Feuille de TD n°7 d'Algèbre et Topologie
Un peu de cohomologie des faisceaux

Grégory Ginot

Dans cette feuille d'exercices, k désigne un corps et A un anneau.

Exercice 1. Soient $X = \mathbb{S}^1$, X_1, X_2 et X_3 trois arcs de cercle et $F_i = k_{X_i}$. Nous supposerons que les intersections $X_{12} = X_1 \cap X_2$, $X_{23} = X_2 \cap X_3$ et $X_{31} = X_3 \cap X_1$ sont non vides et connexes et que $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$.
Soient les morphismes $\varphi_{12} : F_{2|X_{12}} \xrightarrow{\times\alpha} F_{1|X_{12}}$, $\varphi_{23} : F_{3|X_{23}} \xrightarrow{\times\beta} F_{2|X_{23}}$, $\varphi_{31} : F_{1|X_{31}} \xrightarrow{\times\gamma} F_{3|X_{31}}$ avec $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$.
De même soient les morphismes $\varphi'_{12} : F_{2|X_{12}} \xrightarrow{\times\alpha'} F_{1|X_{12}}$, $\varphi'_{23} : F_{3|X_{23}} \xrightarrow{\times\beta'} F_{2|X_{23}}$, $\varphi'_{31} : F_{1|X_{31}} \xrightarrow{\times\gamma'} F_{3|X_{31}}$ avec $\alpha', \beta', \gamma' \neq 0$.

(1) Dire pourquoi F le faisceau sur X obtenu par recollement des F_i à l'aide des morphismes φ_{ij} et F' le faisceau sur X obtenu par recollement des F_i à l'aide des morphismes φ'_{ij} sont bien définis.

(2) Montrer que $F \simeq F'$ si et seulement si $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$

(3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β et γ pour que F soit un faisceau constant.

(4) Calculer la cohomologie $H^\bullet(S^1, F)$.

Exercice 2 (**Faisceaux projectifs et plats).** Soit $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux unitairex sur X. On va montrer que $\mathrm{mod}\,(\mathcal{A})$ n'admet pas assez de projectifs en général mais cependant suffisament de faisceaux plats.

(1) On suppose que $P \in \mathrm{mod}\,(\mathbb{Z}_\mathbb{R})$ est un faisceau projectif sur l'espace topologique $\mathbb{R}$. Montrer que P est nul (on pourra considérer un morphisme naturel $P \to (P_x)_{\mathbb{R}\{x\}}$).

(2) Soit $F \in \mathrm{mod}\,(\mathcal{A})$ un faisceau abélien sur X. Pour tout U ouvert dans X et section $s \in F(U)$, construire un morphisme naturel $\rho_{U,s} : \mathcal{A}_U \to F$ (on pourra construire $\mathcal{A}_U \to F$).

(3) Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{mod}\,(\mathcal{A})$ plat et un épimorphisme $P \to F$. Rappelons que P est dit plat si le foncteur $P \otimes_\mathcal{A} -$ est exact dans $\mathrm{mod}\,(\mathcal{A})$.

(4) Soit $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{A}$-modules avec P et P'' plats. Montrer que P' est plat.

Exercice 3. Soit $L \in \mathrm{mod}(k_X)$ un faisceau localement constant sur X de rang 1. On note $L^* = \mathrm{Hom}_{k_X}(L, k_X)$ son faisceau dual.

(1) Montrer qu'il y a des isomorphismes naturels $L^* \otimes_{k_X} L \xrightarrow{\sim} k_X$ et $k_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k_X}(L, L)$.

(2) On suppose que X est connexe, localement connexe et $L(X) \neq 0$. Montrer que L est constant.

Exercice 4. Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.
On pose $Z_1 = \mathbb{S}^n \cap \big(\mathbb{R}^n \times]-\infty, 0]\big)$ et $Z_2 = \mathbb{S}^n \cap \big(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[\big)$.

(1) Montrer que Z_1 et Z_2 sont contractiles et que $Z_1 \cap Z_2 = \mathbb{S}^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

(2) Soit k un corps commutatif ; calculer par récurrence sur n les modules $H^j(\mathbb{S}^n, k_{\mathbb{S}^n})$ pour $n \geq 0$ et $j \geq 0$.

(3) Calculer $H^j(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}_{\mathbb{S}^n})$ pour $n \geq 0$ et $j \geq 0$.

(4) Invariance du domaine : Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est homotope à $\mathbb{S}^{n-1}$. En déduire que $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^p$ si et seulement si $n = p$.

Exercice 5. Soit X l'espace topologique formé de la réunion des arêtes d'un tétraèdre de $\mathbb{R}^3$ Soit A un anneau commutatif unitaire. Calculer $H^j(X, A_X)$ pour $j \geq 0$.

Exercice 6. Soit $\omega = \exp(2i\pi/3) \in \mathbb{C}$, X_1 l'espace topologique formé de la réunion des arêtes du triangle de sommets 1, ω et ω^2, X_2 l'espace topologique formé de la réunion des arêtes du triangle de sommets -1, $-\omega$ et $-\omega^2$, et $X = X_1 \cup X_2$.

(1) Soit k un corps commutatif ; calculer $H^j(X, k_X)$ pour $j \geq 0$.

(2) Calculer $H^j(X, \mathbb{Z}_X)$ pour $j \geq 0$.

Exercice 7. Soit $T = S^1 \times S^1$ un tore plongé dans $\mathbb{R}^3$ et $P = S^1 \times D^2$ le tore plein dont T est le bord.

1) Calculer les groupes de cohomologie $H^*(T, \mathbb{Z})$ et $H^*(P, \mathbb{Z})$.

2) Soit $f : T \to T$ et $g : P \to P$ deux homéomorphismes. Décrire $H^*(f) : H^*(T, \mathbb{Z}) \to H^*(T, \mathbb{Z})$ et $H^*(g) : H^*(P, \mathbb{Z}) \to H^*(P, \mathbb{Z})$. En déduire une condition nécéssaire (de nature cohomologique) pour qu'un homéomorphisme $f : T \to T$ s'étende en un homéomorphisme de P.

3) Soit $f : T \to T$ un isomorphisme du Tore (en tant que groupe topologique). En utilisant la question **2)**, donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f s'étende en un homéomorphisme de P.