

TD VIII d'Algèbre et Topologie – Cohomologie et applications; groupe fondamental

Grégory Ginot

Dans cette feuille d'exercices, k désigne un corps. On identifie $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ et note respectivement S^n la sphère unité de dimension n et D^n la boule unité de dimension n . On note ∂D^i le bord de D^i qui est identifié à S^{i-1} .

Exercice 1 (Espaces projectifs complexes). L'espace projectif complexe de dimension n est le quotient $\mathbb{C}P_n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \mathbb{C} - \{0\} \cong S^{2n+1} / S^1$. On note $[z_0, \dots, z_n]$ la classe de $[z_0, \dots, z_n] \neq 0$ dans $\mathbb{C}P_n$. Par définition $[z_0, \dots, z_n] = [\lambda z_0, \dots, \lambda z_n]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Les inclusions canoniques $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C} = \mathbb{C}^{n+1}$ induisent des morphismes continus $\mathbb{C}P_n \rightarrow \mathbb{C}P_{n+i}$. on notera $p : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P_n$ la projection canonique.

- (1) Montrer que pour tout $k = 1 \dots n$, le sous-ensemble $U_k = \{[z_0, \dots, z_n] \mid z_k \neq 0\}$ est ouvert et homéomorphe à $\mathbb{C}^n$ (on pourra admettre que p est ouverte). Montrer que $\mathbb{C}P_n - U_n \cong \mathbb{C}P_{n-1}$.
- (2) Soit $f : D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P_n$ l'application $(z_0, \dots, z_{n-1}) \mapsto [z_0, \dots, z_{n-1}, \sqrt{1 - (|z_0|^2 + \dots + |z_{n-1}|^2)}]$. Montrer que $f(\partial(D^{2n})) \subset \mathbb{C}P_n - U_n$ et que $f|_{D^{2n} - \partial(D^{2n})}$ est injective à valeur dans U_n . On note $f_0 = f|_{\partial(D^{2n})} : \partial(D^{2n}) \rightarrow \mathbb{C}P_n - U_n \cong \mathbb{C}P_{n-1}$. Montrer que f_0 est surjective.
- (3) Montrer que $\mathbb{C}P_n$ est homéomorphe à $\mathbb{C}P_{n-1} \cup_{f_0} D^{2n} = (\mathbb{C}P_{n-1} \coprod D^{2n}) / (\partial D^{2n} \ni x \sim f(x) \in \mathbb{C}P_n)$, la réunion de D^{2n} et $\mathbb{C}P_{n-1}$ où on identifie les points du bord de D^{2n} avec leur image dans $\mathbb{C}P_{n-1}$. Montrer que $\mathbb{C}P_1 \cong S^2$.
- (4) En déduire la cohomologie $H^\bullet(\mathbb{C}P_n, k_{\mathbb{C}P_n})$.
- (5) Quelle est la cohomologie de $\mathbb{C}P_\infty = \varinjlim \mathbb{C}P_n$?

Exercice 2. Quelle est la cohomologie d'un cornet de glace (avec 1 boule)? Il est préférable de répondre avant que la glace fonde. Même question si on suppose que la boule de glace est creuse (cas peu enviable il est vrai).

Exercice 3 (Cup produit). On suppose $k = \mathbb{C}$ et soit X une variété C^∞ (de dimension n).

- (1) Rappeler pourquoi il y a un isomorphisme naturel $H^\bullet(X, \mathbb{C}_X) \cong H^\bullet(\Gamma(X, DR_X^\bullet))$.
- (2) Soit $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ un recouvrement de X par des ouverts tels que $U_i \cong V_i$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. Soit $\omega_i \in DR^p(V_i)$, $\nu_i \in DR^q(V_i)$. Montrer que le produit extérieur $\omega_i \wedge \nu_i \in DR^{p+q}(V_i)$ induit une multiplication associative sur $H^\bullet(X, \mathbb{C}_X)$. On note $\cup$ cette multiplication et on l'appelle le cup produit.
- (3) Montrer que le cup produit est gradué commutatif, c'est à dire que, pour tout $a \in H^p(X, \mathbb{C}_X)$, $b \in H^q(X, \mathbb{C}_X)$, on a

$$a \cup b = (-1)^{pq} b \cup a.$$

L'algèbre $(\bigoplus H^i(X, \mathbb{C}_X), \cup)$ est dite graduée commutative. Montrer que le cup produit est naturel; c'est à dire que si $\phi : X \rightarrow Y$ est une application continue, alors $\phi^\# : H^\bullet(Y, \mathbb{C}_Y) \rightarrow H^\bullet(X, \mathbb{C}_X)$ est un morphisme d'algèbres.

Exercice 4 (Degré d'une application et applications). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $[S^n]$ un générateur du $\mathbb{Z}$ -module $H^n(S^n, \mathbb{Z}_{S^n}) \cong \mathbb{Z}$.

(1) Soit $j : \mathbb{Z}_{S^n} \rightarrow \mathbb{R}_{S^n}$ le morphisme naturel de faisceaux.

i) Montrer que $w_n := H^n(j)([S^n])$ est un générateur de $H^n(S^n, \mathbb{R}_{S^n})$.

ii) Soit $f : S^n \rightarrow S^n$. Montrer qu'il existe $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ tel que $f^\#(w_n) = \deg(f)w_n$ et que $\deg(f) = \deg(g)$ si f et g sont homotopes. Ce nombre $\deg(f)$ s'appelle le degré de f .

(2) (**Structures de groupes sur les sphères**) On va montrer qu'il n'y a pas de structures de groupe topologique sur les sphères S^{2n} pour $n > 0$.

i) Montrer que $H^k(S^m \times S^m, \mathbb{R}_{S^m \times S^m}) \cong \bigoplus_{i+j=k} H^i(S^m, \mathbb{R}_{S^m}) \otimes H^j(S^m, \mathbb{R}_{S^m})$ et que pour toute

application $\mu : S^m \times S^m \rightarrow S^m$, il existe $\deg_1(\mu), \deg_2(\mu) \in \mathbb{R}$ tels que $\mu^\#(w_m) = \deg_1(\mu)w_m \otimes 1 + \deg_2(\mu)1 \otimes w_m$.

ii) Montrer que si $\mu : S^m \times S^m \rightarrow S^m$ admet une unité, alors $\deg_1(\mu) = \deg_2(\mu) = 1$.

iii) En utilisant que $w_n \cup w_n = 0$, montrer que $\deg_1(\mu)\deg_2(\mu) = 0$ si n est pair (on pourra utiliser que le cup-produit est gradué commutatif).

iv) Conclure.

Exercice 5 (Théorèmes de séparation de Jordan généralisés). Dans ce qui suit on considère les groupes de cohomologie d'un espace X à coefficient dans le faisceau constant k_X (qu'on oublie dans les notations).

(1) Soit $f : D^r \rightarrow S^n$ une immersion. Montrer que $H^\bullet(S^n - f(D^r)) \cong H^\bullet(\{*\})$ et en déduire que $S^n - f(D^r)$ est connexe (on pourra raisonner par récurrence, écrire $D^n \cong D^{n-1} \times I$ et considérer les fermés $D^{n-1} \times [0, 1/2]$ et $D^{n-1} \times [1/2, 1]$).

(2) Soit $f : S^r \rightarrow S^n$. Montrer que $H^\bullet(S^n - f(S^r)) \cong H^\bullet(S^{n-r-1})$ si $r < n$.

(3) En déduire que si $r = n - 1$, alors $S^n - f(S^{n-1})$ a exactement deux composantes connexes qui sont acycliques et dont les bords sont exactement $f(S^{n-1})$.

(4) Déduire de (2) que si $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une immersion avec $n \geq 2$, alors $\mathbb{R}^n - f(S^{n-1})$ a deux composantes connexes. De plus une d'entre elle est bornée et acyclique et l'autre est non-bornée.

Exercice 6. On considère trois sphères de Riemann S_1, S_2 et S_3 plongées dans $\mathbb{R}^3$. On suppose qu'elles sont deux à deux tangentes extérieurement et on note $x_{ij} = S_i \cap S_j$. Soit $X = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

(1) Calculer la cohomologie $H^i(X, k_X)$.

(2) Calculer le groupe fondamental $\pi_1(X, x_{ij})$ (on pourra utiliser Van Kampen).

Exercice 7. Le but de cet exercice est de montrer que tout groupe G est le groupe fondamental d'un espace topologique X .

(1) Montrer que pour tout groupe G , il existe un ensemble $\mathfrak{I}$ et un sous groupe normal N du groupe $F(\mathfrak{I}) := \prod_{i \in \mathfrak{I}} \mathbb{Z}$ tel que $G \cong F(\mathfrak{I})/N$ (on pourra commencer par construire un épimorphisme $F(\mathfrak{I}) \rightarrow G$). Le coproduit dans la définition de $F(\mathfrak{I})$ est le coproduit dans la catégorie des groupes (et pas des groupes abéliens !).

(2) Soit X un espace topologique connexe, localement connexe et localement simplement connexe $f : I \rightarrow X$ un lacet (i.e. $f(0) = f(1)$). On note D^2 , le disque unité de $\mathbb{R}^2$ et on identifie f avec un morphisme de $S^1 = \partial D^2 \rightarrow X$. On note $D^2 \cup_f X$ l'espace topologique $(D^2 \coprod X)/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par $S^1 \ni y \sim f(y) \in X$. Montrer que $\pi_1(D^2 \cup_f X) \cong \pi_1(X)/N(f)$ où $N(f)$ est le sous-groupe normal de $\pi_1(X)$ engendré par la classe d'homotopie du lacet f .

- (3) Montrer que pour tout ensemble $\mathfrak{J}$, il existe X et $x \in X$ tels que $F(\mathfrak{J}) = \pi_1(X, x)$ (on pourra regarder des bouquets de cercles).
- (4) Dédire des questions précédentes que pour tout groupe G , il existe un espace topologique X connexe tel que $G \cong \pi_1(X)$.

Exercice 8. Soit $f : Y \rightarrow X$ une application continue et F un faisceau abélien sur Y . On note $F^\bullet$ une résolution injective du faisceau F .

- (1) Rappeler pourquoi le foncteur f_* est exact à gauche. On note $R^i f_* F$ le $i^{\text{ème}}$ foncteur dérivé à droite de $f_* F$.
- (2) Montrer que, pour tout $x \in X$, on a $(R^i f_* F)_x \cong H^i((f_* F^\bullet)_x)$.
- (3) On suppose désormais que tout $x \in X$ admet un voisinage ouvert U_x tel que $H^j(f^{-1}(U_x), F) = 0$ pour $j > 0$. Dédire du (2) que $(R^i f_* F) = 0$ pour tout $j > 0$.
- (4) En déduire que $f_* F^\bullet$ est une résolution injective de $f_* F$.
- (5) Montrer que pour tout ouvert U de X , on a $H^j(U, f_* F) \cong H^j(f^{-1}U, F)$.
- (6) Construire un exemple explicite.

Exercice 9 (Théorème de Borsuk-Ulam). On note encore S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ (on suppose $n \geq 1$). L'application *antipodale* $a : S^n \rightarrow S^n$ est l'application $x \mapsto -x$ (c'est bien sur la symétrie par rapport au centre de la sphère). Cette application induit donc une action de $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur S^n . L'espace quotient S^n/k est (par définition) l'espace projectif réel de dimension n , noté $\mathbb{R}P_n$. En particulier la projection $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P_n$ est un revêtement à 2 feuillets.

- (1) Montrer que $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P_n$ vérifie les hypothèses de l'exercice 8 question (3).
- (2) Montrer que $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P_n$ vérifie les hypothèses de l'exercice 6 de la feuille de TD 6. En déduire (on prendra garde que k est de caractéristique 2) qu'il existe une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow k_{\mathbb{R}P_n} \xrightarrow{\text{nat}} p_*(k_{S^n}) \xrightarrow{\text{tr}} k_{\mathbb{R}P_n} \longrightarrow 0.$$

- (3) Dédire de la question précédente et de l'exercice 8, question (5), qu'il y a une suite exacte longue en cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \xrightarrow{n} H^0(S^n, k_{S^n}) \xrightarrow{t} H^0(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \rightarrow H^1(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \xrightarrow{n} H^1(S^n, k_{S^n}) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \rightarrow H^n(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \xrightarrow{n} H^n(S^n, k_{S^n}) \xrightarrow{t} H^n(\mathbb{R}P_n, k_{\mathbb{R}P_n}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

où on note respectivement n, t les morphismes induits en cohomologie par nat et tr.

- (4) Montrer que $n \circ t : H^n(S^n, k_{S^n}) \rightarrow H^n(S^n, k_{S^n})$ est l'application nulle. En déduire que dans la suite exacte de la question (3), les flèches sont alternativement un isomorphisme et 0.
- (5) Montrer que si $f : S^n \rightarrow S^m$ vérifie $f \circ a = a \circ f$, alors $n \leq m$ (on pourra utiliser que la longue suite exacte de (4) est naturelle)
- (6) **Borsuk-Ulam :** En déduire que pour tout $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$. C'est le Théorème de Borsuk-Ulam

- (7) **Applications :** i) Montrer qu'à tout instant, il y a deux points antipodaux à la surface de la terre où et la température et la pression atmosphérique sont les mêmes.
- ii) Soient $A_1, \dots, A_m$ des sous-ensembles mesurables (au sens de Lebesgue) de $\mathbb{R}^m$. Montrer qu'il existe un hyperplan affine de $\mathbb{R}^m$ qui divise chaque A_i en deux parties égales. En déduire qu'on peut diviser, en un seul coup de couteau, un sandwich au jambon en deux parties avec exactement les mêmes quantités de pain et de jambon...

Exercice 10 (Bouteille de Klein). Soit K^2 l'espace topologique, appelé *bouteille de Klein*, obtenu comme le quotient du plan $\mathbb{R}^2$ par les transformations affines $\alpha(x, y) = (x + 1, y)$ et $\beta(1 - x, y + 1)$. On note $x_0 \in K^2$ la classe du point $(0, 0)$

- 1) Calculer les groupes de cohomologie $H^*(K^2, \mathbb{Z})$.
- 2) Calculer $\pi_1(K^2, x_0)$.