 1, 2)$. Soit k un corps.

(1) Décrire une application naturelle nat : $k_X \longrightarrow f_* k_Y$.

(2) Montrer qu'il existe un morphisme $\mathrm{tr} : f_* k_Y \longrightarrow k_X$ tel que $\mathrm{tr} \circ \mathrm{nat} = 2\,\mathrm{Id}_{k_X}$. (Utiliser l'exercice 1.)

(3) En déduire que si k est de caractéristique différente de 2 alors il existe un faisceau de k-espace vectoriel L sur X localement constant de dimension 1, tel que $f_* k_Y \simeq k_X \oplus L$.

(4) Montrer que si Y est connexe, le faisceau L n'est pas constant.

(5) Construire un exemple...