

# INTRODUCTION À L'HOMOTOPIE

GRÉGORY GINOT

RÉSUMÉ. Nous allons présenter une introduction aux théories modernes de l'homotopie, en particulier basées sur les catégories de modèle. Ces notions proviennent des travaux de Daniel Quillen dans les années 1960-70. Nous nous appuyerons sur trois exemples que nous traiterons plus ou moins parallèlement : les espaces topologiques, l'algèbre homologique, et les algèbres commutatives. Ce dernier exemple nous permettra de caractériser le type d'homotopie rationnel des espaces en termes de dg-algèbres commutatives. Les techniques de catégorie de modèles, en plus de leur vertu unificatrice, permettent notamment de faire de l'algèbre homologique dans un cadre non-abélien et ont un rôle important dans les développements récents de la topologie algébrique mais aussi certains aspects de la géométrie algébrique.

## TABLE DES MATIÈRES

I. Notions d'homotopie, algèbre homologique et (r)appels	2
1.1. Homotopie entre fonctions, entre espaces	2
1.2. Groupes d'homotopie d'un espace topologique	3
1.3. Algèbre Homologique	6
1.4. Construction de <i>Tor</i> et <i>Ext</i>	7
1.5. Retour aux espaces topologiques : fibrations	10
1.6. Groupes d'homotopie relatifs et suites exactes longues en homotopie	15
1.7. Cofibrations	21
II. Catégories de Modèle	27
2.1. Définitions et axiomatique	27
2.2. Catégorie homotopique d'une catégorie de modèle	33
2.3. Exemples des complexes de chaînes, argument du petit objet et catégories de modèle cofibrement engendrées	44
2.4. Foncteurs de Quillen, foncteurs dérivés	60
2.5. Colimites et limites homotopiques	67
III. Ensembles simpliciaux	74
3.1. Complexes simpliciaux et ensembles simpliciaux	74
3.2. Structure de modèle	82
3.3. Groupes d'homotopie simpliciaux	90
3.4. Généralisations et application aux colimites homotopiques	94
Références	98

# I. NOTIONS D'HOMOTOPIE, ALGÈBRE HOMOLOGIQUE ET (R)APPELS

*Notation 1.0.1.* On désignera respectivement par **Top** la catégorie des espaces topologiques, dont les flèches sont les applications continues, et par **Top\*** celle des espaces topologiques pointés (dont les flèches sont les applications continues envoyant le point base de la source sur celui du but).

On notera  $I$  le segment compact  $[0, 1]$ ,  $\mathbb{S}^n$  la sphère de dimension  $n$ .

## 1.1. HOMOTOPIE ENTRE FONCTIONS, ENTRE ESPACES

**Définition 1.1.1.** Deux applications continues  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  entre espaces topologiques sont dites homotopes s'il existe une application continue  $F : X \times \underbrace{[0; 1]}_I \rightarrow Y$

telle que  $F|_{X \times \{0\}} = f_0$  et  $F|_{X \times \{1\}} = f_1$ .

**Définition 1.1.2.** Deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  sont dit homotopes s'il existe deux morphismes  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  tels que  $f \circ g$  est homotope à  $id_Y$  et  $g \circ f$  est homotope à  $id_X$ .

*Notation 1.1.3.* (1) Si deux morphismes  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  sont homotopes, on notera :  $f_0 \simeq f_1$ .

(2) Si deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  sont homotopes, on notera :  $X \simeq Y$ .

(3) Si deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  sont isomorphes (homéomorphes), on notera :  $X \cong Y$ .

La relation d'homotopie entre deux applications continues (et par suite entre espaces) est une relation d'équivalence. Par ailleurs, si  $f \simeq g$  alors  $p \circ f \circ q \simeq p \circ g \circ q$  pour toute paire d'applications continues  $p, q$  (telle que les composées existent bien sûr).

*Exercice 1.1.4.* Démontrer ces affirmations.

**Définition 1.1.5.** Un espace contractile est un espace homotope à un point.

*Exemple 1.1.6.* Un point, une boule,  $\mathbb{R}^n$ . Contre-exemples : Deux points, un cercle,  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ...

**Définition 1.1.7.** Soit  $X, Y$  deux espaces topologiques,  $A \subseteq X$  un sous-espace, et  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  tels que  $f_0|_A = f_1|_A$ . On dit que  $f_0$  est homotope à  $f_1$  relativement à  $A$  s'il existe une application continue  $F : X \times \underbrace{[0; 1]}_I \rightarrow Y$  telle que  $F|_{X \times \{0\}} = f_0$ ,

$F|_{X \times \{1\}} = f_1$ , et  $F|_A = f_0|_A = f_1|_A$ .

Les propriétés et notations précédentes s'étendent sans difficulté au cas relatif. On notera  $\simeq_A$  la relation être homotope relativement à  $A$ .

**Définition 1.1.8.** Un sous-espace  $A \xrightarrow{i} X$  est un rétract par déformation (resp. déformation forte) s'il existe  $p : X \rightarrow A$  telle que  $p \circ i = id_A$  et  $i \circ p \simeq id_X$  (resp. relativement à  $A$ ).

*Exemple 1.1.9.* L'exemple standard est la sphère  $\mathbb{S}^n$  qui est un rétracte par déformation forte de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

## 1.2. GROUPES D'HOMOTOPIE D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE

**Définition 1.2.1.** Si  $X$  est un espace topologique, on note  $\pi_0(X)$  l'ensemble de ses composantes connexes par arcs. Si  $x_0 \in X$ , et  $n \geq 1$ , on note  $\pi_n(X, x_0)$  l'ensemble des classes d'homotopie relatives (au point base) d'applications  $(\mathbb{S}^n, *) \rightarrow (X, x_0)$  (autrement dit les applications continues de  $\mathbb{S}^n$  dans  $X$  qui envoient le point base  $*$  sur  $x_0$  modulo les homotopies  $H$  telles que  $H(*, -) = x_0$ ).

*Notation 1.2.2.* On note  $[X, Y]$  (resp.  $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ ) l'ensemble des classes d'homotopie (resp. relatives) de morphismes  $X \rightarrow Y$ .

*Remarque 1.2.3.* a) Si  $X \neq \emptyset$ , la définition reste valable pour  $\pi_0(X, x_0)$  quel que soit  $x_0 \in X$ .

b) On peut de manière équivalente définir  $\pi_n(X, x_0)$  comme étant les classes d'homotopie d'applications  $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ , c'est à dire les classes d'homotopie d'applications envoyant le bord de  $I^n$  sur  $x_0$  (et on impose qu'en tout temps  $t \in [0, 1]$ , l'homotopie  $H(-, t) : I^n \times \{t\} \rightarrow X$  vérifie aussi cette propriété).

**Définition 1.2.4** (Suspension). La suspension d'un espace topologique  $X$  est l'espace topologique :

$$SX := X \times I /_{(x,0) \sim (x',0), (x,1) \sim (x',1)}$$

**Définition 1.2.5** (Suspension réduite). La suspension réduite d'un espace pointé  $(X, x_0)$  est l'espace topologique pointé :

$$\Sigma(X, x_0) := (X \times I /_{(x,0) \sim (x',0), (x,1) \sim (x',1), (x_0,t) \sim (x_0,t')}, (x_0, I))$$

*Exemple 1.2.6.* Les sphères sont des suspensions réduites :

$$\Sigma(\mathbb{S}^n, *) \cong (\mathbb{S}^{n+1}, *)$$

Lorsque  $X$  est pointé par un point  $x_0$ , on a une application quotient canonique  $SX \rightarrow \Sigma(X, x_0)$ . Cette application n'est pas toujours une équivalence d'homotopie. Elle l'est cependant dès que  $(X, x_0)$  est *bien pointé*, voir la feuille de TD 1. C'est en particulier le cas si  $X$  est un CW-complexe ou une variété topologique quelconque.

**Définition 1.2.7** (Structure produit sur les morphismes de source une suspension). Soient  $f, g : \Sigma(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ . On définit  $f * g : \Sigma(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  comme étant la composée :

$$\Sigma(X, x_0) \rightarrow \Sigma(X, x_0) /_{X \times \{\frac{1}{2}\}} \cong \Sigma(X, x_0) \vee \Sigma(X, x_0) \xrightarrow{f \vee g} (Y, y_0)$$

voir figure 1. En termes de coordonnées on a donc

$$f * g(x, t) := \begin{cases} f(x, 2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ g(x, 2t - 1) & \text{si } t \geq 1/2. \end{cases}$$

**Proposition 1.2.8.** a) La classe d'homotopie de  $f * g$  ne dépend que des classes d'homotopie de  $f$  et de  $g$ .

b) Le produit  $*$  est associatif à homotopie près :

$$(f * g) * h \simeq f * (g * h)$$

c) L'application constante  $c : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  (définie par  $c(x) = y_0$ ) est une unité pour  $*$  à homotopie près :

$$f * c \simeq c * f \simeq f$$

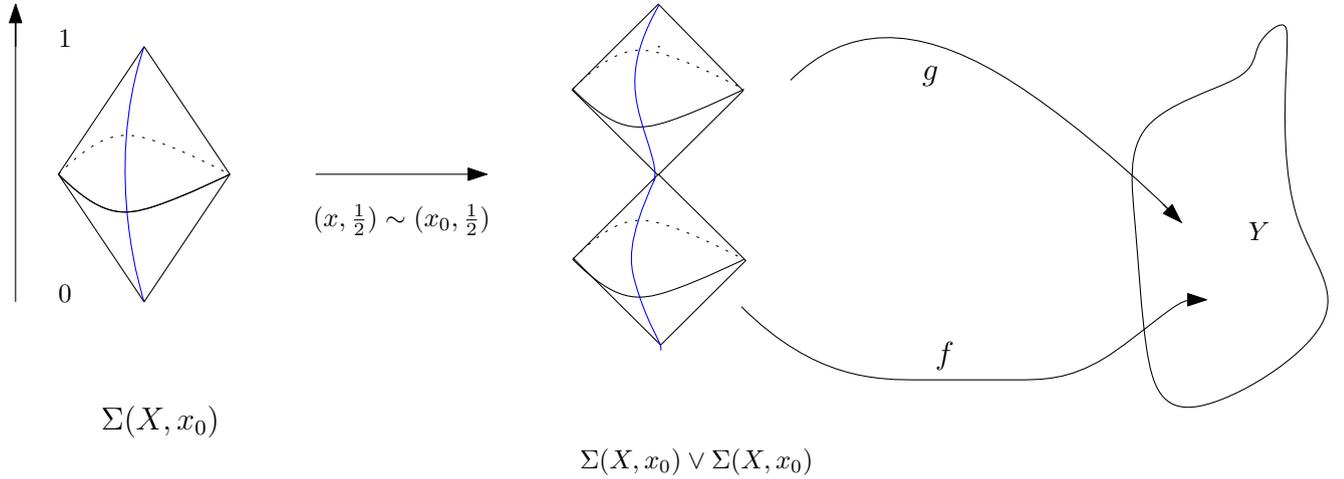


FIGURE 1. La suspension réduite, à gauche, la classe du point base étant représentée en bleu et la définition de  $f * g$ .

d) Tout  $f \in [\Sigma(X, x_0), (Y, y_0)]$  admet un inverse pour  $*$  : Posons  $f^{-1}(x, t) := f(x, 1 - t)$ . Alors  $f * f^{-1} \simeq c \simeq f^{-1} * f$ .

Ainsi,  $([\Sigma(X, x_0), (Y, y_0)], *)$  est un groupe, et, en particulier, pour tout  $n \geq 1$ , on a que  $\pi_n(Y, y_0)$  est un groupe.

**Proposition 1.2.9.** a) Si  $n \geq 2$ ,  $\pi_n(Y, y_0)$  est abélien. Plus généralement, si  $X = \Sigma X'$ ,  $*$  définit un produit commutatif sur  $[\Sigma(X, x_0), (Y, y_0)]$ .

b) Si  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ , on définit un morphisme de groupes :

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0) \\ [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

De plus, si  $f$  est une équivalence d'homotopie, alors  $f_*$  ci-dessus est un isomorphisme. (On définit aussi une application  $f_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ .)

*Exercice 1.2.10.* Démontrer les deux propositions précédentes. On fera un dessin pour illustrer la preuve de la commutativité des groupes d'homotopie supérieurs.

*Remarque 1.2.11.* Si  $x_0$  et  $x'_0$  sont dans la même composante connexe par arcs, alors on a des isomorphismes  $\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x'_0)$  pour tout  $n \geq 1$ . Un tel isomorphisme est induit en conjuguant des lacets (ou sphères) par un chemin de  $x_0$  à  $x'_0$ . Cet isomorphisme n'est pas canonique en général. Il le devient, pour  $n = 1$ , si par exemple  $\pi_1(X, x_0)$  est abélien, et pour  $n \geq 1$  si l'action induite de  $\pi_1(X, x_0)$  sur  $\pi_n(X, x_0)$  est triviale<sup>1</sup>.

**Définition 1.2.12 (équivalence d'homotopie faible).** Une application  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie faible si  $f_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  est une bijection et si pour tout  $x_0 \in X$  et tout  $n \geq 1$ ,  $f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$  est un isomorphisme.

*Remarque 1.2.13.* Une équivalence d'homotopie est une équivalence faible d'homotopie. La réciproque n'est pas vraie, en effet, *a priori*, une équivalence faible n'a par exemple pas d'inverse homotopique.

1. un espace pour lequel les actions induites sont toutes triviales est dit simple. C'est évidemment le cas si l'espace est simplement connexe.

*Exemple 1.2.14.*  $X = \mathbb{N}$  et  $Y = \{\frac{1}{n}, n > 0\} \cup \{0\}$  sont faiblement homotopiquement équivalents mais pas homotopiquement équivalents.

La relation  $X$  et  $Y$  sont reliés par *une* équivalence d'homotopie faible n'est pas une relation d'équivalence, puisque rien ne garantit qu'une application inverse existe et donc la symétrie de cette relation (l'exemple précédent le démontre...). On va donc considérer la relation engendrée par cette relation.

**Définition 1.2.15.** Deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  seront dits faiblement homotopes si il existe une suite finie

$$X \rightarrow Z_1 \leftarrow Z_2 \rightarrow Z_3 \leftarrow Z_4 \dots Z_n \rightarrow Y$$

dont toutes les flèches sont des équivalences d'homotopie faible.

*Remarque 1.2.16.* On prendra garde qu'être faiblement homotope implique évidemment avoir des groupes d'homotopie isomorphes (sur les composantes connexes par arcs) mais que la réciproque n'est pas vraie en général. En effet, deux espaces topologiques peuvent avoir des groupes d'homotopie deux à deux isomorphes sans être faiblement équivalents. Par exemple,  $\mathbb{R}P_2$  et  $\mathbb{R}P_\infty$  ont les mêmes groupes d'homotopie. Il ne peut en revanche pas exister de morphisme  $f : \mathbb{R}P_2 \rightarrow \mathbb{R}P_\infty$  qui induise un isomorphisme en homotopie, car sinon, le théorème 1.2.19 assurerait que  $f$  est un quasi-isomorphisme, ce qui ne peut être le cas, car ces deux espaces n'ont pas les mêmes groupes d'homologie.

*Remarque 1.2.17.* En général, les espaces que l'on rencontrera seront relativement "gentils". (par exemple, ce seront des complexes cellulaires)

**Théorème 1.2.18** (Whitehead, 1949). Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue (non-nécessairement cellulaire) entre deux CW-complexes, alors  $f$  est une équivalence faible d'homotopie si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie.

*Démonstration.* Voir la feuille de TD 1 et sa solution. □

Les équivalences d'homotopies faibles sont cependant suffisantes pour identifier l'homologie de deux espaces topologiques :

**Théorème 1.2.19.** Si  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence faible d'homotopie, alors, pour tout groupe abélien  $G$ , les applications induites :

$$f : H_n(X, G) \rightarrow H_n(Y, G)$$

sont des isomorphismes.

On renvoie à [15, 3, 8, 18] pour une preuve. Un autre très beau résultat de Whitehead affirme que

**Théorème 1.2.20.** Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue entre espaces simplement connexes<sup>2</sup> telle que  $f_* : H_i(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(Y, \mathbb{Z})$  est un isomorphisme pour tout  $i < n$  et un épimorphisme pour  $i = n$ , alors il en va de même pour  $f_* : \pi_i(X, x) \rightarrow \pi_i(Y, f(x))$  (quel que soit  $x \in X$ ).

En particulier, si  $f_* : H_n(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(Y, \mathbb{Z})$  est un isomorphisme pour tout  $n \geq 0$ , alors  $f$  est une équivalence d'homotopie faible.

*Démonstration.* Voir [3, Théorème 11.2]. □

2. c'est à dire que  $\pi_0(X) = \{0\} = \pi_1(X)$

*Remarque 1.2.21.* On peut remarquer que le premier point est une sorte de réciproque partielle du théorème de Hurewicz

*Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue entre espaces connexes par arcs et que  $\pi_i(f) : \pi_i(X, x) \rightarrow \pi_i(Y, f(x))$  est un isomorphisme pour tout  $i < n$  et un isomorphisme ou épimorphisme pour  $i = n$ , alors il en va de même pour  $f_* : H_i(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(Y, \mathbb{Z})$*

*Remarque 1.2.22.* Le théorème 1.2.20 n'est pas vrai si on ne suppose pas  $X$  et  $Y$  simplement connexes en général, voir [18] pour un contre-exemple (par exemple  $S^2 \vee S^1$ !). On peut cependant modifier les hypothèses pour gérer néanmoins ce cas.

Toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  induit une application continue  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  au niveau des revêtements universels de  $X$  et  $Y$  (s'ils existent) par propriété des revêtements.

*Théorème 1.2.23.* Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue telle que pour tout  $x \in X$ ,  $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$  est un isomorphisme et que  $\tilde{f}_* : H_n(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\tilde{Y}, \mathbb{Z})$  est un isomorphisme pour tout  $n \geq 0$ , alors  $f$  est une équivalence d'homotopie faible.

*Esquisse de la preuve :* L'isomorphisme  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}[\pi_0(X)] \xrightarrow{\cong} H_0(Y) \cong \mathbb{Z}[\pi_0(Y)]$  implique que  $f_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  est une bijection. Ceci permet de se ramener à démontrer le résultat sur les composantes connexe par arcs. La condition sur le  $\pi_1$  fait partie de l'énoncé. En passant aux revêtements universels, la longue suite exacte d'homotopie d'un revêtement (cas particulier de celle d'une fibration de Serre) cf Théorème 1.5.14 permet de se ramener à démontrer que  $\tilde{f}_* : \pi_*(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_*(\tilde{Y}, \tilde{f}(\tilde{x}))$  est un isomorphisme. Ce qui est exactement le Théorème 1.2.20.

Cet énoncé nécessite de pouvoir prendre des revêtements universels; ce n'est en fait pas un problème car tout espace est faiblement homotope à un CW-complexe (cf la Remarque 3.2.16), et donc à équivalence d'homotopie faible près, tout espace à un tel revêtement universel (évidemment le calcul de cet espace peut être compliqué...). Par ailleurs, l'hypothèse que les applications induites sur l'homologie des revêtements universels est un isomorphisme peut se tester au niveau de l'homologie à coefficient local de  $X, Y$ . En effet, par un argument standard de suite spectral (appliqué à celle de Leray-Serre du revêtement universel), cela revient à vérifier que le morphisme en homologie à coefficient locaux  $H_i(X, \mathbb{Z}[\pi_1(X, x)]) \rightarrow H_i(Y, \mathbb{Z}[\pi_1(Y, f(x))])$  est un isomorphisme (ici les groupes sont munis de l'action induite par celle des groupes fondamentaux).

### 1.3. ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

On fixe un anneau  $R$  commutatif.

**Définition 1.3.1.** Un complexe de chaînes est un diagramme de  $R$ -modules :

$$\dots \xrightarrow{d} C_i \xrightarrow{d} C_{i-1} \xrightarrow{d} C_{i-2} \dots$$

tel que  $d \circ d = 0$ .

Un complexe de cochaînes est un diagramme de  $R$ -modules :

$$\dots \xleftarrow{\partial} C_i \xleftarrow{\partial} C_{i-1} \xleftarrow{\partial} C_{i-2} \dots$$

tel que  $\partial \circ \partial = 0$ .

**Définition 1.3.2.** un morphisme de complexes de chaînes  $f : A \rightarrow B$  est une suite de morphismes  $f_n : A_n \rightarrow B_n$  compatible avec la différentielle :  $d \circ f_n = f_{n-1} \circ d$ .

**Définition 1.3.3** (quasi-isomorphisme). Un morphisme de complexes de chaînes  $f : A \rightarrow B$  est appelé un quasi-isomorphisme, (ou une équivalence faible), s'il induit des isomorphismes en tout degré en homologie. On notera parfois  $\xrightarrow{\sim}$  les quasi-isomorphismes.

Une homotopie entre deux morphismes  $f, g : A \rightarrow B$  est une suite d'applications  $H_n : A_n \rightarrow B_{n+1}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on ait

$$d \circ H_n + H_{n-1} \circ d = f_n - g_n$$

On remarque facilement que si  $f$  est homotope à l'identité, c'est un quasi-isomorphisme.

*Remarque 1.3.4.* Soit  $N$  un  $R$ -module et  $(A, d)$  un complexe. On peut étendre la différentielle  $d$  linéairement en  $d \otimes_R \text{id}_N$  sur chaque  $A_i \otimes_R N$ . Il est clair que la suite obtenue  $(A_i \otimes_R N, d \otimes_R \text{id}_N)$  est un complexe de chaînes.

Si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme de complexe de  $R$ -modules, alors l'application induite  $f \otimes_R \text{id}_N$  est un morphisme de complexe. De même, une homotopie  $H$  entre deux morphismes de complexes  $f, g$  induit une homotopie  $H \otimes_R \text{id}_N$  entre les applications  $f \otimes_R \text{id}_N$  et  $g \otimes_R \text{id}_N$ .

En revanche, un quasi-isomorphisme  $f : A \rightarrow B$  n'induit *pas* un quasi-isomorphisme  $A \otimes_R \text{id}_N \rightarrow B \otimes_R \text{id}_N$  en général (sauf si  $N$  est plat). Ce phénomène est du au fait que le produit tensoriel  $- \otimes_R \text{id}_N$  ne préserve pas les suites exactes courtes en général. Il convient d'étudier quelques exemples et exercice d'algèbre homologique sur ce sujet dans votre référence préférée (ou consulter celles données sur la page web du cours).

On réunit dans le lemme suivant les deux lemmes fondamentaux/teurs de l'algèbre homologique :

**Lemme 1.3.5.** a) (Lemme du serpent) Si  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  est une suite exacte courte de complexes de chaînes, on obtient une suite exacte longue en homologie :

$$\dots H_n(A) \xrightarrow{f_*} H_n(B) \xrightarrow{g_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(B) \dots$$

b) *Lemme des cinq* Étant donné un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \hookrightarrow & B' & \twoheadrightarrow & C' \end{array}$$

Si les deux lignes sont exactes, et si deux des morphismes verticaux sont des quasi-isomorphismes, le troisième l'est aussi.

#### 1.4. CONSTRUCTION DE $Tor$ ET $Ext$

Soient  $M$  et  $N$  deux  $R$ -modules.

Les deux foncteurs  $\cdot \otimes_R N$  et  $Hom_R(M, \cdot)$  ne sont pas exact en général :  $\cdot \otimes_R N$  est exact à droite et  $Hom_R(M, \cdot)$  est exact à gauche. Lorsque  $\cdot \otimes_R N$  est exact on dit que  $N$  est plat.

**Définition 1.4.1.** Une résolution projective de  $M$  est un complexe de chaînes  $P$  concentré en degrés positifs, dont tous les modules sont projectifs, et muni d'une application  $P_0 \rightarrow M$  tel que la suite  $P_*(M) := \cdots \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  est exacte.

*Remarque 1.4.2.* On peut aussi définir une résolution projective comme étant un quasi isomorphisme  $P_* \rightarrow M$ , où  $P_*$  est un complexe de modules tel que  $P_i$  est projectif pour tout  $i$ , et où  $M$  est identifié à son complexe concentré en degré 0.

**Proposition 1.4.3.** Tout  $R$ -module admet une résolution projective.

**Définition 1.4.4.**

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) := H_n(P_*(M) \otimes_R N)$$

**Définition 1.4.5.** Une résolution injective de  $N$  est un complexe de cochaînes  $I$  concentré en degrés positifs, dont tous les modules sont injectifs, et muni d'une application  $M \rightarrow I_0$  tel que la suite  $I^*(M) := 0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \rightarrow \cdots \rightarrow I^n$  est exacte.

**Définition 1.4.6.**

$$\mathrm{Ext}_R^n(M, N) := H^n(\mathrm{Hom}_R(M, I^*(N)))$$

*Remarque 1.4.7.* Attention, pour que les définitions 1.4.4 et 1.4.6 aient un sens il faut vérifier qu'elles ne dépendent pas du choix de  $P$  et de  $I$ .

**Lemme 1.4.8.** Soit  $P$  un complexe de chaînes dont tous les modules sont projectifs,  $\phi : P_0 \rightarrow M$  et  $f : M \rightarrow N$  des morphismes, et  $\psi : Q_* \rightarrow N$  une résolution de  $N$ . Il existe alors un morphisme de complexe  $\tilde{f} : P \rightarrow Q$ , unique à homotopie près, tel que  $f \circ \phi = \psi \circ \tilde{f}$ .

$$\begin{array}{ccc} P_* & \xrightarrow{\phi} & M \\ \tilde{f} \downarrow \cdots & & \downarrow f \\ Q_* & \xrightarrow{\psi} & N \end{array}$$

*Démonstration.* On construit  $\tilde{f}_n : P_n \rightarrow Q_n$  par récurrence sur  $n$ . On pose par convention  $\tilde{f}_{-1} = f : M \rightarrow N$ . On suppose que l'on a construit, pour tout  $i$  tel que  $-1 \leq i \leq n-1$  un morphisme  $\tilde{f}_i : P_i \rightarrow Q_i$  tel que  $d\tilde{f}_i = \tilde{f}_{i-1}d$ .

Par définition, le module  $P$  est projectif si et seulement si, pour tout morphisme  $f : P \rightarrow B$  et tout épimorphisme  $p : A \rightarrow B$ , il existe un morphisme  $\tilde{f}$  tel que  $f = p \circ \tilde{f}$

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \tilde{f} \swarrow & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

Or, par hypothèse,  $d\tilde{f}_{n-1} = \tilde{f}_{n-2}$ , ce qui implique que  $\tilde{f}_{n-1}(Z_{n-1}(P)) \subseteq Z_{n-1}(Q) := \text{Ker}(d : Q_{n-1} \rightarrow Q_{n-2})$ . On a donc un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} P_n & \longrightarrow & Z_{n-1}(P) & \hookrightarrow & P_{n-1} \\ & & \downarrow \tilde{f}_{n-1}|_{Z_{n-1}(P)} & & \downarrow \tilde{f}_{n-1} \\ Q_n & \longrightarrow & Z_{n-1}(Q) & \hookrightarrow & Q_{n-1} \end{array}$$

De plus,  $d : Q_n \rightarrow Z_{n-1}(Q)$  est surjective, car  $\psi : Q_* \rightarrow N$  est une résolution. Donc, puisque  $P_n$  est projectif, il existe une application  $\tilde{f}_n : P_n \rightarrow Q_n$  qui fait commuter le diagramme précédent.

Étant donné deux relèvements, on construit une homotopie entre eux par récurrence de la même manière.  $\square$

*Exercice 1.4.9.* On peut en réalité reformuler le lemme précédent de la façon suivante : Soient  $P_*$  un complexe dont les modules sont tous projectifs, et  $f : Q_* \rightarrow N_*$  un quasi-isomorphisme surjectif en tout degré. Alors on a la propriété de relèvement :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & Q_* \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ P_* & \longrightarrow & N_* \end{array}$$

On a aussi un résultat dual avec les complexes de modules injectifs et les quasi-isomorphismes injectifs en tout degré.

Ce lemme garantit que  $\text{Tor}_n^R(M, N)$  et  $\text{Ext}_R^n(M, N)$  sont bien définis. En effet, si  $\phi : P_* \rightarrow M$  et  $\psi : Q_* \rightarrow M$  sont deux résolutions projectives de  $M$ , il existe d'après le lemme deux applications  $\tilde{\psi} : P_* \rightarrow P'_*$  et  $\tilde{\phi} : P'_* \rightarrow P_*$  telles que  $\psi \circ \tilde{\psi} = \phi$  et  $\phi \circ \tilde{\phi} = \psi$ . Or,  $\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}$  vérifie  $\phi \circ (\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}) = \psi \circ \tilde{\psi} = \phi$ . C'est donc un relèvement à homotopie près du carré :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & P_* \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \phi \\ P_* & \longrightarrow & M \end{array}$$

Puisque  $id_P$  est un autre relèvement de ce carré, et puisque, d'après le lemme, ce relèvement est unique, on en déduit que  $\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi} \simeq id_P$ . De même on montre que  $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi} \simeq id_Q$ . Il y a ainsi équivalence d'homotopie entre  $P_*$  et  $Q_*$ . Ainsi les groupes homologie de deux résolutions projectives d'un même module sont toujours isomorphes (à homotopie près). Il suit que les applications  $\tilde{\phi} \otimes_R N$  et  $\tilde{\psi} \otimes_R N$  sont également homotopes ce qui démontre que les groupes  $\text{Tor}_n^R(M, N)$  sont bien définis. Les arguments pour les foncteurs  $\text{Ext}$  et résolutions injectives sont duaux.

De manière plus générale, les arguments donnés au-dessus donnent directement que si  $P_*$  est un complexe gradué positivement de modules  $R$ -projectifs, alors le foncteur  $P_* \otimes_R -$  est exact. En particulier, une suite exacte courte  $L \hookrightarrow M \twoheadrightarrow N$  de  $R$ -modules induit une suite exacte courte de complexes  $P_* \otimes_R L \hookrightarrow P_* \otimes_R M \twoheadrightarrow$

$P_* \otimes_R N$  et, si  $P_*$  est une résolution projective de  $Q$ , par le lemme 1.3.5 une suite exacte longue

$$Q \otimes_R L \rightarrow Q \otimes_R M \rightarrow Q \otimes_R N \rightarrow \text{Tor}_1^R(Q, L) \rightarrow \text{Tor}_1^R(Q, M) \rightarrow \text{Tor}_1^R(Q, N) \rightarrow \text{Tor}_2^R(Q, L) \rightarrow \dots$$

Les constructions précédentes suggèrent qu'on a envie d'identifier des résolutions d'un même objet, et, plus généralement, des complexes quasi-isomorphes.

**Définition 1.4.10.** On définit deux catégories  $\mathcal{K}(R)$  et  $\mathcal{D}(R)$  dont les objets sont les complexes de chaînes de  $R$ -modules, et telles que pour tous complexes  $M$  et  $N$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{K}(R)}(M, N) = \text{Hom}_R(M, N)/\simeq$ , (où  $\simeq$  est la relation d'homotopie entre morphismes,) et avec  $\text{Hom}_{\mathcal{D}(R)}$  est obtenue en ajoutant formellement à  $\text{Hom}_R$  un inverse à chaque quasi-isomorphisme.

*Remarque 1.4.11.* On peut définir des “objets globaux” :

$$M \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_R N \text{ et } \mathbb{R}\text{Hom}_R(M, N),$$

qui sont des foncteurs définis sur les catégories dérivées ci-dessus, dont les groupes de (co)-homologie sont les  $\text{Tor}_i^R(M, N)$  et  $\text{Ext}_R^i(M, N)$ . Pour se faire on définit les deux foncteurs dérivés :

$$\cdot \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_R \cdot, \mathbb{R}\text{Hom}_R(\cdot, \cdot) : \mathcal{D}(R) \otimes \mathcal{D}(R) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{Z}).$$

Nous verrons que ces constructions classiques de l'algèbre homologique sont des cas particuliers des foncteurs dérivés des catégories de modèles.

La propriété suivante est souvent utile.

**Proposition 1.4.12.**

$$\text{Ext}_R^n(M, N) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}(R)}(M, N[n])$$

où  $N[n]$  est le complexe concentré en degré  $-n$

On pourra consulter [17, 14] pour des rappels/preuves plus détaillés d'algèbre homologique.

## 1.5. RETOUR AUX ESPACES TOPOLOGIQUES : FIBRATIONS

A-t-on une notion de “suite exacte longue associée à une suite exacte courte en homotopie” et de “résolution projective” ? La réponse est oui, et nous allons présenter ces objets, fondamentaux dans l'étude des espaces topologiques à homotopie près.

**Définition 1.5.1.** Une fibration de Hurewicz<sup>3</sup> est une application continue  $p : E \rightarrow B$  vérifiant la propriété de relèvement :

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \longrightarrow & E \\ \downarrow \simeq & \nearrow & \downarrow p \\ X \times I & \longrightarrow & B \end{array}$$

Cela signifie que, pour tout espace topologique  $X$ , pour tous morphismes,  $X \times \{0\} \rightarrow X \times I$  et  $X \times I \rightarrow B$  faisant commuter le cadre du diagramme précédent, (où

3. on dira souvent fibration sans autre adjectif

$X \times \{0\} \rightarrow X \times I$  est l'inclusion,) il existe un morphisme  $X \times I \rightarrow E$  faisant commuter le diagramme précédent.

**Définition 1.5.2.** Une fibration de Serre est une application continue  $p : E \rightarrow B$  vérifiant la condition de relèvement précédente pour  $X = I^n$ ,  $n \geq 0$ .

*Remarque 1.5.3.* Une fibration de Hurewicz est une fibration de Serre, mais la réciproque est fautive.

*Exemple 1.5.4.*

- a) Un revêtement est évidemment une fibration de Serre. L'unicité des relèvements des homotopies permet même de montrer que c'est en fait une fibration de Hurewicz (cf. [15]).
- b) Une projection  $F \times B \rightarrow B$ ,  $(f, b) \mapsto b$ , est une fibration de Hurewicz (et donc de Serre).
- c) Soit  $p : E \rightarrow B$  une fibration (de Hurewicz ou de Serre), et  $g : X \rightarrow B$ . L'application  $g^*(p) : X \times_B E \rightarrow X$  du pullback de  $p$  et  $g$  vers  $X$  est une fibration.

Pour rappel, le pullback de deux applications continues  $f : B \rightarrow A$  et  $g : C \rightarrow A$  est l'ensemble  $\{(b, c) \in B \times C : f(b) = g(c)\}$ . Il est souvent noté  $B \times_A C$  et est muni de deux applications de projection :  $f^* : B \times_A C \rightarrow B$  et  $g^* : B \times_A C \rightarrow C$ . Il vérifie la propriété universelle que toute paire d'applications  $i : Z \rightarrow B$ ,  $j : Z \rightarrow C$  telle que  $f \circ i = g \circ j$  il existe une unique application  $Z \rightarrow B \times_A C$  rendant commutatifs les diagrammes évidents.

**Proposition 1.5.5.**

- a) "Être une fibration de Serre" est une propriété locale, c'est-à-dire :  
 $p : E \rightarrow B$  est une fibration de Serre si et seulement si il existe un recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  de  $B$  par des ouverts tels que  $p|_{p^{-1}(U_i)}$  est une fibration de Serre pour tout  $i \in I$ .
- b)  $p : E \rightarrow B$  est une fibration de Hurewicz si et seulement si il existe un recouvrement *dénombrable*  $(U_i)_{i \in I}$  de  $B$  par des ouverts tels que  $p|_{p^{-1}(U_i)}$  est une fibration de Hurewicz pour tout  $i \in I$ .

*Démonstration.* Pour la première propriété, voir la feuille de TD 1. Pour la deuxième, voir [15, Chapitre II, Section 7]. □

*Exemple 1.5.6 (Espaces fibrés).* La proposition précédente permet d'obtenir les exemples *importants* suivants.

- d) Un espace fibré<sup>4</sup> (appelé aussi fibré localement trivial), est une fibration de Serre.
- e) Un espace fibré  $p : E \rightarrow B$  au dessus d'une base  $B$  paracompacte et Hausdorff (=séparé) est une fibration de Hurewicz.

4. c'est à dire une application continue  $p : E \rightarrow B$  telle qu'il existe un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $B$  tel que la restriction de  $p|_{p^{-1}(U_i)}$  à  $U_i$  est homéomorphe à la projection canonique, c'est à dire qu'il existe un diagramme commutatif :  $p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times F_i$ .

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\cong} & U_i \times F_i \\ p \downarrow & \swarrow \text{proj}_0 & \\ U_i & & \end{array}$$

La dernière propriété provient du fait qu'un espace paracompact séparé vérifie précisément l'hypothèse que de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement dénombrable. On rappelle qu'elle est évidemment satisfaite si  $B$  est une variété topologique.

*Exemple 1.5.7* (Espace des chemins). L'exemple suivant est *fondamental* et en un sens universel.

f) Soit  $f : X \rightarrow Y$ . On définit  $\mathcal{P}_f = Y^{[0,1]} \times_Y X = \{(\gamma, x) \in Y^{[0,1]} \times X : \gamma(0) = f(x)\}$ . On appelle  $\mathcal{P}_f$  l'espace des chemins au dessus de  $f$ . L'application :

$$\begin{aligned} ev_1 : \mathcal{P}_f &\rightarrow Y \\ (\gamma, x) &\mapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

est une fibration de Hurewicz. En effet, supposons que l'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{z \mapsto (\gamma_z, x_z)} & \mathcal{P}_f \\ \downarrow & & \downarrow ev_1 \\ Z \times I & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Alors, pour tout  $z \in Z$ ,  $\gamma_z(1) = \varphi(z, 0)$ . On pose alors  $\tilde{\varphi}(z, t) = (\gamma_z * \varphi|_{\{z\} \times [0,t]}, x_z)$ , où  $*$  désigne la concaténation des chemins.

*Remarque 1.5.8.* On a factorisé  $f : X \rightarrow Y$  :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{P}_f & \xrightarrow{ev_1} & Y \\ x & \mapsto & (c_{f(x)}, x) & \mapsto & f(x) \end{array}$$
 en une équivalence d'homotopie et une fibration (de Hurewicz). La première flèche est bien une homotopie car on peut contracter tout chemin sur son point base par l'homotopie évidente  $H(f, t)(u) = f((1-t)u)$ .

**Lemme 1.5.9** (Propriété de relèvement des fibrations par rapport aux rétracts forts de paires cellulaires). Si  $p : E \rightarrow B$  est une fibration de Serre, alors pour tout rétract par déformation forte  $i : L \hookrightarrow K$  où  $L$  est un sous-CW-complexe de  $K$  il existe un relèvement du diagramme :

(1) 
$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & E \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow p \\ K & \longrightarrow & B \end{array}$$

*Remarque 1.5.10.* On a un homéomorphisme de paires

$$(I^{n+1}, I^n \times \{0\}) \cong (I^{n+1}, \overline{\partial I^{n+1}} \setminus I^n \times \{0\})$$

Voir figure 2

*Preuve du Lemme.* Soit  $r : K \rightarrow L$  une rétraction de  $i$ , et  $H : K \times I \rightarrow K$  une homotopie relativement à  $L$  entre  $id_K$  et  $i \circ r$ . On a une factorisation du diagramme

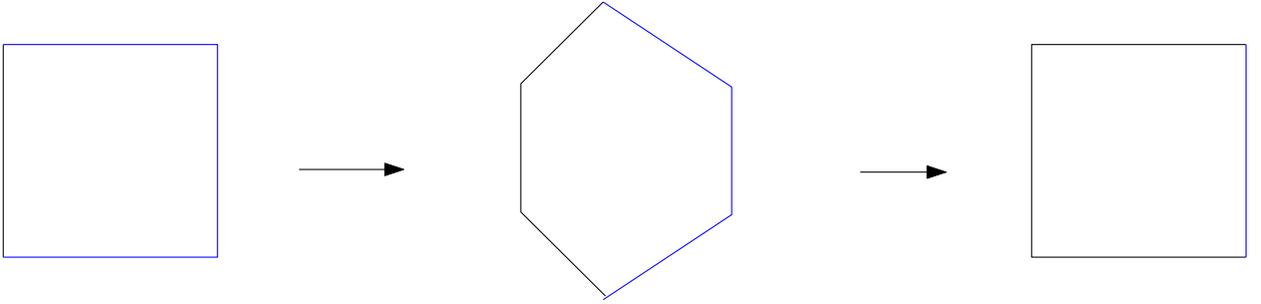


FIGURE 2. Un homéomorphisme entre paires (quitte à composer par la symétrie évidente à droite)

1 :

$$\begin{array}{ccccc}
 L & \longrightarrow & L \times [0, 1] \cup K \times \{1\} & \xrightarrow{\text{ProjUr}} & L & \longrightarrow & E \\
 \downarrow i & & \downarrow & \nearrow f & \downarrow & & \downarrow \\
 K & \longrightarrow & K \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & K & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

Il suffit de montrer qu'il existe un  $f$  qui fasse commuter ce diagramme. L'existence de  $f$  vient du fait que  $L$  est un sous-complexe cellulaire de  $K$ . On peut construire  $f$  par récurrence sur la filtration du CW-complexe  $K \times [0, 1] \setminus (L \times [0, 1] \cup K \times \{1\})$ , c'est-à-dire qu'il suffit de construire un  $f$  faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 I^{n-1} \times [0, 1] \cup I^n \times \{1\} & \longrightarrow & E \\
 \downarrow & \nearrow f & \downarrow p \\
 I^{n+1} & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

Qui est homéomorphe à :

$$\begin{array}{ccc}
 I^n \times \{0\} & \longrightarrow & E \\
 \downarrow & \nearrow f & \downarrow p \\
 I^{n+1} & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

Or,  $p$  étant une fibration de Serre, ce diagramme admet bien un relèvement.  $\square$

*Notation 1.5.11.* Si  $p : E \rightarrow B$  est une fibration (de Hurewicz), on notera souvent  $F$  ou  $E_b$  la fibre de  $b \in B$  le long de l'application  $p$ , c'est-à-dire le sous-ensemble  $p^{-1}(\{b\}) \subseteq E$ .

**Lemme 1.5.12.** Si  $p : E \rightarrow B$  est une fibration (de Hurewicz), et si  $B$  est connexe par arcs, alors pour tous  $b, b' \in B$ ,  $E_b \simeq E_{b'}$ .

Autrement dit, à homotopie près, les fibres d'une fibration de Hurewicz sont les mêmes partout.

*Démonstration.* Voir [15] chapitre 2 section 8 corollaire 13.

On peut relier  $b$  à  $b'$  par un chemin  $\gamma : I \rightarrow B$ . Puisque  $p$  est une fibration, on a un relèvement  $\tilde{\gamma}$  du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E_b & \xrightarrow{\quad} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\gamma} & \downarrow p \\ E_b \times I & \xrightarrow{\gamma \circ \text{proj}_1} & B \end{array}$$

où la flèche du haut est l'inclusion. Puisque  $p(\tilde{\gamma}(e, 1)) = \gamma(1) = b'$  pour tout  $e \in E_b$ , on en déduit que l'image de l'application  $\tilde{\gamma}(\cdot, 1)$  est contenue dans  $E_{b'}$ . On note  $\tilde{\gamma}_1 : E_b \rightarrow E_{b'}$  l'application continue ainsi obtenue.

Montrons, qu'à homotopie près, l'application  $\tilde{\gamma}_1$  ainsi obtenue ne dépend de la classe d'homotopie de  $\gamma$  (dans les chemins à extrémités fixées). Soit  $H : I \times I \rightarrow B$  une homotopie entre  $\gamma$  et  $\beta$ , deux chemins entre  $b$  et  $b'$  (avec  $H(0, -) = b$  et  $H(1, -) = b'$ ). Puisque  $p$  est une fibration, on trouve un relèvement  $\tilde{H}$  du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E_b \times (I \times \{0, 1\} \cup \{0\} \times I) & \xrightarrow{\quad} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ E_b \times I^2 & \xrightarrow{H \circ (\text{proj}_1 \times \text{proj}_3)} & B \end{array}$$

où la flèche du haut est donnée par  $\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}$  et la projection  $E_b \times I \rightarrow E_b$  suivie de l'inclusion. (qui a servi pour construire  $\tilde{\gamma}$  et  $\tilde{\beta}$ ). Pour tout  $t$ , on a donc que  $\tilde{H}(1, t) \in E_{b'}$  et  $\tilde{H}(1, -)$  est une homotopie entre  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\beta}_1$ .

Soit alors maintenant une application  $E_{b'} \rightarrow E_b$  obtenue en partant de  $\gamma^{-1}$ . Puisque  $\gamma * \gamma^{-1} \simeq c_b$  (où  $c_b$  est le chemin constant en  $b$ ), le résultat précédent implique qu'il existe une homotopie entre  $\gamma * \tilde{\gamma}_1^{-1}$  et n'importe quel relevé de  $c_b$ . On peut évidemment choisir un tel relevé constant égal à l'identité de  $E_b$ . Il suit que  $(\gamma * \tilde{\gamma}_1^{-1})_1$  est homotope à l'identité. Par ailleurs, par construction,  $(\gamma * \gamma^{-1})_1$  est homotope à la composition  $\tilde{\gamma}_1 \circ \gamma^{-1}_1$ . On démontre de même l'équivalence d'homotopie dans l'autre sens.

□

*Exemple 1.5.13.* Soit  $X$  connexe par arcs,  $x_0 \in X$  et  $P_*X := \mathcal{P}_{\{x_0\} \hookrightarrow X} = \{x_0\} \times_X X^{[0,1]}$  l'espace des chemins de  $X$  qui partent de  $x_0$ . Pour tout  $x \in X$ , et tout choix de chemin  $\gamma_{x_0, x}$  reliant  $x_0$  à  $x$ , la fibre  $P_*X_x = ev_1^{-1}(\{x\})$  de la fibration standard  $ev_1 : P_*X \rightarrow X$  est homéomorphe à l'espace  $\Omega_x(X) := \{f : S^1 \xrightarrow{C^0} X, /f(1) = x\}$  des lacets en  $x$ . L'homéomorphisme est obtenu en recollant le chemin ainsi obtenu, parcouru dans le sens contraire avec  $\gamma_{x, x_0}$ . Le lemme 1.5.12 nous donne alors que les espaces de chemins  $\Omega_x$  sont tous homotopes entre eux. Ceci entraîne (et même renforce) le fait que les groupes d'homotopie de  $X$  ne dépendent, à isomorphisme près, pas du choix du point base.

Le résultat suivant est fondamental et en un sens énonce qu'une fibration est un analogue pour les espaces topologiques d'une suite exacte courte de complexes de chaînes.

**Théorème 1.5.14.** Soit  $p : E \rightarrow B$  est une fibration de Serre, avec  $B$  connexe par arcs,  $b_0$  un point de  $B$ ,  $F := p^{-1}(b_0)$  la fibre de  $b_0$ , et  $f_0 \in F$ . On a alors une suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \cdots$$

*Remarque 1.5.15.* Les  $\pi_0$  ne sont pas des groupes. On peut néanmoins définir les noyaux de  $\pi_0(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, f_0)$  et de  $\pi_0(E, f_0) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b_0)$  comme étant les égalisateurs de  $i_*$  et  $p_*$  avec les applications constantes.

**Lemme 1.5.16.** Si  $p : E \rightarrow B$  est une fibration de Serre avec  $B$  connexe par arcs, alors les fibres de  $p$  sont faiblement homotopiquement équivalentes.

*Démonstration.* Rappelons que  $\mathcal{P}_p$  dénote l'espace des chemins de  $p$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}_p = E \times B^I = \{(e, \gamma : I \rightarrow B) : \gamma(0) = p(e)\}$$

On factorise l'application  $p$  comme dans l'exemple 1.5.7 :

$$f : E \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}_p \xrightarrow{\text{fibration}} B$$

Pour tout  $b \in B$ , on obtient donc un morphisme :

$$E_b \rightarrow (\mathcal{P}_p)_b$$

Puisque  $\mathcal{P}_p \rightarrow B$  est une fibration, on en déduit, d'après le lemme précédent, que, si  $b' \in B$ ,  $(\mathcal{P}_p)_b \simeq (\mathcal{P}_p)_{b'}$ . Il ne reste alors plus qu'à prouver que  $f$  est une équivalence faible d'homotopie. En effet, on aura alors le zigzag :

$$E_b \xrightarrow{\cong} (\mathcal{P}_p)_b \simeq (\mathcal{P}_p)_{b'} \xleftarrow{\cong} E_{b'}$$

On dispose du diagramme de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_n(B, b) & \longrightarrow & \pi_n(E_b, *) & \longrightarrow & \pi_n(E, *) \longrightarrow \cdots \\ & & \simeq \downarrow & & \downarrow & & \simeq \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_n(B, b) & \longrightarrow & \pi_n((\mathcal{P}_p)_b, *) & \longrightarrow & \pi_n(\mathcal{P}_p, *) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

On déduit du Lemme des cinq (1.3.5.b) que le morphisme  $\pi_n(E_b, *) \rightarrow \pi_n((\mathcal{P}_p)_b, *)$  est un isomorphisme.  $\square$

*Exemple 1.5.17.* On prendra garde, qu'une submersion surjective entre variétés n'est pas forcément une fibration de Serre (ni donc d'Hurewicz). Par exemple, considérons l'application  $p : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par la projection  $(x, y) \mapsto x$ . Les fibres en tout point  $x \neq 0$  sont données par une droite alors que la fibre en 0 n'est pas connexe par arcs. Par conséquent, les fibres n'ont pas les mêmes groupes d'homotopie et donc  $p$  n'est pas une fibration de Serre en vertu du lemme 1.5.16.

## 1.6. GROUPES D'HOMOTOPIE RELATIFS ET SUITES EXACTES LONGUES EN HOMOTOPIE

**Définition 1.6.1** (groupes d'homotopie relatifs). Soit  $(X, A)$  une paire d'espaces topologiques, et  $a_0 \in A$  un point base. Pour  $n \geq 1$ , on définit  $\pi_n(X, A, a_0)$ , l'ensemble des classes d'homotopie d'applications  $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, A)$  qui envoient  $I^{n-1} \times \{0, 1\} \cup I^{n-2} \times \{1\} \times [0, 1] = \partial I^n \setminus (\{0\} \times I^{n-1})$  (le " $n$ -cortet"), sur le singleton  $\{a_0\}$ . Les homotopies doivent également respecter les conditions précédentes sur le bord

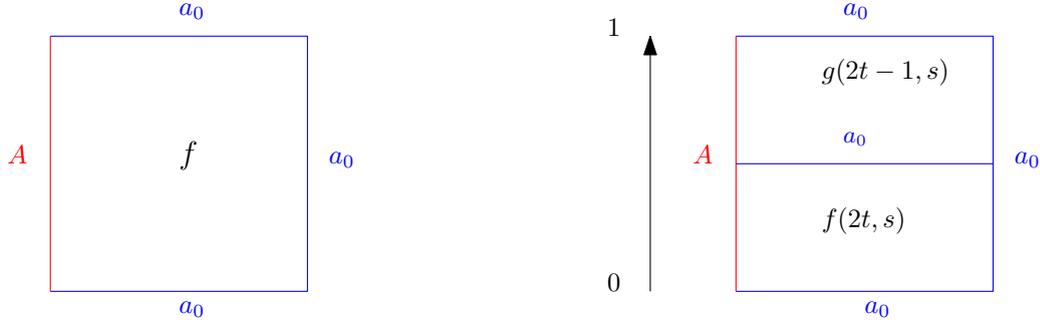


FIGURE 3. La représentation graphique d'une application dans  $\pi_1(X, A, a_0)$  à gauche, et la représentation graphique du produit  $f * g$  à droite.

(autrement dit leur restriction au bord  $\partial I^n$  doit rester à image dans  $A$  et celle à l'adhérence de  $\partial I^n \setminus (\{0\} \times I^{n-1})$  doit être constante, égale à  $a_0$ ).

*Remarque 1.6.2.*  $\pi_0(X, A, a_0)$  n'a pas, en général, de structure de monoïde.

Pour  $n = 0$ , on peut définir<sup>5</sup>  $\pi_0(X, A)$  comme l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $X$  qui ne rencontrent pas  $A$ .

**Proposition 1.6.3.** Pour  $n \geq 2$ , on munit  $\pi_n(X, A, a_0)$  d'une structure de groupe, qui est abélienne si  $n \geq 3$ .

On va définir le produit (cf. figure 3). Posons :

$$\begin{aligned} \alpha : I^{n-1} \times \{1\} &\rightarrow I^{n-1} \times \{0\} \\ (t_1, \dots, t_n, 1) &\mapsto (t_1, \dots, t_n, 0) \end{aligned}$$

remarquons que  $I^n \cong I^n \coprod_{\alpha} I^n$ , que cet homéomorphisme envoie  $\partial I^n$  sur  $[(\partial I^n \coprod \partial I^n) \setminus (I^{n-1} \times \{1\} \coprod I^{n-1} \times \{0\})]$ , et qu'on peut le choisir de manière à ce que  $\{0\} \times I^{n-1}$  soit envoyé sur  $[\{0\} \times I^{n-1} \coprod \{0\} \times I^{n-1}]$ .

Si  $[f], [g] \in \pi_n(X, A, a_0)$ , alors pour tout  $t \in I^{n-1}$ ,  $f(t, 1) = a_0 = g(t, 0)$ . On peut donc définir une application continue  $f \coprod_{\alpha} g : I^n \rightarrow X$  par recollement. Elle vérifie :

$$f \coprod_{\alpha} g(\partial I^n) = f(\partial I^n \coprod \partial I^n \setminus I^{n-1} \times \{1\}) \cup g(I^{n-1} \times \{0\}) \subseteq A$$

et :

$$\begin{aligned} f \coprod_{\alpha} g(\partial I^n \setminus (\{0\} \times I^{n-1})) &= f(\partial I^n \setminus (I^{n-1} \times \{1\} \cup \{0\} \times I^{n-1})) \cup g(\partial I^n \setminus (I^{n-1} \times \{0\} \cup \{0\} \times I^{n-1})) \\ &\subseteq f(\partial I^n \setminus \cup \{0\} \times I^{n-1}) \cup g(\partial I^n \setminus \{0\} \times I^{n-1}) \subseteq \{a_0\} \end{aligned}$$

On vérifie que l'application :

$$\begin{aligned} * : \pi_n(X, A, a_0) \times \pi_n(X, A, a_0) &\rightarrow \pi_n(X, A, a_0) \\ ([f], [g]) &\mapsto [f \coprod_{\alpha} g] \end{aligned}$$

5. on prendra garde qu'il n'y a pas de définition universellement acceptée et que certains préfèrent ne pas considérer le cas  $n = 0$  tout simplement.

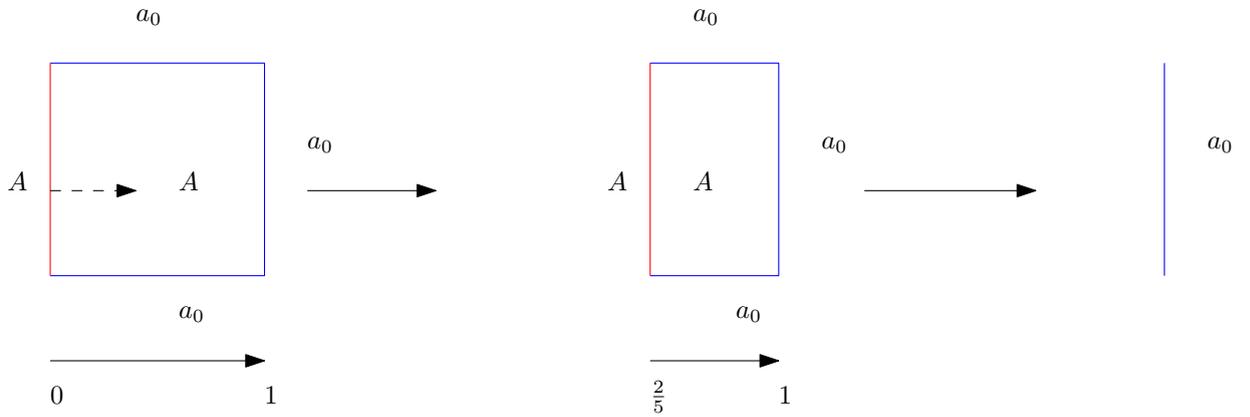


FIGURE 4. L'homotopie dans  $\pi_n(X, A, a_0)$  déformant une application à valeur dans  $A$  sur l'application constante.

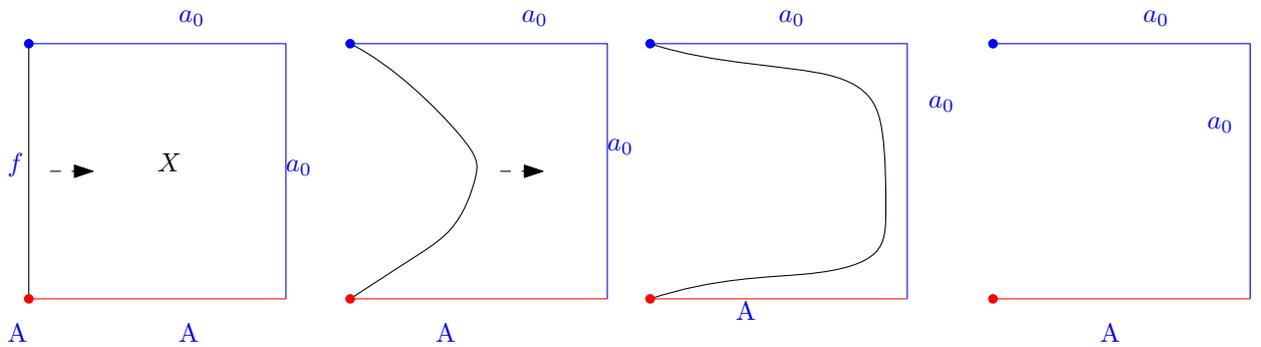


FIGURE 5. La représentation graphique (à gauche) d'une homotopie entre  $f$  représentant la classe nulle dans  $\pi_0(X, A, a_0)$  et le chemin constant  $a_0$ , et, sa déformation, via une homotopie relativement au bord  $\partial I$  (les points bleus et rouges), vers un application à valeur dans  $A$ .

est bien un produit associatif muni d'un élément neutre (l'application constante au point base), commutatif si  $n \geq 3$ , de la même manière que pour les groupes d'homotopie absolus.

Le lemme suivant est fort utile pour comprendre les applications dont la classe est nulle dans  $\pi_n(X, A, a_0)$ .

**Lemme 1.6.4.** Soit  $[f] \in \pi_n(X, A, a_0)$ . Alors :

$$[f] = 0 \iff f \text{ est homotope relativement à } \partial I^n \text{ à une application à valeur dans } A$$

*Démonstration.* Montrons le sens  $\Leftarrow$  de l'équivalence. Supposons qu'il existe  $g : I^n \rightarrow A$  telle que  $f \simeq_A g$ . Alors la classe de  $f$  dans  $\pi_n(X, A, a_0)$  est la même que celle de  $g$ , qui est à valeur dans  $A$ , et on a que nécessairement  $g \partial I^n \setminus \{0\} \times I^{n-1}$  est l'application constante  $a_0$ . Mais une telle application est homotope à l'application constante qui vaut  $a_0$  (c'est à dire l'élément neutre de  $\pi_n(X, A, a_0)$ ). En effet on peut la déformer simplement sur  $a_0$  en rétractant  $I^n$  sur  $\{1\} \times I^{n-1}$ , voir figure 3.

Montrons maintenant le sens  $\Rightarrow$  de l'équivalence. Soit  $H : I^{n+1} \rightarrow X$  une homotopie relative entre  $f$  et l'application constante en  $a_0$ . L'adhérence  $\overline{\partial I^{n+1} \setminus (\{0\} \times I^n)}$  est un rétract par déformation (forte) de  $I^{n+1}$ , il existe donc une homotopie  $R$  entre  $I^{n+1}$  et  $\partial I^{n+1} \setminus (\{0\} \times I^n)$  relativement à ce dernier. Ainsi,  $H \circ R|_{\{0\} \times I^n}$  est une homotopie entre  $f$  et  $H|_{\overline{\partial I^n \setminus \{0\} \times I^n}}$  relativement à  $\partial I^n$ . Or  $H|_{\overline{\partial I^n \setminus \{0\} \times I^n}}$  est à valeur dans  $A$ .  $\square$

Les groupes d'homotopie relatives sont reliés entre eux par une longue suite exacte, analogue à celle de l'homologie d'une paire.

**Théorème 1.6.5.** Soit  $(X, A)$  une paire d'espace topologique,  $a_0 \in A$  un point base. On a une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow \pi_n(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, a_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, a_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(X, A).$$

En pratique, on sera intéressé par le cas où toutes les composantes connexes par arcs de  $X$  rencontrent  $A$ . Dans ce cas le dernier terme est nul.

*Démonstration.* La dernière flèche est simplement induit par la décomposition de  $\pi_0(X)$  entre les composantes connexes qui rencontrent  $A$  (et la flèche  $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(X)$  est une surjection sur ce sous-ensemble) et les autres (qui sont en bijection avec  $\pi_0(X, A)$  par définition). On regarde maintenant le reste de la suite. Le morphisme  $\partial : \pi_n(X, A, a_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, a_0)$  est défini par :

$$\partial([f]) = [f|_{\{0\} \times I^{n-1}}].$$

Par définition, l'application  $f$  restreinte à  $\{0\} \times I^{n-1}$  est à valeur dans  $A$  et son bord<sup>6</sup> et dans  $a_0$ ; ainsi  $\partial([f])$  est bien un élément de  $\pi_{n-1}(A, a_0)$  (qui ne dépend que de la classe d'homotopie de  $f$  par construction). Que cette flèche soit un morphisme de groupes est immédiat par définition du produit, voir la figure 4

Montrons que la suite est exacte : si  $[f] \in \pi_n(X, a_0)$ , alors  $f|_{\{0\} \times I^{n-1}}$  est l'application constante. Donc  $Im(p_*) \subseteq Ker(\partial)$ . Réciproquement, si  $\partial([f]) = 0$ , cela signifie qu'il existe une homotopie  $H : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, A)$  entre  $f|_{\{0\} \times I^{n-1}}$  et le chemin constant en  $a_0$ . Supposons par exemple que  $H|_{\{0\} \times I^{n-1}}$  est le chemin constant et que  $H|_{\{1\} \times I^{n-1}} = f|_{\{0\} \times I^{n-1}}$ . En posant :

$$\begin{aligned} \alpha : \quad \{0\} \times I^{n-1} &\rightarrow \{1\} \times I^{n-1} \\ (0, t_1, \dots, t_n) &\mapsto (1, t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

On peut recoller  $H$  et  $f$  de la façon suivante :

$$I^n \cong I^n \coprod_{\alpha} I^n \xrightarrow{H \amalg_{\alpha} f} X$$

De plus,  $\{1\} \times I^{n-1}$  est un rétract par déformation (forte) de  $I^n$ , donc il existe une homotopie  $r$  de  $I^n$  vers  $\{1\} \times I^{n-1}$  relativement à ce dernier.  $H \circ r \coprod_{\alpha} f$  est une homotopie entre  $f$  et  $H \coprod_{\alpha} f$  relative à  $\partial I^n$ , et  $H \coprod_{\alpha} f$  envoie  $\partial I^n$  sur  $a_0$ . Donc  $[f] = p_*([H \coprod_{\alpha} f])$ .

Par le lemme 1.6.4, on obtient que la composée  $p_* \circ i_*$  est nulle (puisque elle envoie un représentant d'une classe de  $\pi_n(A, a_0)$  sur une application à valeur dans  $A$ , qui a  $a_0$  sur le bord). Par ailleurs, par le même lemme, si  $p_*([f]) = 0$ , alors  $f$  est homotope relativement au bord à une application  $g$  à valeur dans  $A$ . Comme sur son

6. on fait attention que cela définit encore pour  $n = 1$  un élément de  $\pi_0(A)$

bord,  $f$  est constante et égale à  $a_0$ , il suit que  $g$  définit bien un élément de  $\pi_n(A, a_0)$  et  $i_*[g] = [f]$ .

Enfin, on a  $i_* \circ \partial([f])$  est la classe, relativement au bord, dans  $\pi_{n-1}(X, a_0)$  de  $f|_{\{0\} \times I^{n-1}}$ . Or  $f : I^n \rightarrow X$  définit précisément une homotopie entre  $f|_{\{0\} \times I^{n-1}}$  et son bord opposé  $a_0$ . Ainsi cette composée est nulle. Réciproquement, si  $i_*([g]) = 0$ , cela veut dire que  $g$  est homotope dans  $X$  à une application  $I^{n-1} \times I \rightarrow X$  qui, sur la composante  $\partial I^{n-1} \times I$  du bord est  $a_0$  et vaut  $g$  sur  $I^{n-1} \times \{0\}$  et  $a_0$  sur  $I^{n-1} \times \{1\}$ . Cela définit précisément un élément de  $\pi_n(X, A, a_0)$  dont l'image par  $\partial$  est  $[g]$ .  $\square$

On peut maintenant démontrer le théorème de la longue suite exacte associée à une fibration de Serre.

*Preuve du Théorème 1.5.14*. Il faut commencer par définir  $\partial : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, f_0)$ . Prenons  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$  une application représentant une classe dans  $\pi_n(B, b_0)$ . Montrons qu'on peut relever  $f$  en une application de  $I^n$  dans  $E$ . Comme  $p : E \rightarrow B$  est une fibration de Serre, d'après le lemme 1.5.9, le diagramme suivant admet un relèvement  $\tilde{f}$  :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\partial I^n \setminus \{0\}} \times \partial I^{n-1} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ I^n & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

où la flèche du haut est l'application constante sur le point base  $f_0$ . Par commutativité du diagramme la restriction de  $\tilde{f}$  au bord  $\mathbb{S}^{n-1} \cong \partial I^n$  est dans  $F$  et envoie  $\overline{\partial\{0\}} \times \overline{I^{n-1}}$  sur le point base  $f_0$ . On définit alors

$$\partial([f]) = [\tilde{f}|_{\overline{\{0\}} \times \overline{I^{n-1}}}]$$

On vérifie que l'application ne dépend pas du choix du représentant de la classe  $\alpha = [f]$ . C'est la même preuve que celle vérifiant que le relèvement d'un chemin est indépendant des choix dans le lemme 1.5.12 (ou ici on ne travaille que sur des cubes et rétractes de cubes à gauche). Que l'application  $p : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, f_0)$  soit un morphisme de groupes, découle des définitions des produits : On a  $[f] * [g] = [f * g]$  où pour tout  $(t, s) \in I^{n-1} \times [0, 1]$ , on a  $f * g(s, t) = f(s, 2t)$  si  $t \in [0, 1/2]$  et vaut  $g(s, 2t - 1)$  sinon. On obtient alors immédiatement que  $\partial([f * g])$  est donné par la même formule (avec  $s \in \{0\} \times I^{n-2}$ ) désormais et donc  $\partial([f * g]) = \partial([f]) * \partial([g])$ .

La fibration (de Serre)  $p : E \rightarrow B$  envoie  $F$  sur  $b_0$  par définition. Il suit qu'elle envoie une classe  $[f] \in \pi_n(E, F, f_0)$  sur une classe dans  $\pi_n(B, b_0)$ ; on note  $\tilde{p}_* : \pi_n(E, F, f_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  l'application ainsi obtenue, qui est pour les raisons précédentes un morphisme de groupes. la construction de  $\partial$  montre que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_n(F, f_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(E, f_0) & \longrightarrow & \pi_n(E, F, f_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(F, f_0) & \xrightarrow{i_*} & \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & \tilde{p}_* \downarrow & & \parallel & & \\ \dots & \longrightarrow & \pi_n(F, f_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(E, f_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(B, b_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(F, f_0) & \xrightarrow{i_*} & \dots \end{array}$$

Pour terminer la preuve, en vertu du Théorème 1.6.5, il suffit de montrer que  $\tilde{p}_*$  est une bijection.

On a en fait déjà montré la surjectivité : en effet le relèvement  $\tilde{f} : I^n \rightarrow E$  de  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$  que nous avons construit est précisément une application qui envoie  $\{0\} \times I^{n-1}$  dans  $F$  et son complémentaire dans  $\partial I^n$  sur le point base. Ainsi il définit une classe  $[\tilde{f}] \in \pi_n(E, F, f_0)$  telle  $\tilde{p}_*([\tilde{f}]) = [p \circ \tilde{f}] = [f]$  dans  $\pi_n(B, b_0)$ .

Pour l'injectivité : supposons avoir deux applications  $f, g : I^n \rightarrow E$  qui envoient le bord dans  $F$  et  $\partial I^n \setminus \{0\} \times I^{n-1}$  sur  $f_0$  et qui, en outre, vérifient que  $\tilde{p}_*([f]) = \tilde{p}_*([g])$ ; c'est à dire  $p \circ f \underset{\partial I^n}{\simeq} p \circ g$ . Comme  $p : E \rightarrow B$  est une fibration de Serre (et que la flèche de gauche est un rétract par déformation fort d'une paire CW) on a un relèvement dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} I^n \times \{0, 1\} \cup I^{n-1} \times \{1\} \times I & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ I^n \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

où  $H$  est l'homotopie entre  $p \circ f$  et  $p \circ g$ , et la flèche du haut est donnée par  $f \amalg g : I^n \times \{0, 1\} \rightarrow E$  et l'application constante sur  $f_0$  sur  $\{1\} \times I^n$ . Comme  $H(-, 0) = b_0$ , on a que  $\tilde{H}(-, 0)$  est à valeur dans  $F$ . Il suit que  $H$  définit bien une homotopie entre  $f$  et  $g$  identifiant leur classes dans  $\pi_n(E, F, f_0)$ .  $\square$

*Exemple 1.6.6.* La fibration de Hopf est une application  $p : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbf{C}P^1 \cong \mathbb{S}^2$  dont la fibre en tout point de  $\mathbb{S}^2$  est un cercle  $\mathbb{S}^1$ . On obtient une suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow \pi_3(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_3(\mathbb{S}^3) \xrightarrow{p_*} \pi_3(\mathbb{S}^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^3) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^2) \dots$$

Rappelons que :

$$\pi_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = k \end{cases}$$

et qu'en particulier :

$$\pi_k(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Notre suite exacte longue devient alors :

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p_*} \pi_3(\mathbb{S}^2) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \dots$$

On en déduit que  $\pi_3(\mathbb{S}^3) \cong \mathbb{Z}$

*Remarque 1.6.7.* Les groupes d'homotopie des sphères ne sont pas tous connus !

*Exemple 1.6.8.*

$$\begin{aligned} \pi_{12}(\mathbb{S}^2) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \pi_{11}(\mathbb{S}^8) &= \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \end{aligned}$$

On a  $\pi_{k < n}(\mathbb{S}^n) = 0$  par une application aisée du lemme de Sard et  $\pi_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  par la théorie du degré (voir [3, 15] par exemple). Serre a démontré le théorème remarquable suivant.

*Théorème 1.6.9* (Serre  $\sim$  1953).

Si  $k > n$ , alors  $\pi_k(\mathbb{S}^n)$  est de torsion, sauf  $\pi_{4n-1}(\mathbb{S}^{2n}) = \mathbb{Z} \oplus \text{torsion}$ .

*Remarque 1.6.10. (Une mise en garde.)* Considérons la paire donnée par  $S^1 \cong \partial I^2 \subset I^2 \cong D^2$ . La longue suite exacte de groupes d'homotopie relatifs donne  $\pi_{\geq 3}(D^2, S^1, *) = 0$  et la suite exacte

$$0 \rightarrow \pi_1(D^2, S^1, *) \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \pi_0(D^2, S^1, *) \rightarrow \{*\}$$

d'où on déduit que  $\pi_n(D^2, S^1, *) = 0$  sauf pour  $n = 2$  où on trouve  $\mathbb{Z}$ . Remarquons que ces groupes d'homotopie<sup>7</sup> sont donc différents de ceux du quotient  $D^2/S^1 \cong S^2$  qui est pourtant un "bon" quotient au sens où  $D^2/S^1$  est homotope au cône  $Cone(S^1 \hookrightarrow D^2)$ . Ceci montre que la suite exacte n'a pas d'interprétations en termes de quotient homotopique de la forme  $X/A$  ou quotient homotopique  $Cone(A \hookrightarrow X)$  (voir la suite du cours pour les notions de quotients homotopiques) lorsque l'application quotient  $X \rightarrow X/A$  n'est pas une fibration. En fait cette longue suite exacte ne correspond pas à l'homotopie d'un espace de manière naturelle (contrairement donc à l'homologie relative  $H_*(A, B)$  qui correspond bien à celle du cône  $CA \hookrightarrow X$ ) Cette propriété montre en fait que les groupes d'homotopie ne satisfont pas de propriété du type "Mayer Vietoris".

### 1.7. COFIBRATIONS

Nous allons maintenant définir une notion duale de celle de fibration (de Hurewicz).

**Définition 1.7.1** (Cofibration). Une application  $i : A \rightarrow X$  est appelée une cofibration si pour tout espace topologique  $Y$ , tout diagramme commutatif du type suivant admet un relèvement  $\tilde{f}$  :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Y^I \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{f} & \downarrow ev_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

*Remarque 1.7.2.* De manière équivalente, puisque le foncteur "objet en chemin" est adjoint à droite au foncteur "objet cylindre",  $i : A \rightarrow X$  est une cofibration si le diagramme commutatif suivant admet un relèvement :

(2)

$$\begin{array}{ccc} A \times \{0\} & \hookrightarrow & A \times [0, 1] \\ \downarrow i & \nearrow f & \downarrow i \\ X \times \{0\} & \hookrightarrow & X \times [0, 1] \end{array}$$

$Y$

(with arrows from  $A \times [0, 1]$  and  $X \times [0, 1]$  to  $Y$ , and a dotted arrow from  $X \times [0, 1]$  to  $Y$ )

**Proposition 1.7.3.** a) Si  $i : A \rightarrow X$  est une cofibration, alors  $i$  est un homéomorphisme sur son image<sup>8</sup>.  
 b) Si  $X$  est séparé (Hausdorff), alors  $i(A)$  est un fermé de  $X$ .

<sup>7</sup>. contrairement aux groupes d'homologie d'une paire qui sont bien équivalents à ceux du cône  $Cone(A \hookrightarrow X)$

<sup>8</sup>. ce qui permet de se ramener au cas où  $A$  est un sous-espace en pratique

- c) Si  $A \subseteq X$ , alors l'inclusion  $A \hookrightarrow X$  est une cofibration si et seulement si  $X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]$  est un rétract de  $X \times [0, 1]$ .

*Démonstration.* Les deux premiers points sont dans la feuille de TD 1. Le dernier est essentiellement une retraduction de la définition : en prenant  $Y = A \times I \cup X \times \{0\}$  on obtient directement  $\Leftarrow$ . Réciproquement, si  $X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]$  est un rétract de  $X \times [0, 1]$  et qu'on a un diagramme commutatif comme (2), alors on construit le relèvement  $X \times [0, 1] \rightarrow Y$  comme la composée  $X \times [0, 1] \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] \rightarrow Y$  où la première flèche est la rétraction.  $\square$

**Lemme 1.7.4.** Si  $K \subseteq L$  est une inclusion d'un sous-complexe cellulaire, alors c'est une cofibration.

*Démonstration.* Il suffit de construire une rétraction de  $L \times [0, 1]$  dans  $L \times \{0\} \cup K \times [0, 1]$  par récurrence sur  $L^{(n)} \times [0, 1]$ . En ayant déjà construit une rétraction  $r^{(n)} : L^{(n)} \times [0, 1] \rightarrow L^{(n)} \times \{0\} \cup K^{(n)} \times [0, 1]$  on l'étend à  $L^{(n+1)} \times [0, 1]$  de la manière usuelle : pour construire  $r^{(n+1)}$  il suffit de le faire sur chaque cellule de  $L^{(n+1)}$  qui n'est pas dans  $K^{(n+1)}$ . On est donc ramené à construire un relèvement dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{S}^n \times \{0\} & \hookrightarrow & \mathbb{S}^n \times [0, 1] \\
 \downarrow i & & \downarrow i \\
 I^{n+1} \times \{0\} & \hookrightarrow & I^{n+1} \times [0, 1] \\
 & \nearrow & \dashrightarrow \\
 & L^{(n+1)} \times \{0\} \cup K^{(n+1)} \times [0, 1] & 
 \end{array}$$

où les applications sont induites par l'inclusion canonique et  $r^{(n)}$  qui est bien défini sur la partie de bord  $\mathbb{S}^n \times [0, 1]$  de la cellule  $I^{(n+1)} \times [0, 1] \rightarrow L^{(n+1)} \times [0, 1]$ . Mais comme  $\mathbb{S}^n \rightarrow I^{n+1}$  est une cofibration par la proposition 1.7.3.c), le résultat en découle. Comme un CW-complexe a la topologie réunion, on peut recoller les  $r^{(n)}$  pour obtenir la rétraction voulue.  $\square$

*Remarque 1.7.5 (complexes cellulaires relatifs).* Le lemme précédent se généralise<sup>9</sup> en fait à une *inclusion  $X \rightarrow L$  cellulaire généralisée*<sup>10</sup> (auss appelé *complexe cellulaire relatif*) : c'est à dire une inclusion  $X \subset L$  où  $L$  est obtenu comme la colimite dans les espaces topologiques<sup>11</sup>  $L = \bigcup_{i \in I} L_i$  de sous-espaces contenant  $X$  et tels que chaque  $L_i$  est obtenu à partir de  $X$  par recollement de cellules.

*Exemple 1.7.6 (Le cylindre d'une application).* L'exemple suivant est *fondamental*. Soit  $f : X \rightarrow Y$ . On définit le *cylindre de  $f$*  comme l'espace  $Cyl(f) := X \times [0, 1] \amalg_{f \times \{0\}} Y \times \{0\} = X \times [0, 1] \amalg Y /_{(x,0) \sim f(x)}$  (faire un dessin !). L'application  $X \hookrightarrow Cyl(f)$  (donnée par  $x \mapsto (x, 1)$ ) est une cofibration comme on le voit par une preuve "duale" de celle de l'espace des chemins.

9. en appliquant la preuve à chaque  $L_i$  et en recollant les retractions obtenues en utilisant la topologie réunion

10. cette dernière généralise la notion de CW-complexe relatif qui est la même définition si ce n'est qu'on impose en plus de recoller les cellules par degré croissant

11. autrement dit  $L$  est muni de la topologie réunion des  $L_i$

On obtient alors une factorisation de  $f$  en

$$X \hookrightarrow \text{Cyl}(f) \xrightarrow{\simeq} Y$$

en une cofibration suivie d'une équivalence d'homotopie (donnée par l'homotopie rétractant le cylindre  $X \times [0, 1]$  sur  $X \times \{0\}$ ).

**Lemme 1.7.7.** Si  $X$  est un espace métrisable (ou seulement normal<sup>12</sup>), et si  $i : A \hookrightarrow X$  est fermé, alors  $i$  est une cofibration si et seulement si il existe un voisinage ouvert  $U \subseteq X$  qui se rétracte par déformation sur  $A$  dans  $X$  (autrement dit il existe une application  $H : U \times [0, 1] \rightarrow X$  telle que  $H(a, t) = a$ ,  $H(u, 1) \in A$ ,  $H(u, 0) = u$ ).

*Remarque 1.7.8.* Les constructions usuelles (quotient, tiré en arrière, ...) ne préservent pas en général les homotopies.

*Exemple 1.7.9.* Considérons les deux poussés en avant définis par les diagrammes

a)

$$\begin{array}{ccc} \{*, *\} & \longrightarrow & \{*\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{*\} & \longrightarrow & \{*\} \amalg_{\{*, *\}} \{*\} \simeq \{*\} \end{array}$$

b) Mais

$$\begin{array}{ccc} \{0, 1\} & \longrightarrow & \{*\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{S}^1. \end{array}$$

On constate que ces poussés en avant ne sont pas homotopes alors que pourtant  $[0, 1]$  est homotope au point. Ainsi, on voit que les poussés en avant d'applications homotopes ne sont *pas* homotopes en général, c'est donc à fortiori le cas des quotients<sup>13</sup>. En particulier le quotient de l'application  $X \rightarrow \{*\}$  est trivial et ne contient aucune information sur  $X$ . On pourrait facilement faire des constructions similaires avec toutes sortes de limites et colimites (y compris le cas d'une réunion) pour montrer que ces (co)limites ne se comportent pas bien vis à vis de l'invariance par homotopie ou homotopie faible.

Pour palier ce défaut, on doit construire des versions "homotopiques" de ces (co)limites, qui sont des constructions analogues à celle des objets globaux associés à *Tor* et *Ext*. Ces constructions permettent de relier les groupes d'homotopie, de (co)homologie et autres invariants topologiques de la (co)limite homotopique à ceux des différentes composantes.

Donnons un exemple, à savoir la construction des poussés en avant homotopiques :

12. c'est à dire un espace dans lequel deux fermés disjoints peuvent être séparés par des ouverts  
 13. qui ne sont qu'un cas particulier de poussé en avant où  $Y = \{*\}$

**Définition 1.7.10.** Le pushout homotopique de  $A \xrightarrow{i} X$ ,  $A \xrightarrow{j} Y$  est l'espace topologique

$$X \coprod_A^h Y := Y \coprod_A Cyl(i) = \left( Y \coprod A \times [0, 1] \coprod X \right) / \left( (a, 0) \sim j(a), (a', 1) \sim i(a') \right).$$

On notera que  $X \coprod_A^h Y$  est naturellement homéomorphe à  $Cyl(j) \coprod_{Cyl(A)} Cyl(i)$ . Par ailleurs, les inclusions de  $X$  et  $Y$  dans leurs composantes donne un diagramme canonique

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow j & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \coprod_A^h Y \end{array}$$

qui n'est *pas* commutatif, mais est commutatif à homotopie près<sup>14</sup>.

Remarquons que l'on a une application continue naturelle

$$X \coprod_A^h Y \longrightarrow X \coprod_A Y$$

qui est simplement induite par la projection  $A \times [0, 1] \rightarrow A$ . Il n'y a en revanche, pas d'application naturelle de  $X \cup_A Y$  dans  $X \cup_A^h Y$  en général. Par ailleurs, si on a un diagramme commutatif

$$(3) \quad \begin{array}{ccccc} Y & \xleftarrow{j} & A & \xrightarrow{i} & X \\ f \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow g \\ Y' & \xleftarrow{j'} & A' & \xrightarrow{i'} & X' \end{array}$$

alors on a une flèche naturelle  $f \coprod_{\phi}^h g : X \coprod_A^h Y \rightarrow X' \coprod_{A'}^h Y'$  donnée par  $y \mapsto f(y)$ ,  $(a, t) \mapsto (\phi(a), t)$  et  $x \mapsto g(x)$ .

**Lemme 1.7.11.** Le pushout homotopique est un “invariant homotopique”.

Les guillemets et l'énoncé sont volontairement vagues. Cela est du au fait que cette construction n'est pas un pushout ou une colimite de  $X \leftarrow A \rightarrow Y$  ni même si on considère ces objets dans la catégorie homotopique des espaces (l'analogie de la catégorie dérivée, cf le chapitre suivant). On peut montrer qu'une transformation constituée d'équivalences d'homotopies faibles induit une équivalence d'homotopie faible entre les pushouts homotopiques, mais selon les cas on peut avoir des résultats plus forts. Cette notion de colimite homotopique sera précisé dans la suite du cours, voir section 2.5 et exemple 2.5.17.

14. c'est à dire que les deux flèches  $A \rightarrow X \coprod_A^h Y$  déduites du diagramme sont homotopes. L'homotopie étant évidemment celle ramenant  $A \times \{0\}$  sur  $A \times \{1\}$  dans le cylindre

*Démonstration.* On va seulement démontrer que si  $f : X \xrightarrow{\simeq} X'$  est une équivalence d'homotopie au dessus de  $A$ , elle induit, pour tous les pushouts de cette forme, l'application :

$$f \cup_A^h Y : X \cup_A^h Y \rightarrow X' \cup_A^h Y$$

qui est une équivalence d'homotopie. Il existe des améliorations de cela, voir par exemple la feuille de TD 1 où on traite le cas où  $Y = \{*\}$ .

Pour cela on va montrer que si  $g : X' \rightarrow X$  est un inverse homotopique de  $f$ , alors  $g \cup_A^h Y$  est un inverse homotopique de  $f \cup_A^h Y$ . On remarque que  $X \coprod_A^h Y$  est le pushout :

$$\begin{array}{ccc} A \hookrightarrow & \longrightarrow & A \times [1/2, 1] \cup X /_{(a,1) \sim i(a)} \simeq Cyl(i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Cyl(j) \simeq A \times [0, 1/2] \cup Y /_{(a',0) \sim j(a')} & \longrightarrow & X \cup_A^h Y \end{array}$$

Or les injections  $A \hookrightarrow Cyl(i)$  et  $A \hookrightarrow Cyl(j)$  sont des cofibrations (d'après 1.7.3), donc, d'après la propriété universelle du pushout, les morphismes  $Cyl(j) \rightarrow X \cup_A^h Y$  et  $Cyl(i) \rightarrow X \cup_A^h Y$  sont aussi des cofibrations, ce qui implique que  $\iota : A \hookrightarrow X \cup_A^h Y$  est une cofibration.

Par hypothèse, on a une homotopie  $H$  entre  $g \circ f$  et  $id_X$ . Cela nous donne une application  $H|_{A \times [0,1]} : A \times [0, 1] \rightarrow X$ . On a aussi une application  $A \times [0, 1] \xrightarrow{j \times [0,1]} Y \times [0, 1] \xrightarrow{proj_0} Y$ . On en déduit une application  $A \times [0, 1] \rightarrow X \cup_A^h Y$ , auquel correspond un morphisme  $\varphi : A \rightarrow (X \cup_A^h Y)^{[0,1]}$ . On relève alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & (X \cup_A^h Y)^{[0,1]} \\ \iota(a) \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow ev_0 \\ X \cup_A^h Y & \xrightarrow{id_{X \cup_A^h Y}} & X \cup_A^h Y \end{array}$$

$\tilde{H}$  correspond à une homotopie entre  $g \circ f \coprod_A id_Y$  et  $id_X \coprod_A id_Y$ .

On peut démontrer également que si on a des équivalences faibles  $A \rightarrow A'$ ,  $X \rightarrow X'$ ,  $Y \rightarrow Y'$  tels que le diagramme 3 soit commutatif, alors, l'application induite  $X \cup_A^h Y \rightarrow X' \cup_{A'}^h Y'$  est une équivalence d'homotopie faible. C'est une conséquence de l'exemple 2.5.17 et de la proposition 2.5.9.

Sans utiliser la machinerie du reste du cours, on note que le fait que cette application induise un isomorphisme pour les groupes fondamentaux résulte du Théorème de Van-Kampen (en choisissant les images de  $Y \coprod A \times [0, 3/4[$  et  $A \times [1/4, 0] \coprod X$  comme ouverts). De même Mayer-Vietoris appliqué aux mêmes ouverts induit des isomorphismes sur les groupes d'homologie. Il découle alors, si nos espaces sont simplement connexes, du Théorème 1.2.20 que l'application est une équivalence d'homotopie faible.  $\square$

*Exemple 1.7.12.* Un autre exemple classique de telle colimite est donné par la construction de "bon quotient". Plus précisément, soit  $A \subset X$  un sous-espace. Il est classique que le quotient  $X/A$  n'a pas de très bonnes propriétés : par exemple, sa (co)homologie

(réduite) diffère de celle de la (co)homologie relative  $H(X, A)$  de la paire en général<sup>15</sup> et n'est pas un invariant d'homotopie. En revanche, le Cone  $C(A \subset X)$  est un invariant homotopique qui a les bons groupes de (co)homologie et dont on peut remarquer qu'il est homotope au pushout homotopique du diagramme  $* \leftarrow A \hookrightarrow X$ .

**Proposition 1.7.13.** Si l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ A' & \xrightarrow{i'} & X' \end{array}$$

où  $i$  et  $i'$  sont des cofibrations d'image fermée, alors l'application induite  $X/A \rightarrow X'/A'$  est aussi une équivalence d'homotopie.

*Démonstration.* Voir les solutions du TD 1. □

On crée de manière analogue les pullbacks homotopiques en remplaçant  $Cyl(f)$  par  $\mathcal{P}_f$ .

De manière générale, on peut créer des (co)limites homotopiques en remplaçant les applications par des (co)fibrations comme ci-dessus. Cela demande un petit peu d'attention, car il faut faire cela tout en conservant la commutativité des diagrammes servant à définir notre (co)limite. En général, c'est plus compliqué que simplement remplacer les applications par des (co)fibrations même si cela reste l'idée clé.

L'intérêt des (co)limites homotopiques est qu'il donne des constructions invariantes à homotopie (faible) près. Elles ont la vertu d'être beaucoup plus facilement calculables (du point de vue de l'homologie ou de l'homotopie) que leurs constructions non-homotopiques et correspondent aux foncteurs dérivés Tor et Ext de l'algèbre homologique. Par ailleurs, très souvent, pour identifier des espaces topologiques à homotopie (faible) près, on peut se ramener à les identifier avec certaines constructions de (co)limites homotopiques et utiliser leur meilleure calculabilité. Enfin, ces constructions interviennent partout en topologie algébrique et leurs analogues plus généraux que nous verrons dans les catégories de modèles sont des constructions fondamentales dans les applications en dehors de la topologie algébrique.

---

15. un exemple standard est donné par  $A = \{0\} \cup \{1/n\} \subset [0, 1]$  dont le quotient est constitué des anneaux Hawaïens qui n'est pas homotope à un bouquet de cercles, et a une homologie un peu plus compliquée.

## II. CATÉGORIES DE MODÈLE

On va définir un cadre abstrait pour les équivalences faibles et la dualité fibrations/cofibrations. Ce cadre nous permettra par ailleurs de construire proprement et efficacement la catégorie des espaces topologiques à équivalence faible près (ou la catégorie dérivée en algèbre homologique) et les constructions homotopiques/dérivées que nous avons esquissé dans le premier chapitre. Bien que la définition soit très axiomatique, elle s'est montrée redoutablement efficace et les exemples<sup>16</sup> et constructions associées abondent.

*Remarque 2.0.1.* Ici ce que l'on appellera "catégorie de modèle" est souvent appelé "catégorie de modèle fermée" dans la littérature, plus particulièrement dans la terminologie originelle de Quillen.

Commençons par donner la définition générale d'un rétract entre morphismes.

**Définition 2.0.2.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie. Un morphisme  $q \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$  est appelé un rétract de  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$  s'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_A & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 A & \xrightarrow{\quad} & X & \xrightarrow{\quad} & A \\
 \downarrow q & & \downarrow f & & \downarrow q \\
 B & \xrightarrow{\quad} & Y & \xrightarrow{\quad} & B \\
 & & \text{id}_B & & \\
 & & \curvearrowleft & & 
 \end{array}$$

Si les applications verticales sont l'identité (et  $A \rightarrow X$  l'inclusion d'un sous-espace topologique), on retrouve le cas d'un rétracte entre objets (resp. espaces topologiques).

### 2.1. DÉFINITIONS ET AXIOMATIQUE

La définition qui suit est longue, mais centrale dans ce cours !

**Définition 2.1.1.** Une catégorie de modèle est une catégorie  $\mathbf{C}$  munie de trois classes de morphismes :

- La classe  $\mathcal{W}$  dont les éléments, appelés *équivalences faibles*, sont notés  $\xrightarrow{\sim}$ .
- La classe  $\mathcal{C}$  dont les éléments, appelés *cofibrations*, sont notés  $\twoheadrightarrow$ .
- La classe  $\mathcal{F}$  dont les éléments, appelés *fibrations*, sont notés  $\rightarrow$  (Attention à ne pas les confondre avec les épimorphismes).

vérifiant les 5 axiomes suivants :

(MC1)  $\mathbf{C}$  est complète et cocomplète<sup>17</sup>.

<sup>16.</sup> même s'il y en a fort peu d'élémentaires

<sup>17.</sup> c'est à dire l'existence de toutes *petites* limites et colimites, c'est à dire celles indicées par une catégorie dont les objets forment un ensemble

(MC2) (2 parmi 3) Dans tout diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ A & \nearrow & \searrow C \\ & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$$

Si deux des trois flèches sont des équivalences faibles, alors la troisième est aussi une équivalence faible.

(MC3) (*Stabilité par rétracts*) Si  $q$  est un rétract de  $f \in \mathcal{W}$  (resp  $f \in \mathcal{C}$ ,  $f \in \mathcal{F}$ ) alors  $q \in \mathcal{W}$  (resp  $q \in \mathcal{C}$ ,  $q \in \mathcal{F}$ ).

(MC4) (*Relèvements*) Pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \\ \downarrow i & \nearrow \text{---} & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{\quad} & D \end{array}$$

il existe un relèvement (symbolisé par la flèche en pointillé) rendant les deux triangles commutatifs dès que  $i \in \mathcal{W}$  ou  $p \in \mathcal{W}$  (on prendra garde qu'on a déjà supposé que  $i$  est une cofibration et  $p$  une fibration).

(MC5) (*Factorisations*) Tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  admet deux factorisations naturelles :

$$X \xrightarrow{\sim} P_f \twoheadrightarrow Y \quad \text{et} \quad X \twoheadrightarrow C_f \xrightarrow{\sim} Y$$

*Remarque 2.1.2* ((co)fibrations acycliques). Les éléments de  $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}$  (resp.  $\mathcal{W} \cap \mathcal{F}$ ) sont appelés les *cofibrations acycliques* (resp. *fibrations acycliques*)<sup>18</sup>.

*Remarque 2.1.3.* L'axiome (MC4) est en fait constitué de deux axiomes : l'un concerne le cas où la flèche de gauche est une cofibration acyclique et celle de droite seulement une fibration, alors que la deuxième concerne le cas où la flèche de gauche est n'importe quelle cofibration mais celle de droite est une fibration acyclique.

*Terminologie :* On dit d'une flèche  $A \rightarrow C$  comme dans le diagramme de (MC4) qu'elle admet la propriété de relèvement à gauche par rapport à la flèche  $p : B \rightarrow D$ . Et on dit que la flèche  $p : B \rightarrow D$  admet la propriété de relèvement à droite par rapport à la flèche  $A \rightarrow C$ .

*Remarque 2.1.4.* L'hypothèse que les factorisations sont *naturelles* (on peut aussi dire fonctorielles) n'est pas indispensable<sup>19</sup>, mais pratique, pour démontrer les résultats dont on a besoin et est souvent satisfaite en pratique. Elle signifie que si on a un

18. dans la littérature, on trouve aussi la terminologie de (co)fibrations triviales pour la même notion

19. et souvent non-demandée dans la littérature

diagramme commutatif  $X \xrightarrow{f} Y$  alors on obtient des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X \xrightarrow{\cong} P_f \twoheadrightarrow Y & \text{et} & X \twoheadrightarrow C_f \xrightarrow{\cong} Y \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ X' \xrightarrow{\cong} P_{f'} \twoheadrightarrow Y' & & X' \twoheadrightarrow C_{f'} \xrightarrow{\cong} Y' \end{array}$$

et par ailleurs  $P(p' \circ p, q' \circ q) = P(p', q') \circ P(p, q)$  ainsi que  $C(p' \circ p, q' \circ q) = C(p', q') \circ C(p, q)$ . Autrement dit, les factorisations sont en fait des foncteurs  $\text{Arr}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Arr}(\mathbf{C}) \times \text{Arr}(\mathbf{C})$  où  $\text{Arr}(\mathbf{C})$  est la catégorie dont les objets sont les morphismes de  $\mathbf{C}$  et les flèches sont les diagrammes commutatifs (la composition dans  $\text{Arr}(\mathbf{C})$  étant donnée par la superposition verticale de deux diagrammes).

Par ailleurs, il existe des variantes où on demande seulement les (co)limites *finies* pour (MC1).

*Remarque 2.1.5.* D'après (MC1), toute catégorie de modèle  $\mathbf{C}$  admet un objet initial  $\mathbf{0}$  et un<sup>20</sup> objet terminal  $\{*\}$  (c'est-à-dire, pour tout objet  $X$  de  $\mathbf{C}$ ,  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{0}, X)$  et  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, \{*\})$  sont des singletons). En effet, ces objets correspondent aux (co)limites vides, c'est à dire indicées par l'ensemble vide.

*Exemple 2.1.6.* Si  $\mathbf{C}$  est additive,  $\mathbf{0} = \{*\}$  est l'objet nul.

Si  $\mathbf{C} = \text{Top}$ ,  $0 = \emptyset$  et  $\{*\}$  est un singleton. L'objet initial est alors différent du terminal.

La définition suivante sera importante. On verra dans ce cours que les objets cofibrants (resp. fibrants) ont un peu le même rôle que les modules projectifs en algèbre homologique ou CW-complexe en homotopie (resp. injectifs).

**Définition 2.1.7.** Un objet  $X$  de  $\mathbf{C}$  est dit :

- cofibrant si  $\mathbf{0} \rightarrow X$  est une cofibration.
- fibrant si  $X \rightarrow \{*\}$  est une fibration.

*Remarque 2.1.8.* Soit  $X$  un objet de  $\mathbf{C}$ . D'après (MC5), il existe toujours une factorisation de  $\mathbf{0} \rightarrow X$  :

$$0 \twoheadrightarrow L(X) \xrightarrow{\sim} X$$

Donc tout  $X$  est faiblement équivalent à un objet cofibrant (*via* une fibration). On appelle  $L(X) \xrightarrow{\sim} X$  une “résolution cofibrante”, ou un “remplacement cofibrant” de  $X$ .

De même, tout objet  $Y$  de  $\mathbf{C}$  admet une “résolution fibrante” ou un “remplacement fibrant” :

$$Y \xrightarrow{\sim} R(Y) \twoheadrightarrow \{*\}.$$

De manière générale les axiomes (MC3) et (MC5) permettent de construire de nombreuses (co)fibrations.

Notons que la naturalité des factorisations de (MC5) assure que les remplacements fibrant et cofibrant sont en fait des foncteurs  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ .

<sup>20</sup> déterminé à unique isomorphisme près

*Remarque 2.1.9.* Si  $A$  est un objet cofibrant, alors pour toute fibration acyclique  $Y \xrightarrow{\sim} X$ , tout morphisme  $A \rightarrow X$  se relève :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \wr \\ A & \longrightarrow & X \end{array}$$

On a aussi le résultat dual pour les objets  $B$  fibrants :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & B \\ \downarrow \wr & \nearrow & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

On peut remarquer une analogie certaine avec des résultats obtenus pour les complexes de modules projectifs et injectifs dans les rappels d'algèbre homologique.

- Exercice 2.1.10.* (1) Montrer que si  $\mathbf{C}$  est une catégorie complète et cocomplète et que l'on choisit  $\mathcal{W} = \text{Isomorphismes}$ ,  $\mathcal{C}, \mathcal{F} = \text{tous les morphismes}$  alors on obtient une catégorie de modèle.
- (2) Montrer que le produit de 2 catégories de modèle a une structure de modèle obtenue en prenant les produits 2 à 2 des classes  $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ .
- (3) Montrer que si  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  est une catégorie de modèle, alors  $(\mathbf{C}^{op}, \mathcal{W}^{op}, \mathcal{F}^{op}, \mathcal{C}^{op})$  est une catégorie de modèle. Autrement dit, les fibrations et cofibrations jouent un rôle dual.

La proposition suivante est cruciale, et justifie le caractère "fermé" des catégories de modèle.

**Proposition 2.1.11.** Soit  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  une catégorie de modèle.

- $f$  est une cofibration  $\iff$  elle vérifie la propriété de relèvement (à gauche) le long de toutes les fibrations acycliques.
- $f$  est une cofibration acyclique  $\iff$  elle vérifie la propriété de relèvement (à gauche) le long de toutes les fibrations.
- $f$  est une fibration  $\iff$  elle vérifie la propriété de relèvement (à droite) le long de toutes les cofibrations acycliques.
- $f$  est une fibration acyclique  $\iff$  elle vérifie la propriété de relèvement (à droite) le long de toutes les cofibrations.
- $f$  est une équivalence faible si et seulement si elle se factorise  $p \circ i$  avec  $i$  une cofibration acyclique et  $p$  une fibration acyclique.

**Corollaire 2.1.12.** On déduit de ce qui précède :

- Dans une catégorie de modèle  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ , la donnée de deux des classes  $\mathcal{W}, \mathcal{C}$  et  $\mathcal{F}$  détermine entièrement la troisième.
- $\mathcal{W}, \mathcal{C}$  et  $\mathcal{F}$  sont clos par composition.
- Les cofibrations et cofibrations acycliques sont stables par pushouts ; les fibrations et fibrations acycliques sont stables par pullbacks.
- Les isomorphismes sont à la fois des cofibrations, fibrations et équivalences faibles.

Aucun des deux exemples suivants ne sont triviaux. Le premier est néanmoins fondamental. Il peut se démontrer pour une bonne partie en utilisant les résultats du chapitre I, une méthode similaire (via l'argument du petit objet) à celle utilisée dans la partie 2.3 pour les propriétés de factorisation. Une partie un peu plus technique est la caractérisation des cofibrations données. Il est cependant assez aisé de montrer que les inclusions cellulaires généralisées sont bien des cofibrations pour cette structure de modèle qui est le sens utile en pratique. Voir la feuille de TD 3 pour la démonstration de l'exemple 2.1.13.

*Exemple 2.1.13 (Catégorie de modèle de Quillen sur les espaces topologiques).* Quillen a démontré que  $Top$ , munie des équivalence faibles d'homotopie, des fibrations de Serre et des rétractes d'inclusions cellulaires généralisées (cf 1.7.5) est une catégorie de modèle. En particulier les cofibrants sont les rétractes de complexes cellulaires et tout objet est fibrant.

*Exemple 2.1.14 (Catégorie de modèle de Strøm sur les espaces topologiques).* Strøm a démontré que  $Top$ , munie des équivalences d'homotopie, des fibrations de Hurewicz, et des rétractes de cofibrations d'image fermée, est une catégorie de modèle.

On notera que les deux exemples précédents ont des équivalences faibles différentes et que leurs notions de cofibrations diffèrent, en particulier dans le cas de la structure de Quillen, de celle de la section 1.7 (mais en sont des cas particuliers).

*Démonstration de la proposition 2.1.11.* a)  $\Rightarrow$  vient de (MC4). Montrons  $\Leftarrow$  : soit  $i : A \rightarrow B$  un morphisme admettant la propriété de relèvement (à gauche) le long de toutes les fibrations acycliques. D'après (MC5), on peut factoriser  $i : A \rightarrow B$  en  $A \xrightarrow{h} E \xrightarrow{\sim} B$ . D'après la propriété de relèvement (comme dans (MC4)) satisfaite par  $i : A \rightarrow B$ , on a un relèvement  $h$  du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & E \\ \downarrow i & \nearrow h & \downarrow \iota \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array}$$

Ainsi on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xlongequal{\quad} & A & \xlongequal{\quad} & A \\ \downarrow i & & \downarrow & & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{h} & E & \xrightarrow{\sim} & B \\ & \searrow & \text{---} & \nearrow & \\ & & id_B & & \end{array}$$

D'après (MC3) on en déduit que  $i \in \mathcal{C}$ .

b)  $\Rightarrow$  vient de (MC4).  $\Leftarrow$  se montre comme précédemment.

c) et d) sont duales de a) et b).

e)  $\Rightarrow$  Soit  $f : X \rightarrow Y$ . On factorise  $f : X \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\sim} Y$ . D'après (MC2),  $i \in \mathcal{W}$ .

$\Leftarrow$  est une application directe de (MC2).

□

*Démonstration du corollaire 2.1.12.* Notons qu'il découle immédiatement de (MC2) que les équivalences faibles sont stables par composition.

Démontrons a). Si on a fixé  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{F}$ , alors, on connaît aussi les fibrations acycliques et le a) de la Proposition 2.1.11 définit les cofibrations. De même la donnée de  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{C}$  détermine les cofibrations acycliques et par suite les fibrations par le c) de la Proposition 2.1.11.

Si maintenant on a la donnée de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{C}$ , les b) et d) de la Proposition 2.1.11 déterminent les fibrations acycliques et cofibrations acycliques de  $\mathbf{C}$ . Par suite, le e) de Proposition 2.1.11 détermine les équivalences faibles.

Démontrons b). Si on compose deux applications admettant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques, alors en superposant deux diagrammes du type de (MC4) : on obtient successivement un relevé dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow i & \nearrow \psi & \downarrow \wr \\
 C & & B \\
 \downarrow j & & \downarrow \\
 E & \longrightarrow & D
 \end{array}$$

puis en remplaçant la flèche  $A \rightarrow B$  par la flèche  $\psi : C \rightarrow B$  obtenue un relevé supplémentaire

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow i & \nearrow \psi & \downarrow \wr \\
 C & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & B \\
 \downarrow j & \nearrow \tilde{\psi} & \downarrow \\
 E & \longrightarrow & D
 \end{array}$$

tel que le diagramme reste commutatif. Cela prouve que la composée de deux applications admettant la propriété de relèvement par rapports aux fibrations acycliques admet encore la propriété de relèvement par rapports aux fibrations acycliques. Et encore une fois la Proposition 2.1.11 permet bien de conclure que la composée de deux cofibrations est une cofibration.

De même, en appliquant la propriété de relèvement au diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow i & & \downarrow \wr \\
 & & D \\
 & \nearrow \psi & \downarrow \wr \\
 E & \longrightarrow & F
 \end{array}$$

on obtient un relèvement  $\psi$  et en appliquant alors la propriété de relèvement au diagramme obtenu en remplaçant  $E \rightarrow F$  par  $\psi$  on obtient un relèvement :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow i & & \downarrow \wr \\
 & \nearrow \phi & \downarrow \wr \\
 & \nearrow \psi & D \\
 E & \longrightarrow & F
 \end{array}$$

qui laisse le diagramme complètement commutatif. Ceci prouve que la composée de fibrations acycliques est encore une fibration acyclique. En appliquant la Proposition 2.1.11 on en déduit que fibrations acycliques sont closes. On démontre de même les deux autres cas (cofibrations acycliques et fibrations).

On démontre la stabilité par pushout et pullback exactement de la même façon en “décomposant” des diagrammes de relèvement (voir le corrigé de la feuille de TD 1 où l’on a établi que les fibrations de Hurewicz sont stables par pullback. La preuve utilisée là est rigoureusement la même pour les fibrations générales et se dualise sans peine pour les cofibrations). Enfin, il est clair que les isomorphismes admettent les propriétés de relèvement à droite et à gauche (en les inversant pour déterminer les relevés). On déduit encore de la proposition qu’elles sont donc des fibrations, fibrations acycliques, cofibrations et cofibrations acycliques et en particulier également des équivalences faibles.  $\square$

## 2.2. CATÉGORIE HOMOTOPIQUE D’UNE CATÉGORIE DE MODÈLE

Comme on l’a déjà dit au début, la notion de catégorie de modèle sert à définir une notion d’homotopie et à travailler avec. Précisément, on s’intéresse à regarder les objets de  $\mathbf{C}$  à équivalences faibles près. Les notions de fibration et cofibration vont nous aider à étudier les morphismes dans  $\mathbf{C}$  à équivalence près, à donner une bonne notion d’équivalence d’homotopie, à étudier des foncteurs entre théories homotopiques etc...

On commence par la définition de la catégorie homotopique d’une catégorie de modèle (qui devrait rappeler celle de catégorie dérivée associée à un anneau).

Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie et  $\mathcal{W}$  une classe de morphismes dans  $\mathbf{C}$  stable par composition.

**Définition 2.2.1** (Localisation de Gabriel-Zisman). Une localisation de  $\mathbf{C}$  par rapport à  $\mathcal{W}$  est la donnée d'une catégorie  $\mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$  et d'un foncteur  $\ell : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$  tel que  $\ell$  satisfasse la propriété universelle suivante : pour toute catégorie  $\mathbf{D}$ , le foncteur

$$\ell^* : \text{Fun}(\mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}], \mathbf{D}) \rightarrow \text{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D}) : F \mapsto F \circ \ell$$

est pleinement fidèle et son image essentielle est constituée des foncteurs qui envoient la classe  $\mathcal{W}$  dans les isomorphismes de  $\mathbf{D}$ .

*Remarque 2.2.2.* En particulier, le foncteur  $\ell$  envoie les équivalences faibles sur des isomorphismes (cela découle en prenant  $\mathbf{D} = \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$  et  $F = Id$ ).

*Notation 2.2.3 (Catégorie homotopique).* Si  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  est une catégorie de modèle, on notera

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{C}) := \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$$

et on appellera cette localisation *la catégorie homotopique de  $\mathbf{C}$* .

**Proposition 2.2.4.** Il existe une localisation  $\ell : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$  de  $(\mathbf{C}, \mathcal{W})$  et celle-ci est unique, à équivalence de catégorie près, l'équivalence étant unique à unique isomorphisme près.

La proposition précédente et plus de détails sur cette construction sont donnés dans la feuille de TD 2 et ses solutions.

Il existe une description explicite de cette localisation :

**Lemme 2.2.5.** La catégorie  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  a les mêmes objets que  $\mathbf{C}$ . Les morphismes de  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ , entre 2 objets  $X$  et  $Y$ , sont donnés par le quotient des zigzags de la forme

$$X \rightarrow X_1 \leftarrow X_2 \rightarrow X_3 \leftarrow \dots \rightarrow X_n \rightarrow Y,$$

où toutes les flèches allant vers la gauche sont dans  $\mathcal{W}$ , par la relation identifiant 2 zigzags s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & X_1 & \longleftarrow & X_2 & \longrightarrow & X_3 & \longleftarrow & \dots & \longrightarrow & X_n & & \\ & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\ X & & & & & & & & & & & & Y \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & X'_1 & \longleftarrow & X'_2 & \longrightarrow & X'_3 & \longleftarrow & \dots & \longrightarrow & X'_n & & \end{array}$$

où les flèches verticales sont dans  $\mathcal{W}$ . La composition des flèches est donnée par la concaténation de zigzags.

Si on note  $\text{Path}(\mathbf{C})$  la catégorie ayant les mêmes objets et comme morphismes les chemins (finis) dans la catégorie  $\mathbf{C} \amalg \mathcal{W}^{op}$  obtenue à partir de  $\mathbf{C}$  en rajoutant formellement la classe  $\mathcal{W}^{op}$  aux flèches de  $\mathbf{C}$ , alors, on peut traduire le lemme par

$$\text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(X, Y) = \text{Hom}_{\text{Path}(\mathbf{C})}(X, Y) / \simeq$$

Ici la composition est donnée par la concaténation des chemins, l'identité est le chemin vide  $\bullet_X$  de  $X$  et la relation  $\sim$  est engendrée par  $X \xrightarrow{\sigma} Y \xleftarrow{\sigma} X \sim \bullet_X$  pour tout  $\sigma \in \mathcal{W}$ ,  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \sim X \xrightarrow{g \circ f} Z$  et  $X \xrightarrow{id} X \sim \bullet_X$ .

Voir la feuille de TD 2 pour plus de détails et certaines simplifications lorsque  $\mathcal{W}$  vérifie certains axiomes supplémentaires. Il n'est pas clair que la catégorie ainsi

construite soit d'une taille raisonnable (en particulier que les morphismes forment des ensembles). On va voir (Théorème 2.2.18) qu'en fait, dans le cas d'une catégorie de modèles, les données supplémentaires de  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{C}$  garantissent que c'est le cas et que l'on peut exprimer ces morphismes sans recourir à des zigzags.

Commençons par comparer les catégories homotopiques de  $\mathbf{C}$  et de ses sous-catégories d'objets (co)fibrants.

*Notation 2.2.6.* On note respectivement  $\mathbf{C}_c$ ,  $\mathbf{C}_f$  et  $\mathbf{C}_{cf}$  les sous-catégories pleines de  $\mathbf{C}$  formées respectivement des objets cofibrants, des objets fibrants, et des objets à la fois fibrants et cofibrants.

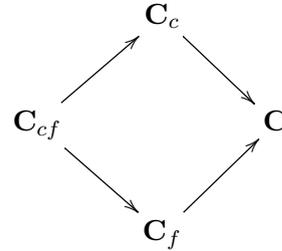
*Remarque 2.2.7.* On peut se demander s'il y a beaucoup d'objets à la fois fibrants et cofibrants. On va voir que oui. En effet, soit  $A$  un objet cofibrant. Son remplacement fibrant  $R(A)$  s'insère dans le diagramme

$$0 \mapsto A \xrightarrow{\sim} R(A) \rightarrow \{*\}$$

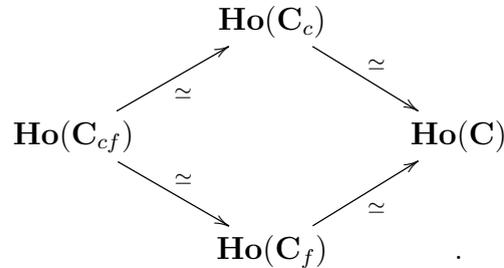
d'où il suit que  $R(A)$ , qui est fibrant par définition, est aussi cofibrant (par stabilité de la composition de cofibrations). De même, si  $X$  est fibrant, son remplacement cofibrant  $L(X)$  est à la fois cofibrant et fibrant. Par conséquent, pour tout objet  $X$ ,  $R(L(X))$  et  $L(R(X))$  sont des objets à la fois fibrants et cofibrants.

*Exercice 2.2.8.* Démontrer qu'il existe une équivalence faible  $R(L(X)) \rightarrow L(R(X))$  (on pourra commencer par démontrer que les axiomes (MC5), (MC2) induisent une équivalence faible  $R(L(X)) \rightarrow R(X)$  puis utiliser (MC4)).

**Lemme 2.2.9.** Les inclusions canoniques  $\mathbf{C}_c$   $\mathbf{C}_{cf}$   $\mathbf{C}_f$   $\mathbf{C}$  induisent des équi-



valences de catégories en passant aux catégories homotopiques :



*Démonstration.* Démontrons le cas du foncteur  $I : \mathbf{C}_f \rightarrow \mathbf{C}$  donné par la sous-catégorie des objets fibrants. Puisque une équivalence faible entre objets fibrants est une équivalence faible, la composée  $\mathbf{C}_f \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  envoie les équivalences faibles sur des isomorphismes et par propriété universelle de  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}_f)$  ce foncteur se factorise au travers d'un foncteur  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}_f) \xrightarrow{\tilde{I}} \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ . Pour montrer que ce foncteur est une équivalence, on construit son "inverse" (voir l'appendice ??). Pour cela il suffit de prendre le foncteur de remplacement fibrant  $R : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_f$ ,  $X \mapsto R(X)$  donné par (MC5). La propriété (MC2) assure que  $R$  envoie une équivalence faible sur une

équivalence faible et passe donc encore à la catégorie homotopique pour donner  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \xrightarrow{\tilde{R}} \mathbf{Ho}(\mathbf{C}_f)$ . Il ne nous reste plus qu'à montrer qu'il y a des équivalences naturelles entre les foncteurs  $\tilde{R} \circ \tilde{I}$  (resp.  $\tilde{I} \circ \tilde{C}$ ) et les foncteurs identité de  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}_f)$  (resp.  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ ).

On remarque que les applications canoniques  $X \xrightarrow{\sim} R(X)$  données par (MC5) définissent une transformation naturelle entre les foncteurs  $Id_{\mathbf{C}}$  et  $I \circ R$  qui passe aux catégories homotopiques pour donner un isomorphisme naturel<sup>21</sup> entre  $Id_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}$  et  $\tilde{I} \circ \tilde{R}$  (puisque  $X \xrightarrow{\sim} R(X)$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ ). On construit de même un isomorphisme naturel entre  $Id_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C}_f)}$  et  $\tilde{R} \circ \tilde{I}$ .  $\square$

On va introduire une notion générale d'homotopie pour une catégorie de modèle. On dispose déjà d'une notion d'équivalence faible (comme relation engendrée par les flèches de  $\mathscr{W}$ ), qui imite et généralise celle dans les espaces topologiques. On aura besoin de plusieurs notions différentes, adaptées au type d'objet à la source et au but. On va utiliser les notions usuelles de coproduit<sup>22</sup>  $A \coprod B$  (dans le cas  $A = B$ ) et de produit<sup>23</sup>  $X \times Y$  (cf Appendice ??).

**Définition 2.2.10 (Relations d'homotopie dans les catégories de modèle).** Soit une catégorie de modèle  $(\mathbf{C}, \mathscr{W}, \mathscr{C}, \mathscr{F})$ .

-Un cylindre d'un objet  $X$ : c'est une factorisation

$$id_X \coprod id_X : X \coprod X \rightarrow C \xrightarrow{\sim} X$$

de l'application canonique au travers d'une cofibration et d'une équivalence faible. On notera  $i_0, i_1 : X \xrightarrow{\tilde{i}_j} X \coprod X \rightarrow C$  les inclusions canoniques respectives sur les composantes suivie de la flèche vers  $C$ .

-Un objet en chemins de  $Y$ : c'est une factorisation

$$id_Y \times id_Y : Y \xrightarrow{\sim} P \rightarrow Y \times Y$$

de l'application diagonale. On notera  $proj_0, proj_1 : P \rightarrow Y \times Y \xrightarrow{p_i} Y$  les flèches induites par les projections canoniques sur chaque facteur.

-Une homotopie à gauche entre  $f, g : X \rightarrow Y$ : c'est une flèche  $H : C_X \rightarrow Y$ , où  $C_X$  est un cylindre de  $X$ , telle que  $H \circ i_0 = f$  et  $H \circ i_1 = g$ . On notera  $f \stackrel{l}{\sim} g$ .

-Une homotopie à droite entre  $f, g : X \rightarrow Y$ : c'est une flèche  $K : X \rightarrow P_Y$ , où  $P_Y$  est un objet en chemin de  $Y$ , telle que  $proj_0 \circ K = f$ ,  $proj_1 \circ K = g$ . On notera  $f \stackrel{r}{\sim} g$ .

-Une homotopie entre  $f$  et  $g$ : c'est la donnée d'une homotopie à droite et d'une homotopie à gauche entre  $f$  et  $g$ . On notera  $f \simeq g$  lorsque  $f$  et  $g$  sont homotopes.

-Équivalence d'homotopie: on dira que  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie si il existe  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ g \simeq id_Y$  et  $g \circ f \simeq id_X$ . Auquel cas on dira aussi que  $X$  et  $Y$  sont homotopes.

21. on pourrait, et devrait, dire que ces applications définissent une équivalence faible naturelle entre les foncteurs aux niveaux des catégories de modèles

22. on rappelle que le coproduit vient avec deux applications canoniques  $\tilde{i}_A : A \rightarrow A \coprod B$  et  $\tilde{i}_B : B \rightarrow A \coprod B$  que nous appelons abusivement "inclusions canoniques"

23. on rappelle que le produit vient avec deux applications canoniques  $p_X : X \times Y \rightarrow X$  et  $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$  que nous appelons abusivement "projections canoniques"

*Remarque 2.2.11.* L'axiome de factorisation garantit bien entendu qu'il existe des cylindres (resp. des objets en chemin) pour tout objet  $X$  et qu'on peut de plus les choisir de telle sorte que l'équivalence faible soit de plus une fibration (resp. une cofibration). Mais attention, pour définir les homotopies, on considère de tels objets arbitraires, et en général, on *ne peut pas imposer un choix*; autrement dit il peut exister une homotopie entre  $f, g : X \rightarrow Y$  associée à un cylindre de  $X$  (ou objet en chemins)  $C$  sans qu'il n'y ait une telle homotopie pour un autre choix de cylindre  $C'$  de  $X$ .

On pourra remarquer que si on note  $X \times I$  la factorisation fonctorielle  $X \amalg X \rightarrow X \times I \xrightarrow{\sim} X$  de  $id_X \amalg id_X$ , alors, par (MC4), il existe, pour tout cylindre  $C$  de  $X$ , une équivalence faible  $C \xrightarrow{\sim} X \times I$  rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X & \xrightarrow{\quad} & X \times I \\ \downarrow & \nearrow \sim & \downarrow \sim \\ C & \xrightarrow{\sim} & X. \end{array}$$

En particulier une homotopie pour  $X \times I$  en induit une pour  $C$ . En revanche, il n'y a en général *pas* d'équivalence dans l'autre sens, d'où la nécessité d'autoriser des objets en cylindre généraux dans la définition d'homotopie. Lorsque cependant tous les objets de  $\mathbf{C}$  sont fibrants, on peut toujours se ramener à des homotopies données par  $X \times I$ , voir l'exercice 2.2.20.

On a évidemment un résultat dual pour les objets en chemin.

*Remarque 2.2.12.* Puisque la composée  $X \xrightarrow{\tilde{i}_0} X \amalg X \rightarrow C \xrightarrow{\sim} X$  est l'identité, qui est une équivalence faible, l'axiome (MC2) nous assure alors que la composée  $X \xrightarrow{i_0} X \amalg X \rightarrow C$  est une équivalence faible. Un argument similaire montre que, pour tout cylindre  $C$  et tout objet en chemin  $P$ , on a que les applications

$$i_j : X \xrightarrow{\tilde{i}_j} X \amalg X \rightarrow C, \quad proj_j : P \rightarrow X \times X \xrightarrow{p_j} X$$

sont des équivalences faibles (pour  $j = 0, 1$ ).

*Exemple 2.2.13.* On peut constater que si  $X$  est un espace topologique, le cylindre  $X \times I$  (muni des inclusions  $id \times \{i\}$ ,  $i = 0, 1$ ) est bien un objet en cylindre essentiellement en vertu de l'exemple 1.7.6 (il s'agit du cylindre de l'identité de  $X$ ) et que de même, l'espace des chemins  $X^I$  (muni des évaluations en 0 et 1) est un objet en chemin de  $X$ , en vertu de l'exemple fondamental des fibrations associé à l'identité de  $X$ .

La proposition suivante explique comment ces notions d'homotopie interagissent efficacement avec les objets (co)fibrants. On pourra en retenir que ces notions se comportent agréablement et s'identifient si la source est cofibrante et le but fibrant.

**Proposition 2.2.14.** a) On a que  $f \stackrel{l}{\sim} g$  implique  $h \circ f \stackrel{l}{\sim} h \circ g$ , autrement dit l'homotopie à gauche est stable par composition à gauche (soit post-composition).

b) Si  $A$  est cofibrant alors la relation d'homotopie à gauche  $\stackrel{l}{\sim}$  est une relation d'équivalence sur  $\text{Hom}(A, X)$ . Si de plus  $h : X \xrightarrow{\sim} Y$  ou si  $X, Y$  sont fibrants

et  $h : X \xrightarrow{\sim} Y$ , alors la post-composition  $h_*(f) = h \circ f$  induit une bijection

$$h_* : \text{Hom}(A, X)/\overset{l}{\sim} \cong \text{Hom}(A, Y)/\overset{l}{\sim}$$

sur le quotient.

- c) Si  $Y$  est fibrant et  $f, g : X \rightarrow Y$ , alors  $f \overset{l}{\sim} g$  implique  $f \circ h \overset{l}{\sim} g \circ h$  (pour tout  $W \xrightarrow{h} X$ ). Autrement dit, l'homotopie à gauche est stable par composition à droite (soit précomposition) si le but des flèches est fibrant.
- d) On a que  $f \overset{r}{\sim} g$  implique  $f \circ h \overset{r}{\sim} g \circ h$ , autrement dit l'homotopie à droite est stable par composition à droite.
- e) Si  $Y$  est fibrant alors la relation d'homotopie à droite  $\overset{r}{\sim}$  est une relation d'équivalence sur  $\text{Hom}(B, Y)$ . Si de plus  $h : A \xrightarrow{\sim} B$  ou si  $A, B$  sont cofibrants et  $h : A \xrightarrow{\sim} B$ , alors la précomposition  $h^*(f) = f \circ h$  induit une bijection

$$h^* : \text{Hom}(B, Y)/\overset{r}{\sim} \cong \text{Hom}(A, Y)/\overset{r}{\sim}$$

sur le quotient.

- f) Si  $A$  est cofibrant et  $f, g : A \rightarrow Y$ , alors  $f \overset{r}{\sim} g$  implique  $h \circ f \overset{r}{\sim} h \circ g$  (pour tout  $Y \xrightarrow{h} Z$ ). Autrement dit, l'homotopie à droite est stable par composition à gauche si la source des flèches est cofibrante.

On peut ne retenir que les 3 premiers résultats. Les 3 suivants en sont les “duals”. Un point clé de la preuve sera le suivant qui sert souvent :

**Lemme 2.2.15.** Soit  $A$  un objet cofibrant et  $Y$  un objet fibrant.

- (1) pour tout  $X$ , on a que l'application canonique  $X \rightarrow X \amalg A$  est une cofibration. De même, l'application canonique  $X \times Y \rightarrow X$  est une fibration.
- (2) Soit  $C_A$  un cylindre de  $A$ . Les deux applications canoniques  $i_j : A \rightarrow A \amalg A \rightarrow C_A$  sont des *cofibrations acycliques*. De même si  $P_Y$  est un objet en chemin de  $Y$ , les deux applications canoniques  $proj_j : P_Y \rightarrow Y \times Y \rightarrow Y$  sont des *fibrations acycliques*.

*Démonstration.* Pour les cofibrations cela provient du diagramme

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ A & \longrightarrow & A \amalg X \end{array}$$

et de la stabilité des cofibrations par poussé-en-avant. L'argument dual s'applique pour les fibrations.

Pour le point (2), la remarque 2.2.12 assure déjà que les applications sont des équivalences faibles. Par ailleurs le premier point assure lui que  $\tilde{i}_j : A \rightarrow A \amalg A$  est une cofibration et que  $p_j : Y \times Y \rightarrow Y$  est une fibration. Donc par stabilité des (co)fibrations par composition, les applications en question sont bien des (co)fibrations acycliques.  $\square$

*Démonstration de la proposition 2.2.14. - a et d)* C'est immédiat : soit  $H : C_X \rightarrow Y$  une “homotopie à gauche” entre  $f, g : X \rightarrow Y$  et  $h : Y \rightarrow Z$ . Alors la composée  $h \circ H : C_X \rightarrow Z$  vérifie bien que  $h \circ H \circ i_0 = h \circ f$  et  $h \circ H \circ i_1 = h \circ g$ . Ainsi  $h \circ H$  est une “homotopie à gauche” entre  $h \circ f$  et  $h \circ g$ . Le même raisonnement s'applique pour les homotopies à droite et la pré-composition.

- **b et e)** On commence par remarquer que  $f \overset{l}{\sim} g \Rightarrow g \overset{l}{\sim} f$  ce qui est immédiat en remarquant que si on a un cylindre  $A \amalg A \rightarrow C_A$  alors on a aussi un cylindre

$A \amalg A \cong A \amalg A \rightarrow C_A$  où l'isomorphisme du milieu est obtenu en échangeant les deux composantes<sup>24</sup>. On a alors que si  $H : C_A \rightarrow X$  était l'homotopie à gauche entre  $f$  et  $g$ , alors  $H$  est aussi une homotopie à gauche entre  $f$  et  $g$  via l'objet en cylindre  $A \amalg A \cong A \amalg A \rightarrow C_A$  (la seule différence étant justement qu'on a inversé  $i_0$  et  $i_1$ ). Par ailleurs, si on remarque que la composée  $C_A \rightarrow A \xrightarrow{f} X$  définit une homotopie à gauche entre  $f$  et  $f$ , donc  $f \sim f$ . On note que les deux points précédents sont vrai même si  $A$  n'est pas cofibrant. Pour la transitivité, en revanche, on va utiliser que  $A$  est cofibrant et en particulier le point (2) du Lemme 2.2.15 précédent. Si  $f \sim g$  et  $g \sim h$ , on dispose de deux cylindres  $C_A$  et  $C'_A$  de  $A$  et de morphismes  $H : C_A \rightarrow X$  et  $H' : C'_A \rightarrow X$  réalisant ces homotopies à gauche. On veut construire un autre cylindre et un morphisme réalisant l'homotopie à gauche entre  $f$  et  $h$ . L'idée, comme dans les espaces topologiques, est de coller les cylindres le long d'une face (faire un dessin!) pour les construire. Dans le cadre général, on regarde donc le pushout  $C_A \cup_A C'_A$  donné par le carré cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[\sim]{i'_0} & C'_A \\ \downarrow \scriptstyle i_1 \sim & & \downarrow \\ C_A & \longrightarrow & C_A \cup_A C'_A \end{array}$$

Par stabilité des cofibrations acycliques par pushout, on note que les morphismes  $C'_A \rightarrow C_A \cup_A C'_A$  et  $C_A \rightarrow C_A \cup_A C'_A$  dans le diagramme sont des cofibrations acycliques.

Par ailleurs, les applications  $A \xrightarrow{i_0} A \amalg A \rightarrow C_A \xrightarrow{\sim} C_A \cup_A C'_A$  et  $A \xrightarrow{i'_1} A \amalg A \rightarrow C'_A \xrightarrow{\sim} C_A \cup_A C'_A$  donnent un morphisme canonique

$$A \amalg A \rightarrow C_A \cup_A C'_A.$$

Les équivalences faibles  $C_A \xrightarrow{\sim} A$  et  $C'_A \xrightarrow{\sim} A$  induisent, par propriété universelle du pushout, un morphisme  $C_A \cup_A C'_A \rightarrow A$ . Ce morphisme est une équivalence faible : en effet la composée  $C_A \xrightarrow{\sim} C_A \cup_A C'_A \rightarrow A$  en est une par définition d'un cylindre et le résultat suit alors de la propriété 2 parmi 3 (MC2). On a par ailleurs que les composées  $A \xrightarrow{i_0} C_A \rightarrow C_A \cup_A C'_A \rightarrow A$  et  $A \xrightarrow{i'_1} C'_A \rightarrow C_A \cup_A C'_A \rightarrow A$  sont l'identité de  $A$  puisque c'est le cas de  $A \xrightarrow{i_0} C_A \rightarrow A$  et  $A \xrightarrow{i'_1} C'_A \rightarrow A$  (et puisque nécessairement  $id \cup_A id = id$  par unicité dans la propriété universelle du pushout). Enfin, les applications  $H : C_A \rightarrow X$  et  $H' : C'_A \rightarrow X$  induisent une application  $\tilde{H} = H \cup_A H' : C_A \cup_A C'_A \rightarrow X$  car  $H \circ i_1 = g = H' \circ i'_0$ . On a alors que la composée  $A \xrightarrow{i_0} C_A \xrightarrow{\sim} C_A \cup_A C'_A \xrightarrow{\tilde{H}} X$  vaut  $H \circ i_0 = f$  (par définition du pushout) et de même  $\tilde{H} \circ i'_1 = H \circ i'_1 = h$ . Ainsi, pour conclure que  $\tilde{H}$  est une homotopie à gauche entre  $f$  et  $h$ , il suffirait de vérifier que  $i_0 \amalg i'_1 : A \amalg A \rightarrow C_A \cup_A C'_A$  est un cylindre de  $A$ , et plus précisément que c'est une cofibration (le reste à déjà été montré). Ce n'est pas évident mais pas non plus nécessaire car il nous suffit en fait de factoriser cette construction sous la forme  $A \amalg A \rightarrow D \xrightarrow{\sim} C_A \cup_A C'_A$ . Alors la

24. c'est à dire en échangeant  $i_0$  et  $i_1$

composée  $D \xrightarrow{\sim} C_A \cup_A C'_A \xrightarrow{\sim} A$  est une équivalence faible et on a déjà obtenu que les précompositions de cette application avec  $i_0$  et  $i'_1$  sont des identités. Ainsi  $D$  est un cylindre de  $A$  et la composée  $D \xrightarrow{\sim} C_A \cup_A C'_A \xrightarrow{\tilde{H}} X$  est bien une homotopie à gauche entre  $f$  et  $h$ !

Par le **a)**, on a que pour tout morphisme  $h : X \rightarrow Y$ , l'application  $f \mapsto h \circ f$  passe au quotient par la relation d'équivalence  $\sim$ . Ainsi  $h_* : \text{Hom}(A, X)/\sim \cong \text{Hom}(A, Y)/\sim$  est bien définie. Vérifions la bijectivité dans le cas où  $h : X \rightarrow Y$  est une fibration acyclique. Commençons par l'injectivité : soit  $f, g : A \rightarrow X$  tels que  $h \circ f \sim h \circ g$  et  $H : C_A \rightarrow Y$  réalisant cette homotopie. On voudrait relever cette homotopie à  $X$  et on utilise donc l'axiome de relèvement (MC4) appliqué au diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{f \amalg g} & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow h \\ C_A & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

ce qui nous fournit immédiatement une homotopie à gauche entre  $f$  et  $g$ . Il reste à voir la surjectivité. Celle-ci est assez facile : en effet, pour tout morphisme  $q : X \rightarrow Y$ , il suffit d'appliquer, par cofibrance de  $A$ , l'axiome de relèvement dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow h \\ A & \xrightarrow{q} & Y \end{array} \text{ pour trouver un antécédent par } h_*.$$

Le cas où  $X, Y$  sont fibrants et  $f : X \xrightarrow{\sim} Y$  se déduit du précédent par le lemme de Brown 2.4.7 appliqué au foncteur  $\text{Hom}(A, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  où  $\mathbf{Set}$  est la catégorie de modèle des ensembles (munie des isomorphismes comme équivalence faibles comme dans l'exercice 2.1.10). Ceci termine la preuve de **b)** et la proposition **e)** se démontre dualement.

- **c et f)** Soit  $h : W \rightarrow X$  et  $f, g : X \rightarrow Y$  tels que  $f \sim g$ . Prenons donc  $H : C_X \rightarrow Y$  une homotopie à gauche entre  $f$  et  $g$ . Il faut remonter cette homotopie à un objet en cylindre de  $W$ . Prenons en un  $W \amalg W \rightarrow C_W \xrightarrow{\sim} W$  (on en choisit un quelconque). On veut évidemment utiliser l'axiome de relèvement pour construire l'homotopie. Pour cela, on se ramène d'abord au cas où le morphisme  $C_X \xrightarrow{\sim} X$  dans la définition du cylindre est une fibration acyclique. C'est là qu'on va utiliser que  $Y$  est fibrant : en effet on factorise l'équivalence faible  $C_X \xrightarrow{\sim} X$  sous la forme  $C_X \xrightarrow{\sim} C'_X \xrightarrow{\sim} X$  par (MC5) ((MC2) garantissant que chaque flèche est une équivalence faible). Alors le relèvement dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_X & \xrightarrow{H} & Y \\ \downarrow & \nearrow H' & \downarrow \\ C'_X & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

fournit une homotopie  $C'_X \rightarrow Y$  pour l'objet en cylindre  $C'_X$  de  $X$ .

Maintenant qu'on s'est ramené à un objet en cylindre  $X \amalg X \rightarrow C'_X \xrightarrow{\sim} X$  dont la dernière flèche est une fibration acyclique, on applique l'axiome (MC4) au carré

commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 W \amalg W & \xrightarrow{i' \circ (h \amalg h)} & C'_X \\
 \downarrow & \searrow \tilde{H} & \downarrow \wr \\
 C_W & \xrightarrow{hop} & X
 \end{array}$$

où  $p : C_W \rightarrow W$  et  $i : X \amalg X \rightarrow C'_X$  sont les applications données par la structure des cylindres. Finalement, la composée  $H' \circ \tilde{H}$  fournit l'homotopie voulue. Ceci termine la preuve de c). Celle de f) est duale comme d'habitude.  $\square$

La proposition implique que si on se restreint à des objets cofibrants à la source et fibrants au but, les relations d'homotopie se comportent agréablement comme nous l'avons souligné. On obtient d'ailleurs le

**Corollaire 2.2.16.** a) Si  $A$  est cofibrant et  $Y$  fibrant, alors  $\overset{l}{\sim} = \overset{r}{\sim} = \simeq$  sur  $\text{Hom}(A, Y)$ .  
 b) La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur la sous-catégorie  $\mathbf{C}_{cf}$  des objets à la fois cofibrants et fibrants.

*Démonstration.* On suppose que  $f \overset{l}{\sim} g$ ; montrons que  $f \overset{r}{\sim} g$ . On a donc une homotopie à gauche  $C_A \xrightarrow{H} Y$  où  $C_A$  est un objet en cylindre de  $A$ . On veut trouver un objet en chemin  $Y \xrightarrow{\sim} P_Y \rightarrow Y \times Y$  et  $K : A \rightarrow P_Y$  une homotopie à droite. Fixons un tel objet en chemins quelconque pour  $Y$ . Par le lemme 2.2.15 précédent, on a que l'application canonique  $i_0 : A \rightarrow A \amalg A \rightarrow C_A$  est une cofibration *acyclique*. On note  $j$  la composition  $j : C_A \rightarrow A \xrightarrow{f} Y$  et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & P_Y \\
 \downarrow i_0 & & & \searrow \tilde{K} & \downarrow \wr \\
 C_A & \xrightarrow{(j, H)} & Y \times Y & & 
 \end{array}$$

(car  $H \circ i_0 = f = j \circ i_0$ ) qui fournit le relèvement  $\tilde{K}$ . On note alors  $K : A \rightarrow P_Y$  la composée  $\tilde{K} \circ i_1$  (attention on prend  $i_1$  et pas  $i_0$  contrairement au diagramme). Par commutativité du diagramme, on a  $proj_0 \circ K = j \circ i_1 = f \circ id_A = f$  et  $proj_1 \circ K = H \circ i_1 = g$ . Ainsi, on a bien que  $K$  est une homotopie à droite. On peut remarquer que l'on a utilisé le caractère cofibrant de  $A$ , et que par ailleurs ceci nous a permis de prendre un objet en chemin quelconque. Pour démontrer qu'une homotopie à droite est une homotopie à gauche, on fait une preuve duale en utilisant cette fois-ci que  $Y$  est fibrant et en prenant un cylindre quelconque de  $A$ . Ceci termine la preuve de a).

Par le a) et la proposition 2.2.14.b) et d), on obtient l'énoncé b).  $\square$

Une autre corollaire est le suivant :

**Théorème 2.2.17** (*Théorème de Whitehead pour les catégories de modèle*). Si  $f : X \rightarrow Y$  est une flèche dans  $\mathbf{C}_{cf}$ , c'est une équivalence faible si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie.

On notera que ce résultat implique en particulier le théorème de Whitehead 1.2.18 classique en prenant la structure de modèle de Quillen sur  $\mathbf{Top}$  (Exemple 2.1.13).

*Démonstration.* voir la feuille de TD 2.  $\square$

On obtient le théorème principal de cette section :

**Théorème 2.2.18.** Soit  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  une catégorie de modèle.

a) L'inclusion  $\mathbf{C}_{cf} \hookrightarrow \mathbf{C}$  induit une équivalence de catégories

$$\mathbf{C}_{cf}/ \simeq \xrightarrow{\cong} \mathbf{Ho}(\mathbf{C}_{cf}) \cong \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$$

où  $\mathbf{C}_{cf}/ \simeq$  est la catégorie  $\mathbf{C}_{cf}$  où l'on a quotienté les ensembles de morphismes par la relation d'équivalence donnée par la relation d'homotopie.

b) On a des isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(X), R(Y))/ \simeq$$

c) Si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme qui devient un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ , alors  $f$  est une équivalence faible.

*Remarque 2.2.19.* Le théorème identifie la catégorie homotopique avec un quotient de la catégorie  $\mathbf{C}_{cf}$ . En particulier, c'est une catégorie sans avoir besoin de changer d'univers et a les mêmes "cardinalités ensemblistes" que  $\mathbf{C}$ . Par ailleurs, le point b) assure que pour calculer les morphismes dans la catégorie homotopique il suffit de calculer ceux entre un remplacement cofibrant et un remplacement fibrant de la source et du but respectivement; il permet donc de calculer les morphismes de la catégorie dérivée en se ramenant à un ensemble de morphismes entre objets fixés (et ainsi d'éviter le passage aux zigzags).

Evidemment, si l'objet source est déjà cofibrant et le but fibrant, on n'a pas besoin de faire ce remplacement d'après le a). Notons d'ailleurs que si  $A$  est cofibrant et  $Y$  est fibrant, on a des équivalences faibles  $L(A) \xrightarrow{\sim} A$  entre objets cofibrants et  $Y \xrightarrow{\sim} R(Y)$  entre objets fibrants. Il découle alors de la proposition 2.2.14.b) et e.) et du corollaire 2.2.16.a) que l'on a des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(A, Y) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(A), R(Y))/ \simeq \xleftarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, R(Y))/ \simeq \\ &\xleftarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, Y)/ \simeq . \end{aligned}$$

*Démonstration du théorème 2.2.18.* On a déjà vu que  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}_{cf}) \cong \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  (Lemme 2.2.9).

Il reste à montrer que le foncteur  $\mathbf{C}_{cf} \rightarrow \mathbf{C}_{cf}/ \simeq$  vérifie la propriété universelle de la localisation  $\mathbf{C}_{cf} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{C}_{cf}) = \mathbf{C}_{cf}[\mathcal{W}^{-1}]$ . Soit  $\mathbf{D}$  une catégorie et  $F : \mathbf{C}_{cf} \rightarrow \mathbf{D}$  un foncteur qui envoie les équivalences faibles sur les isomorphismes. On veut montrer qu'il existe un unique foncteur  $\tilde{F}$  rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}_{cf} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} \\ & \searrow & \nearrow \tilde{F} \\ & \mathbf{C}_{cf}/ \simeq & \end{array}$$

commutatif. Par définition, sur les objets, on doit avoir  $\tilde{F}(X) = F(X)$  et sur les morphismes on doit avoir que  $\tilde{F}([f]) = F(f)$  où  $[f]$  désigne la classe d'équivalence d'un morphisme  $f : X \rightarrow Y$ . Le foncteur quotient  $\mathbf{C}_{cf} \rightarrow \mathbf{C}_{cf}/ \simeq$  étant plein, on en déduit déjà l'unicité. Il reste à voir que  $\tilde{F}$  est bien défini, c'est à dire que si  $f \simeq g$  alors  $F(f) = F(g)$ . Pour cela on considère une homotopie  $H : C_X \rightarrow Y$  à gauche entre  $f$  et  $g$  où  $X \amalg X \xrightarrow[p]{\sim} C_X \xrightarrow{\sim} X$  est un cylindre de  $X$ . Pour pouvoir appliquer  $F$  à ce diagramme on se ramène au cas où  $C_X \in \mathbf{C}_{cf}$  par un procédé déjà vu. Comme  $X$  est cofibrant,  $C_X$  aussi (car  $X \rightarrow X \amalg X$  est une cofibration également). On factorise  $C_X \rightarrow X$  sous la forme  $C_X \xrightarrow{\sim} C'_X \rightarrow X$ . Comme  $X$  est aussi fibrant, on obtient que

$C'_X$  aussi et il reste cofibrant par construction. Par ailleurs, le relèvement  $H'$  dans le diagramme 
$$\begin{array}{ccc} C_X & \xrightarrow{H} & Y \\ \downarrow \wr & \nearrow H' & \downarrow \\ C'_X & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$
 permet de remonter l'homotopie  $H$  à  $C'_X$ . On est donc

ramené au cas où  $C_X$  est fibrant et cofibrant et on peut appliquer  $F$  à  $p$ . Comme  $p \circ i_0 = p \circ i_1$ , on a  $F(p) \circ F(i_0) = F(p) \circ F(i_1)$ . Or  $F(p)$  est un isomorphisme de  $\mathbf{D}$  puisque  $p$  est une équivalence faible. Il suit que  $F(i_0) = F(i_1)$ . Mais maintenant nous avons aussi  $H \circ i_0 = f$  et  $H \circ i_1 = g$  d'où,

$$F(f) = F(H) \circ F(i_0) = F(H) \circ F(i_1) = F(g)$$

ce qui conclut la preuve de a).

Pour b), on rappelle de la preuve du Lemme 2.2.9 que l'équivalence réciproque de  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}_{cf}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  est donnée par le foncteur induit par  $L \circ R : X \mapsto L(R(X))$  où  $L$  et  $R$  sont les foncteurs de remplacement cofibrants et fibrants. D'où  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(R(X)), L(R(Y))) / \simeq$  par le a). On a deux flèches naturelles  $\alpha_Y : L(Y) \xrightarrow{\sim} Y$  et  $\beta_Z : Z \xrightarrow{\sim} R(Z)$  pour tous objets. Rappelons que par le Corollaire 2.2.16, on a que  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, Y) / \simeq = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, Y) / \overset{l}{\sim} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, Y) / \overset{r}{\sim}$  dès que  $A$  est cofibrant et  $Y$  fibrant. On déduit alors une application

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(X), R(Y)) / \simeq \overset{L(\beta_X)^*}{\longleftarrow} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(R(X)), R(Y)) / \simeq \overset{\alpha_{R(Y)}^*}{\longleftarrow} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(R(X)), L(R(Y))) / \simeq$$

qui est une bijection car chaque application l'est en vertu de la proposition 2.2.14.b) et e). Ceci prouve b).

Il reste à voir c). Par définition une équivalence faible devient un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ . Réciproquement, supposons que  $[A \xrightarrow{f} B] \in \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  soit un isomorphisme. En prenant les remplacements fibrants et cofibrants on obtient un diagramme commutatif 
$$\begin{array}{ccc} L(R(A)) & \xrightarrow{L(R(f))} & L(R(B)) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$
 dont on déduit qu'il suffit de mon-

trer que  $L(R(f))$  est une équivalence faible (par l'axiome (MC2)). Sachant qu'une équivalence faible devient un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ , on a que  $[L(R(f))]$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  et on est ramené au cas d'un morphisme  $f$  entre objets fibrant et cofibrant. Par le a) que nous avons déjà montré, on en déduit qu'il existe  $g$  tel que les composées  $f \circ g$  et  $g \circ f$  soient homotopes à l'identité. Autrement dit,  $f$  est une équivalence d'homotopie et le Théorème 2.2.17 nous dit que ce morphisme est une équivalence faible.  $\square$

*Exercice 2.2.20.* Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle dans laquelle tous les objets sont fibrants. Pour tout objet  $X$ , on fixe  $X \coprod X \mapsto X \times I \xrightarrow{\sim} X$  un objet en cylindre de  $X$  déduit de l'axiome (MC5) appliqué à  $id \coprod id : X \coprod X \rightarrow X$ .

- (1) Montrer que dans la définition d'homotopie à gauche on peut toujours supposer que le cylindre est donné par  $X \times I$ . C'est à dire que si  $f \overset{l}{\sim} g$  (avec  $f, g : X \rightarrow Y$ ), alors il existe un morphisme  $H : X \times I \rightarrow Y$  tel que  $H \circ i_0 = f$  et  $H \circ i_1 = g$ .

- (2) On munit  $\mathbf{Top}$  de la structure de modèle de Quillen (exemple 2.1.13). Démontrer que deux applications continues sont homotopes à gauche si et seulement si elles sont homotopes au sens usuel (définition 1.1.1).
- (3) On note  $[X, Y]$  l'ensemble des classes d'homotopie (pour la définition 1.1.1 usuelle) d'applications continues  $X \rightarrow Y$  dans  $\mathbf{Top}$ . Démontrer que si  $X$  est un CW-complexe, alors

$$[X, Y] \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})}(X, Y).$$

En déduire que pour tout  $x \in X$ , on a  $\pi_n(X, x) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})}(S^n, X)_x$  où ce dernier est l'ensemble des morphismes de  $S^n \rightarrow X$  dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$  dont la restriction  $* \rightarrow S^n \rightarrow X$  dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$  est (la classe d'équivalence de)  $* \mapsto x$ .

### 2.3. EXEMPLES DES COMPLEXES DE CHAÎNES, ARGUMENT DU PETIT OBJET ET CATÉGORIES DE MODÈLE COFIBREMENT ENGENDRÉES

Soit  $R$  un anneau (ou une  $k$ -algèbre) commutatif, unitaire.

*Notation 2.3.1.* On note  $Ch(R)$  la catégorie des complexes  $(C_{i \in \mathbb{Z}}, d)$  de chaînes de  $R$ -modules non-bornés et  $Ch_{\geq 0}(R)$  sa sous-catégorie des complexes de chaînes concentrés en degrés positifs ( $C_i = 0$  si  $i < 0$ ). Enfin on note  $Ch_{\leq 0}(R)$  la sous-catégorie des complexes de chaînes concentrés en degrés négatifs ( $C_i = 0$  si  $i > 0$ ); cette sous-catégorie est isomorphe (via  $C^i = C_{-i}$ ) à celle des complexes de cochaînes concentrés en degrés positifs.

**Définition 2.3.2** (*Structure de modèle projective*). Soit  $\mathbf{C} = Ch(R)$  ou  $Ch_{\geq 0}(R)$ . On définit la structure, dite projective, sur  $\mathbf{C}$  en posant

**Équivalences faibles**  $\mathcal{W}$ : ce sont les quasi-isomorphismes (c'est à dire les morphismes de complexes induisant des isomorphismes en homologie).

**Fibrations**  $\mathcal{F}$ : ce sont les morphismes de complexes surjectifs (en tout degré) dans  $Ch(R)$  et les morphismes de complexes surjectifs en tout degré  $> 0$  dans  $Ch_{\geq 0}(R)$ .

**Cofibrations**  $\mathcal{C}$ : ce sont les morphismes de complexes qui ont la propriété de relèvement par rapport aux fibrations acycliques.

**Théorème 2.3.3.** Les structures projectives ci-dessus munissent  $Ch(R)$  et  $Ch_{\geq 0}(R)$  d'une structure de catégorie de modèles. De plus,

- (1) Les cofibrations de  $Ch_{\geq 0}(R)$  sont exactement les inclusions en tout degré dont le conoyau est projectif en tout degré.
- (2) Les cofibrations de  $Ch(R)$  sont les morphismes de complexes, qui sont injectifs et de conoyau projectif en tout degré, et dont le conoyau est cofibrant.
- (3) Tout morphisme de complexe de  $Ch(R)$ , injectif en tout degré, dont le conoyau est un complexe borné inférieurement<sup>25</sup> de modules projectifs est une cofibration.

*Remarque 2.3.4 (les cofibrations sont scindées degré par degré).* Tout morphisme de  $R$ -modules injectif  $A \hookrightarrow B$  de conoyau  $P = B/A$  projectif est nécessairement scindé : c'est-à-dire qu'il existe  $s : P \rightarrow B$  tel que la composée  $P \xrightarrow{s} B \xrightarrow{\pi} B/A = P$  soit l'identité. Ce morphisme est donné par l'application en pointillé

25. c'est à dire que  $C_i = 0$  pour  $i \ll 0$

donné par le relèvement de la projection canonique dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \swarrow s & \parallel \\ B & \xrightarrow{\pi} & P \end{array}$$

En particulier, l'application  $R$ -linéaire  $A \oplus P \rightarrow B$  définie par  $(a, y) \mapsto a + s(y)$  a un inverse donné par le morphisme  $x \mapsto (x - s \circ \pi(x), \pi(x))$  et définit donc un isomorphisme  $B \cong A \oplus P$ .

D'après le Théorème 2.3.3, cette propriété est vraie degré par degré pour toute cofibration dans les structures de modèles projectives. Autrement dit

*Une cofibration  $i : A_* \rightarrow B_*$  pour la structure projective est nécessairement injective et scindée en tout degré :  $B_i \cong A_i \oplus (B_i/A_i)$ .*

Attention, ce scindement n'est cependant pas forcément un scindement de complexes de chaînes ! L'inclusion de  $A_*$  et la projection  $B_* \rightarrow P_*$  sont bien des morphismes de complexes mais il se peut que dans la décomposition  $B_* \cong A_* \oplus P_*$  la restriction de la différentielle de  $B$  à  $P_*$  est une composante non-nulle à valeur dans  $A_*$  (ce qui est équivalent à dire que la section  $s_* : P_* \rightarrow B_*$  construite degré par degré n'est pas un morphisme de complexe).

*Remarque 2.3.5.* Bien que le conoyau d'une cofibration, dans le cas  $Ch(R)$ , soit contenu en tout degré de modules projectifs on prendra garde, que pour les complexes non-bornés, un complexe acyclique formé de projectifs n'est *pas* forcément cofibrant (contrairement au cas de  $Ch_{\geq 0}(R)$ ). Par exemple, prenons  $C_i = k[x]/(x^2)$  muni de sa structure de  $k[x]/(x^2)$  module canonique. On a une différentielle  $d$  donnée par la multiplication par  $x$ . On a immédiatement que ce complexe est acyclique (c'est à dire d'homologie nulle en tout degré). D'après le théorème, si il était cofibrant, on pourrait remonter tout morphisme de  $C$  vers  $X$  le long de toute surjection  $Y \twoheadrightarrow X$ . Prenons  $X = k$  et  $p : Y = k[x]/(x^2) \rightarrow k$  la projection canonique. Soit  $f : C \rightarrow X$  donnée par l'application triviale en degré  $i \neq 0$  et la projection  $k[x]/(x^2) \rightarrow k$  en degré 0. C'est bien un morphisme de complexes. Si il existait une factorisation  $f = p \circ \tilde{f}$  de  $f$ , on aurait pour  $x = x \cdot 1 \in k[x]/(x^2)$  pris dans  $C_0$ , que

$$x \cdot \tilde{f}(1) = \tilde{f}(x) = x \cdot \tilde{f}(d(1)) = 0 \text{ mais } p \circ (x \cdot \tilde{f}(1)) = x \cdot p \circ \tilde{f}(1) = x \cdot f(1) = x \neq 0$$

ce qui est contradictoire.

On peut définir des structures de modèles duales qui font apparaître le rôle particulier des modules injectifs.

**Définition 2.3.6** (*Structure de modèle injective*). Soit  $\mathbf{C} = Ch(R)$  ou  $Ch_{\leq 0}(R)$ . On définit la structure, dite injective, sur  $\mathbf{C}$  en posant

**Équivalences faibles  $\mathcal{W}$** : ce sont les quasi-isomorphismes.

**Cofibrations  $\mathcal{C}$** : ce sont les morphismes de complexes injectifs (en tout degré) dans  $Ch(R)$  et les morphismes de complexes injectifs en tout degré  $< 0$  dans  $Ch_{\leq 0}(R)$ .

**Fibrations  $\mathcal{F}$** : ce sont les morphismes de complexes qui ont la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations acycliques.

On peut démontrer le résultat suivant, par des méthodes essentiellement similaires à celle de 2.3.3.

**Théorème 2.3.7.** Les structures injectives ci-dessus munissent  $Ch(R)$  et  $Ch_{\leq 0}(R)$  d'une structure de catégorie de modèles. De plus,

- (1) Les fibrations de  $Ch_{\leq 0}(R)$  sont exactement les morphismes qui, en tout degré, sont des surjections dont le noyau est un  $R$ -module injectif.
- (2) Les fibrations de  $Ch(R)$  sont les morphismes de complexes, qui sont surjectifs en tout degré, de noyau constitué de modules injectifs en chaque degré, et dont le noyau est fibrant.
- (3) Tout morphisme de complexe de  $Ch(R)$ , surjectif en tout degré, dont le noyau est un complexe borné supérieurement<sup>26</sup> de modules injectifs est une fibration.

*Remarque 2.3.8.* Dans la structure projective, tout complexe de chaînes est fibrant, alors que dans la structure injective tout complexe de chaînes est cofibrant.

Nous expliquons maintenant les différentes étapes de la preuve du Théorème 2.3.3. Cet exemple est symptomatique d'une grande catégorie d'exemples appelées catégories de modèles cofibrément engendrées; le point essentiel de ces catégories est qu'on peut caractériser les fibrations et fibrations acycliques en termes de propriété de relèvement par rapport à une famille très simple de cofibrations, les cofibrations acycliques de taille petite, voir la définition 2.3.14 ci-dessous pour plus de précisions sur "petite".

*Preuve des axiomes MC1, MC2, MC3.* L'existence des limites et colimites, et donc l'axiome (MC1), pour les complexes de chaînes est standard. Elle consiste à vérifier que les (co)limites calculées dans les espaces gradués<sup>27</sup> héritent de différentielles naturelles.

L'axiome (MC2) s'obtient en passant aux groupes d'homologie. Il devient alors que si deux flèches parmi  $H_*(f)$ ,  $H_*(g)$  et  $H_*(g) \circ H_*(f) = H_*(g \circ f)$  sont des isomorphismes alors la troisième l'est, ce qui est une propriété immédiate des morphismes inversibles.

Pour l'axiome (MC3), soit

$$\begin{array}{ccccc}
 & & id_A & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 A & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{\alpha} & A \\
 \downarrow q & & \downarrow f & & \downarrow q \\
 B & \xrightarrow{j} & Y & \xrightarrow{\beta} & B \\
 & & id_B & & \\
 & & \curvearrowleft & & 
 \end{array}$$

un rétracte. Puisque les flèches horizontales sont l'identité, on a automatiquement que  $i : A \rightarrow X$  et  $i_* : H_*(A) \rightarrow H_*(X)$  sont injectives en tout degré et que  $\beta : Y \rightarrow B$  et  $\beta_* : H_*(Y) \rightarrow H_*(B)$  sont surjectives en tout degré.

26. c'est à dire que  $C_i = 0$  pour  $i \gg 0$

27. on prendra garde qu'on définit les limites et colimites pour les espaces gradués degré par degré (ce qui est possible puisque on regarde des morphismes de complexes qui préservent donc le degré), c'est à dire que le sous-espace des éléments homogènes de degré  $i$  d'une (co)limite de modules se calcule en prenant la (co)limite des parties homogènes de degré  $i$ . On ne calcule *pas* les limites de modules gradués  $(R_{*,i})_{i \in I}$  en considérant la limite des sommes directes  $(\bigoplus_{n \geq 0} R_{n,i})_{i \in I}$  car ces dernières limites n'ont pas forcément une décomposition en somme directe de partie homogène compatible avec celles des objets de départ (par exemple on peut avoir un produit infini de parties homogènes).

Supposons maintenant que  $f$  soit un quasi-isomorphisme, alors  $f_* = H_*(f)$  est un isomorphisme et donc la commutativité du diagramme implique que  $j_* \circ q_* = f_* \circ i_*$  est injective. En particulier  $q_*$  est injective. De même, de la surjectivité de  $\beta_* \circ f_* = q_* \circ \alpha_*$  suit la surjectivité de  $q_*$ . Ainsi  $q_*$  est un isomorphisme et donc  $q$  est un quasi-isomorphisme.

On voit par ailleurs que le même argument assure que  $q$  est surjective en tout degré (resp  $> 0$ ) si  $f$  l'est. Ce qui démontre que le rétracte d'une fibration est une fibration.

Enfin supposons que  $f$  est une cofibration et montrons que  $q$  est une cofibration, c'est à dire, par définition qu'elle a la propriété de relèvement par rapport à toute fibration qui est aussi un quasi-isomorphisme  $P \xrightarrow{\sim} Q$ . La rétraction et le fait que  $f$  soit une cofibration nous fournit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & id_A & & & \\
 & & & \curvearrowright & & & \\
 A & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{\alpha} & A & \longrightarrow & P \\
 \downarrow q & & \downarrow f & & \downarrow h & \nearrow q & \downarrow \simeq \\
 B & \xrightarrow{j} & Y & \xrightarrow{\beta} & B & \longrightarrow & Q \\
 & & & id_B & & & \\
 & & & \curvearrowleft & & & 
 \end{array}$$

Le relèvement cherché est alors la composée  $h \circ j$  précisément grace au fait que les composées des flèches horizontales de la rétraction sont des identités.  $\square$

Expliquons maintenant d'où viennent les conditions (1), (2) et (3) du théorème 2.3.3. Cela nous aidera aussi pour établir la propriété (MC4). Pour cela on commence par exhiber des complexes de chaînes canoniques qui vont caractériser nos (co)fibrations.

**Définition 2.3.9.** Soit  $M$  un  $R$ -module.

- On définit le complexe

$$D^n(M) := \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{id} M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

$n \qquad n - 1$

donné, en degré  $i$ , par  $D^n(M)_i = 0$  si  $i \neq n, n - 1$  et  $D^n(M)_i = M$  si  $i = n, n - 1$ , la différentielle étant l'identité au seul endroit non trivial.

- On définit le complexe  $S^n(M)$  comme le complexe  $S^n(M)_i = M$  si  $i = n$  et  $S^n(M)_i = 0$  si  $i \neq n$  muni de la seule différentielle possible...

Il est clair que  $D^n(M)$  est acyclique, donc que  $D^n(M) \rightarrow 0$  est une fibration acyclique, et on a par ailleurs un morphisme de complexe injectif  $S^{n-1}(M) \hookrightarrow D^n(M)$  canonique

$$(4) \quad \begin{array}{cccccccc}
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{id} & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow id & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

ainsi qu'une fibration canonique  $D^n(M) \rightarrow S^n(M)$

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{id} & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Ce dernier morphisme est bien défini dans  $Ch_{\geq 0}(R)$  dès que  $n \geq 1$ .

*Remarque 2.3.10.* La notation est précisément faite pour rappeler l'inclusion du bord d'un disque  $\mathbb{D}^n$  et le recollement d'un disque  $\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  sur un point.

*Démonstration des propriétés (1), (2), (3) du Théorème 2.3.3.* On commence par le sens direct. Soit  $f : A \rightarrow B$  une cofibration dans  $Ch(R)$  (resp.  $Ch_{\geq 0}(R)$ ), c'est à dire une application vérifiant la propriété de relèvement à gauche par rapport à une fibration acyclique. Considérons le morphisme de complexe canonique  $\varphi_A^n : A \rightarrow D^{n+1}(A_n)$  donné par

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d} & A_{n+1} & \xrightarrow{d} & A_n & \xrightarrow{d} & A_{n-1} & \longrightarrow & A_{n-2} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{id} & A_n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & D^{n+1}(A_n) \\ \downarrow f & \nearrow h & \downarrow \iota \\ B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et l'existence du relèvement  $h$ . Ce relèvement nous donne donc un diagramme com-

mutatif  $B_{n+1} \xrightarrow{h_{n+1}} A_n$  satisfaisant de plus  $h_n \circ f_n = id_{A_n}$ . Ceci prouve à la fois

$$\begin{array}{ccc} d \downarrow & & \parallel \\ B_n & \xrightarrow{h_n} & A_n \end{array}$$

l'injectivité de  $f$  et le fait que le conoyau est scindé en tout degré.

Comme le poussé en avant d'une cofibration est une cofibration<sup>28</sup> (cela se démontre comme on l'a vu dans la proposition 2.1.11 en utilisant uniquement les propriétés de relèvement à gauche et ne nécessite donc pas d'avoir déjà établi que la structure était de modèle), on obtient du poussé en avant  $A \xrightarrow{0} 0$  que le complexe  $P_*$  des

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow f & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & P_* \end{array}$$

conoyaux est cofibrant.

Montrons maintenant qu'en tout degré, le conoyau  $P_n := B_n/A_n$  est projectif<sup>29</sup>. Pour cela il faut montrer qu'il a la propriété de relèvement par rapport à toute surjection  $u : M \rightarrow N$  de morphismes de  $R$ -modules. Soit  $q : P_n \rightarrow N$  un morphisme. Pour cela on considère encore le morphisme canonique  $\varphi_{P_*}^n : P_* \rightarrow D^{n+1}(P_n)$ , la

28. à comprendre donc ici comme un morphisme ayant les propriétés de relèvements par rapport aux fibrations acycliques

29. la preuve marchant et pour  $Ch_{\geq 0}(R)$  et pour  $Ch(R)$

surjection induite  $D^{n+1}(f) : D^{n+1}(M) \rightarrow D^{n+1}(N)$  qui est une équivalence faible puisque les deux complexes sont acycliques, et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & D^{n+1}(M) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \wr \\ P_* & \xrightarrow{D^{n+1}(q) \circ \varphi_{P_*}^n} & D^{n+1}(N). \end{array}$$

Le relèvement en pointillé dans ce diagramme fournit précisément un relèvement de  $q$  (en degré  $n$ ).

Il reste à montrer les réciproques. On commence par celles dans les affirmations (1) et (3), c'est à dire que les morphismes de complexes vérifiant les conditions énoncées ont bien la propriété de relèvement par rapport à toutes les fibrations acycliques. Le résultat est similaire dans les deux cas (le cas borné inférieurement se traitant comme le cas concentré en degré positif). Il faut montrer que pour tout quasi-isomorphisme  $f : X \rightarrow Y$  qui est surjectif en degré  $\geq 1$ , alors, pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & X \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow \wr \\ B & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

un relèvement  $h$  existe rendant les deux triangles commutatifs. Ceci est l'exercice 2 du Devoir maison et c'est essentiellement la même chose que l'exercice 1.4.9. En fait, on peut remarquer que comme  $f$  est un quasi-isomorphisme, on a que  $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$  est aussi surjective et donc  $f$  est surjectif en tout degré. On construit alors le relèvement par récurrence en partant d'un choix du relèvement en degré 0 en utilisant la décomposition  $B_0 = A_0 \oplus P_0$  que nous avons vu, le fait que le noyau  $\text{Ker}(f_* : X_* \rightarrow Y_*)$  est acyclique (par une utilisation directe de la suite exacte longue d'homologie associée à la suite exacte  $\text{Ker}(f_*) \rightarrow X_* \rightarrow Y_*$ ); l'argument est une variante un peu plus sophistiqué que celui du lemme 1.4.8.

La réciproque de (2) est aussi similaire, en effet, par projectivité des  $P_n$  que nous avons établi, on a une application linéaire  $\kappa_n : P_n \rightarrow B_n/A_n \rightarrow X_n$  relevant la restriction de  $\psi : B_n \rightarrow Y_n$  à la composante  $P_n$  en utilisant qu'on a vu que  $B_n \cong A_n \oplus P_n$ . Cette dernière identité assure que la différentielle de  $B$  s'écrit  $d(a, p) = (d_A(a) + t(p), d(p))$  où  $d_A$  est la différentielle sur  $A$ ,  $d$  la différentielle induite par celle de  $B$  sur le quotient  $P = B/A$  (on a forcément  $d_A t + t d = 0$ ). On a alors une application  $d\kappa - \kappa d - \phi t : P_n \rightarrow \text{Ker}(f_{n-1} : X_{n-1} \rightarrow Y_{n-1})$ . En utilisant que  $P$  est cofibrant et le noyau  $\text{Ker}(f)$  acyclique, on peut montrer que cette application est homotope à 0 (cf la preuve du Lemme 2.3.12), c'est la dernière question de l'exercice 2 du devoir à la maison. La somme  $(f, \kappa + H) : B_n \cong A_n \oplus P_n \rightarrow X_n$  (où  $H$  est l'homotopie précédente) est le relèvement cherché.  $\square$

*Propriété (MC4).* Par définition, on a déjà la propriété de relèvement des cofibrations par rapports aux fibrations acycliques. Il faut montrer que toute cofibration  $i : A \xrightarrow{\sim} B$  qui est une équivalence faible a la propriété de relèvement par rapport aux fibrations.

Comme on a déjà vu qu'une cofibration est injective en tout degré, on a déjà que le conoyau  $P_*$  est acyclique (par la longue suite exacte d'homologie associée à la suite exacte courte de complexes  $A \hookrightarrow B \rightarrow P_* \rightarrow 0$ ).

Dans le cas de  $Ch_{\geq 0}(R)$ , on peut utiliser alors le lemme suivant (qui se démontre encore une fois par récurrence).

**Lemme 2.3.11.** Soit  $P_*$  un complexe acyclique dans  $Ch_{\geq 0}(R)$ , constitué de modules projectifs. Alors les cycles  $Z_k(P_*)$  sont aussi projectifs et de plus on a un isomorphisme de complexes de chaînes

$$P_* \cong \bigoplus_{k \geq 0} D^{k+1}(Z_k(P_*)).$$

Le résultat découle alors du fait que chaque  $D^{k+1}(M)$  est projectif en tant que complexe de chaînes, c'est à dire qu'il à la propriété de relèvement par rapport aux fibrations, c'est le sens de la proposition 2.3.13.

Dans le cas de  $Ch(R)$  (la preuve s'applique aussi à  $Ch_{\geq 0}(R)$ ), le résultat découle du

**Lemme 2.3.12.** Soit  $P_*$  un complexe de chaînes cofibrant de  $Ch(R)$  qui est de plus acyclique. Alors  $P_*$  est un objet projectif dans la catégorie des complexes de chaînes (c'est à dire vérifie la propriété de relèvement par rapports à toutes les fibrations).

*Preuve du Lemme 2.3.12.* On commence par remarquer que  $P$  est contractile, c'est à dire que l'identité de  $P_*$  est homotope à 0. La preuve est un argument que l'on a déjà vu : soit  $P_{*+1} \oplus P_*$  le cocone de l'identité. C'est à dire le complexe donné par la somme de  $P_*$  et  $P_{*+1}$  et dont la différentielle est définie par  $d(w, x) = (-d(w) + x, d(x))$ . Ce complexe est contractile et on a la projection  $(w, x) \mapsto x$  qui est donc une fibration acyclique. Alors on dispose d'un relèvement

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & P_{*+1} \oplus P_* \\ \downarrow & \nearrow H & \downarrow \wr \\ P_* & \xlongequal{\quad} & P_* \end{array}$$

$P_*$  est cofibrant. L'application linéaire  $H$  s'écrit sous la forme  $H(x) = (h(x), x)$  par commutativité du diagramme, où  $h : P_* \rightarrow P_{*+1}$ . La condition que  $H$  est un morphisme de complexe donne que  $-dh(x) + x = h(d(x))$ , c'est à dire que  $h$  est une homotopie entre 0 et l'identité. On en déduit que l'on a une décomposition  $P_* = Z_* \oplus R_*$  où  $Z_*$  est le sous espace des cycles et la différentielle de  $P_*$  s'identifie avec un isomorphisme entre  $R_{*+1}$  et  $Z_*$ . Cette décomposition est donnée en prenant  $R_* = \text{Im}(h \circ d)$  par  $x \mapsto (dh(x), hd(x))$  : en effet la somme est directe car  $dh(x) = hd(y)$  implique  $0 = dhd(y) = d(y)$  et donc  $hd(y) = 0$  et elle engendre puisque  $x = dh(x) + hd(x)$  pour tout  $x$ ; de plus  $dhd(x) = dx$  montre la propriété énoncée sur la différentielle puisque  $Z_*$  est égal au sous-espace des bords  $d(P_*)$ , l'homologie étant nulle. Cette décomposition étant donnée, il devient facile de construire le relèvement. En effet, les morphismes de complexe de  $Z_* \oplus R_*$  dans un complexe quelconque  $A$  sont donnés par les collections de morphismes linéaires  $(\psi_n : R_n \rightarrow A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sans aucune condition. La bijection se faisant en définissant le morphisme de complexe sous la forme  $(d(s), r) \mapsto d\psi_{n+1}(s) + \psi_n(r)$  (en se rappelant que les cycles sont des bords). En particulier, on peut appliquer cette construction pour relever tout morphisme surjectif en un diagramme commutatif.  $\square$

En effet, ce lemme permet d'abord de remarquer que si  $A \xrightarrow{\sim} B$  est une cofibration qui est un quasi-isomorphisme, alors, en notant  $P$  le complexe quotient  $B/A$  (qui est donc cofibrant et acyclique parce qu'on a vu avant), le relevé dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & B \\ \wr \downarrow & \nearrow H & \downarrow \\ P & \xlongequal{\quad} & P \end{array}$$

$B \cong A \oplus P$  comme complexe de chaînes. Par suite, un relèvement dans tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \wr \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ B \cong A \oplus P & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \text{se ramène à un relèvement de} \quad \begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{f} & X \\ \wr \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ P & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \text{ce qui}$$

existe par le lemme 2.3.12 précédent. □

Les propriétés de factorisation découlent de ce que l'on appelle l'argument du petit objet. C'est une construction permettant de construire fonctoriellement des objets ayant des propriétés de relèvement par rapport à une famille raisonnable de flèches issus de "petits" objets. Avant de l'énoncer, on note une propriété clé de cette structure projective : les fibrations et fibrations acycliques sont exactement les morphismes de complexes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à une certaine famille dénombrable de morphismes de complexes.

**Proposition 2.3.13.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de complexes dans  $Ch(R)$  (resp.  $Ch_{\geq 0}(R)$ ).

- (1)  $f : X \rightarrow Y$  est une fibration si et seulement si il a la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes  $0 \rightarrow D^n(R)$  (resp. pour  $n \geq 1$ ) ;
- (2)  $f : X \rightarrow Y$  est une fibration acyclique si et seulement si il a la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes  $S^{n-1}(R) \rightarrow D^n(R)$  (resp. pour  $n \geq 1$ )

*Démonstration.* La preuve est simplement une petite chasse au diagramme degré par degré. La première remarque à faire est la suivante : un morphisme de complexe de  $D^n(R) \rightarrow Z_*$  est équivalent à la donnée d'un élément  $z \in Z_n$  en degré  $n$  (via  $r = r \cdot 1 \mapsto r \cdot z$  en degré  $n$  et  $r \mapsto r \cdot d(z) = d(r \cdot z)$  en degré  $n - 1$  et nécessairement 0 en tout autre degré). Il suit immédiatement que si  $p : X \rightarrow Y$  est un morphisme de complexe, il existe un relèvement dans tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0} & X \\ \wr \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ D^n(R) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

seulement si tout élément de  $y_n$  admet un antécédent par  $p$ , c'est à dire que  $p$  est surjective en degré  $n$ . Ainsi (1) est démontré. Pour (2), on remarque qu'un diagramme commutatif  $S^{n-1}(R) \xrightarrow{f} X$  est équivalent à la donnée d'une paire

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1}(R) & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ D^n(R) & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

$(x_{n-1}, y_n) \in X_{n-1} \times Y_n$  vérifiant  $p(x_{n-1}) = d(y_n)$  et  $d(x_{n-1}) = 0$  (autrement dit  $x_{n-1}$  est un cycle) (via  $f(r) = r \cdot x_{n-1}$  en degré  $n - 1$ , 0 sinon et  $g$  est déterminée par

$g(r) = r \cdot y_n$  comme ci-dessus). En vertu de la première remarque, un relèvement dans ce diagramme est équivalent à la donnée d'un élément  $x_n \in X_n$  tel que  $d(x_n) = x_{n-1}$  et  $p(x_n) = y_n$ . Montrons maintenant (2). Si  $p$  est une fibration acyclique<sup>30</sup>, alors son noyau  $\text{Ker}(p)$  est un complexe de chaînes qui a une homologie nulle en tout degré par la longue suite exacte d'une suite exacte courte en homologie (associée à  $\text{Ker}(p) \hookrightarrow X \twoheadrightarrow Y$ ). Par surjectivité, on peut trouver un élément  $\tilde{x}_n \in X_n$  tel que  $p(\tilde{x}_n) = y_n$ . Il suit que  $d(\tilde{x}_n) - x_{n-1} \in \text{Ker}(p)_{n-1}$ . C'est par ailleurs un cycle de  $\text{Ker}(p)$  puisque  $d(x_{n-1}) = 0$ . Ainsi il existe un élément  $w \in \text{Ker}(p)_n$  tel que  $d(w) = d(\tilde{x}_n) - x_{n-1}$ . On en déduit que l'élément  $x_n := \tilde{x}_n - w$  vérifie bien les conditions voulues :  $d(x_n) = x_{n-1}$  et  $p(x_n) = y_n$ . Il reste à voir la réciproque.

On suppose donc que  $p : X \rightarrow Y$  vérifie la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les diagrammes avec  $S^{n-1}(R) \hookrightarrow D^n(R)$  à gauche (où  $n \geq 1$  ou  $n \in \mathbb{Z}$  selon les cas). Il est immédiat que  $p$  est surjective sur les  $n$ -cycles car, pour tout cycle  $y_n$ , la paire  $(0, y_n)$  définit bien un diagramme commutatif et que le relèvement donne donc un antécédent de  $y_n$ . En passant au quotient, on obtient donc que  $H_n(p)$  est également surjective. Montrons que  $p$  elle-même est surjective : si  $y_n \in Y_n$ , comme  $d(y_n)$  est un cycle, par surjectivité pour  $n-1$ <sup>31</sup>, on obtient que  $d(y_n) = p(x_{n-1})$  avec  $x_{n-1}$  un cycle. C'est à dire que le couple  $(x_{n-1}, y_n)$  définit bien un diagramme. L'existence du relèvement donne donc un antécédent  $x_n$  de  $y_n$ . On a bien obtenu que  $p : X \rightarrow Y$  est une fibration. Pour montrer qu'elle est acyclique, il reste à voir que  $H_*(p)$  est injective. Supposons que  $p([x_n]) = 0 \in H_n(Y)$ . Alors  $p(x_n)$  est un bord, c'est à dire  $p(x_n) = d(y_{n+1})$  et la paire  $(x_n, y_{n+1})$  fournit encore un diagramme commutatif (associé à  $S^n(R) \rightarrow D^{n+1}(R)$ ) pour lequel on a donc un relèvement, en particulier un élément  $x_{n+1}$  tel que  $d(x_{n+1}) = x_n$ . Il suit que  $[x_n] = 0 \in H_n(X)$  et on a bien l'injectivité.  $\square$

Pour énoncer l'argument du petit objet on a besoin de la terminologie suivante :

**Définition 2.3.14.** Un objet  $A \in \mathbf{C}$  est dit  $\mathbb{N}$ -compact ou  $\mathbb{N}$ -petit (ou parfois séquentiellement petit) si, pour tout foncteur  $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{C}$ , on a que l'application canonique

$$\text{colim}_{\mathbb{N}} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, F(n)) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, \text{colim}(F(n)))$$

est une bijection.

Si on remplace  $\mathbb{N}$  par n'importe quel ordinal  $\kappa$ , on définit de même la notion de  $\kappa$ -compact ou  $\kappa$ -petit.

Enfin un objet  $A \in \mathbf{C}$  est appelé simplement compact si  $\text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, C_j) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, \text{colim}_{j \in J} C_j)$  est un isomorphisme pour toute colimite *filtrée*.

Un objet compact est a fortiori  $\kappa$ -compact.

*Exemple 2.3.15.* On peut vérifier qu'un  $R$ -module est  $\mathbb{N}$ -compact (et même compact) si et seulement il est de présentation finie.

Plus généralement un complexe  $X_* \in \text{Ch}(R)$  de  $R$ -modules est compact si c'est un complexe borné (c'est qu'il n'y a qu'un nombre fini de composantes non-nulles) de  $R$ -modules de présentation finie.

On explique maintenant une méthode pour construire des applications ayant la propriété de relèvement par rapport à une famille de morphismes.

30. on a vu qu'en particulier cela implique que  $p$  est surjectif même pour la structure de  $\text{Ch}_{\geq 0}(R)$

31. qui est automatique pour  $n-1 < 0$  dans le cas de  $\text{Ch}_{\geq 0}(R)$

Soit  $\mathcal{F}$  une famille de flèches  $(A_i \xrightarrow{\alpha_i} B_i)_{i \in \mathcal{F}}$  dans  $\mathbf{C}$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche de  $\mathbf{C}$ . On veut construire une factorisation naturelle de  $f$  au travers d'une flèche qui a la propriété de relèvement par rapport à toutes les applications de la famille  $\mathcal{F}$ . On procède comme suit. On introduit un nouvel ensemble

$$(5) \quad S^{\mathcal{F}}(f) := \left\{ \begin{array}{ccc} A_i & \longrightarrow & X \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow f \\ B_i & \longrightarrow & Y \end{array} \right\}$$

constitué de tous les diagrammes commutatifs dans  $\mathbf{C}$  dont les flèches verticales de gauche sont dans  $\mathcal{F}$  et celle de droite est  $f$ . Si  $d \in S^{\mathcal{F}}(f)$  est un objet de  $S^{\mathcal{F}}(f)$ , on notera<sup>32</sup> le diagramme correspondant sous la forme

$$\begin{array}{ccc} A_{i_d} & \xrightarrow{\phi_d} & X \\ \alpha_{i_d} \downarrow & & \downarrow f \\ B_{i_d} & \xrightarrow{\gamma_d} & Y \end{array}$$

À partir de ce (gros) ensemble  $S^{\mathcal{F}}(f)$  on construit l'objet  $R^1(f, \mathcal{F})$  comme le poussé-en-avant  $X \cup_{\coprod_{d \in S^{\mathcal{F}}(f)} A_{i_d}} \coprod_{d \in S^{\mathcal{F}}(f)} B_{i_d}$ . On a donc le diagramme commutatif suivant

$$(6) \quad \begin{array}{ccccc} \coprod_{d \in S^{\mathcal{F}}(f)} A_{i_d} & \xrightarrow{\coprod \phi_d} & X & & \\ \coprod \alpha_{i_d} \downarrow & & \downarrow & \searrow f & \\ \coprod_{d \in S^{\mathcal{F}}(f)} B_{i_d} & \longrightarrow & R^1(f, \mathcal{F}) & \xrightarrow{f_1} & Y \\ & & \searrow \coprod \gamma_d & & \end{array}$$

où  $f_1 : R^1(f, \mathcal{F}) \rightarrow Y$  est la flèche donnée par la propriété universelle du poussé-en-avant.

On itère alors la construction en posant  $R^2(f, \mathcal{F}) := R^1(f_1, \mathcal{F})$  et en notant  $f_2 : R^2(f, \mathcal{F}) = R^1(f_1, \mathcal{F}) \rightarrow Y$  la flèche canonique (obtenue par propriété du poussé en avant appliqué au diagramme obtenu à partir de  $S^{\mathcal{F}}(f_1)$ ). Par récurrence, plus généralement, on définit

$$(7) \quad R^n(f, \mathcal{F}) := R^1(f_{n-1}, \mathcal{F}) \text{ et on note } f_n : R^n(f, \mathcal{F}) \rightarrow Y \text{ la flèche canonique.}$$

Notons que l'on a, par définition du poussé en avant, des flèches canoniques  $X \rightarrow R^1(f, \mathcal{F})$ ,  $R^1(f, \mathcal{F}) \rightarrow R^2(f, \mathcal{F})$ , ...,  $R^{n-1}(f, \mathcal{F}) \rightarrow R^n(f, \mathcal{F})$  etc. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & R^1(f, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & R^n(f, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \dots \\ f \downarrow & & f_1 \downarrow & & & & f_n \downarrow & & \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & \dots & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & \dots \end{array}$$

<sup>32</sup>. cette écriture n'a pour but que de donner un nom aux flèches du diagramme, sauf  $f$  bien sur qui est la seule fixée

On note enfin

$$(8) \quad R^\infty(f, \mathcal{F}) := \operatorname{colim} R^n(f, \mathcal{F})$$

et  $f_\infty : R^\infty(f, \mathcal{F}) \rightarrow Y$  la flèche canonique induite par le diagramme précédent. On a donc une factorisation  $X \rightarrow R^\infty(f, \mathcal{F}) \xrightarrow{f_\infty} Y$  de  $f$  (qui se factorise au travers de chaque  $R^n(f, \mathcal{F})$ ).

*Remarque 2.3.16.* La construction a pour but de définir l'objet  $R^{n+1}(f)$  comme un objet muni d'une flèche issue de  $B_i$  pour tout carré commutatif avec  $f^{(n)}$  sur la verticale droite et  $A_i \rightarrow B_i$  à gauche. Cette flèche va être le relèvement dans le carré en passant à la colimite comme l'énonce le résultat suivant.

**Proposition 2.3.17 (Argument du petit objet de Quillen).** Supposons que pour tout  $i \in \mathcal{F}$ , l'objet  $A_i$  est  $\mathbb{N}$ -compact (définition 2.3.14). Alors  $f_\infty : R^\infty(f, \mathcal{F}) \rightarrow Y$  a la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes de  $\mathcal{F}$ .

Ce résultat se généralise par une preuve similaire au cas de tout ordinal  $\kappa > \mathbb{N}$  (ou  $R^\infty(f, \mathcal{F})$  doit être remplacé par une suite indicée par  $\kappa$  de poussés en avant).

*Démonstration.* Comme chaque  $A_i$  est petit, toute flèche  $p : A_i \rightarrow R^\infty(f, \mathcal{F})$  se factorise au travers d'un  $R^n(f, \mathcal{F})$ . Ainsi tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{p} & R^\infty(f, \mathcal{F}) \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow f_\infty \\ B_i & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

se factorise sous la forme

$$\begin{array}{ccccccc} A_i & \xrightarrow{p} & R^n(f, \mathcal{F}) & \longrightarrow & R^{n+1}(f, \mathcal{F}) & \longrightarrow & R^\infty(f, \mathcal{F}) \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow f_n & \nearrow \tilde{q} & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_\infty \\ B_i & \xrightarrow{q} & Y & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array}$$

L'existence du relèvement  $\tilde{q}$  provient de la définition de  $R^{n+1}(f, \mathcal{F})$ . En effet, le diagramme  $A_i \xrightarrow{p} R^n(f, \mathcal{F})$  est un objet de la catégorie  $S^{\mathcal{F}}(f_n)$  et donc on a

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{p} & R^n(f, \mathcal{F}) \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow f_n \\ B_i & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

bien une flèche  $B_i \rightarrow R^1(f_n, \mathcal{F}) = R^{n+1}(f, \mathcal{F})$  par construction du poussé-en-avant. Ceci nous fournit en particulier un relèvement pour  $R^\infty(f, \mathcal{F})$ .  $\square$

*Preuve de (MC5).* On fait le cas de  $Ch(R)$ , l'autre cas est complètement analogue. Montrons que tout morphisme de complexes  $f : X \rightarrow Y$  admet une factorisation fonctorielle  $f : X \rightarrow Z \xrightarrow{\sim} Y$ . Pour cela on choisit la classe  $\mathcal{F} = (S^{n-1}(R) \hookrightarrow D^n(R))_{n \in \mathbb{Z}}$ . L'argument du petit objet (proposition 2.3.17, les  $S^{n-1}(R)$  étant compacts) nous dit que l'on a une factorisation

$$f : X \longrightarrow R^\infty(f, \mathcal{F}) \xrightarrow{f_\infty} Y$$

telle que  $f_\infty$  a la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les flèches  $S^{n-1}(R) \rightarrow D^n(R)$  et donc c'est une fibration acyclique par la proposition 2.3.13. La première flèche est une cofibration car c'est une succession de coproduits et poussés en avant de cofibrations (puisque  $S^n(R) \rightarrow D^n(R)$  est une cofibration par la preuve

de la propriété (3) du théorème 2.3.3). Comme la construction des  $R^n(f, \mathcal{F})$  est fonctorielle en  $f : X \rightarrow Y$ , on en déduit sans difficulté que la factorisation obtenue est fonctorielle.

Montrons maintenant l'autre factorisation. On prend cette fois-ci  $\mathcal{F} = (0 \rightarrow D^n(R))_{n \in \mathbb{Z}}$  et l'argument du petit objet nous donne une factorisation

$$f : X \longrightarrow R^\infty(f, \mathcal{F}) \xrightarrow{f_\infty} Y$$

telle que  $f_\infty$  a la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les flèches  $0 \rightarrow D^n(R)$  et donc c'est une fibration par la proposition 2.3.13. La première flèche est maintenant une succession de poussés en avant de  $X$  le long de cofibrations acycliques. On en déduit que c'est encore une cofibration acyclique. La functorialité du remplacement découle encore de celle de la construction des  $R^n(f, \mathcal{F})$ .  $\square$

*Remarque 2.3.18.* La preuve montre que pour utiliser l'argument du petit objet, il suffit que les  $A_i$  soient  $\mathbb{N}$ -petits et même simplement petits par rapport à la famille des applications qu'on peut construire en prenant des poussés-en-avant et coproduits construits à partir des  $\alpha_i$ .

*Exercice 2.3.19.* On se place dans  $Ch(R)$  ou  $Ch_{\geq 0}(R)$  munis de la structure projective.

- (1) Démontrer que dans la structure de modèle projective, si  $X$  est cofibrant et  $f, g : X \rightarrow Y$ , alors  $f \stackrel{r}{\sim} g$  est équivalent à  $f$  et  $g$  sont homotopes au sens des complexes de chaînes :  $f - g = dh + hd$ .
- (2) Soit  $M$  un  $R$ -module vu comme un complexe de chaînes concentré en degré 0. Démontrer qu'un remplacement cofibrant de  $M$  dans  $Ch_{\geq 0}(R)$  est exactement une résolution projective de  $M$ .

*Exemple 2.3.20 (Cas des complexes bornés).* Il existe d'autres sous-catégories de complexes de chaînes intéressantes et naturelles. En particulier on peut considérer les sous-catégories (pleines<sup>33</sup>) suivantes<sup>34</sup> de  $Ch(R)$  :

- la catégorie  $Ch_b(R)$  des complexes *bornés* constituée des complexes  $C_*$  tel que  $C_i$  est non-nul en un nombre fini de degré seulement (autrement dit il existe  $n \leq m \in \mathbb{Z}$  tel que  $C_i = \{0\}$  si  $i > m$  ou  $i < n$ ) ;
- la catégorie  $Ch_+(R)$  des complexes *bornés inférieurement* constituée des complexes  $C_*$  tel qu'il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $C_i = \{0\}$  si  $i < n$  ;
- la catégorie  $Ch_-(R)$  des complexes *bornés supérieurement* constituée des complexes  $C_*$  tel qu'il existe  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $C_i = \{0\}$  si  $i > m$ .

Notons que ces sous-catégories sont stables par suspension et désuspension, c'est à dire par les foncteurs  $C \mapsto C[n]$  où  $C[n]_i = C_{n+i}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . (et la différentielle est  $(-1)^n d_C$  où  $d_C$  est la différentielle de  $C$ ). Ce n'est pas le cas de  $Ch_{\geq 0}(R)$  qui n'est stable que par suspension  $C \mapsto C[n]$  où  $n \geq 0$ .

La preuve du théorème 2.3.3 montre que la structure de modèle de  $Ch(R)$  se restreint à  $Ch_b(R)$ ,  $Ch_+(R)$  et  $Ch_-(R)$  de manière suivante :

33. c'est à dire qu'on restreint les objets, mais pas les morphismes entre objets conservés

34. On pourra noter que via l'équivalence entre complexes de chaînes et cochaînes, on a que  $Ch_b(R)$  est équivalente à celle des complexes de *cochaînes* bornés,  $Ch_+(R)$  est équivalente à celle de complexes de *cochaînes* bornés supérieurement et  $Ch_-(R)$  est équivalente à celle de complexes de *cochaînes* bornés inférieurement

*Corollaire 2.3.21.* Les structures projective et injectives font de  $Ch_+(R)$ ,  $Ch_b(R)$  et  $Ch_-(R)$  des catégories de modèle à (co)limites finies<sup>35</sup> et factorisations non-fonctorielles. De plus

- (1) Pour la structure projective, les cofibrations  $Ch_+(R)$  sont exactement les morphismes de complexes injectifs en tout degré, dont le conoyau est un complexe de modules projectifs ;
- (2) pour la structure injective, les fibrations  $Ch_-(R)$  sont exactement les morphismes de complexes surjectifs en tout degré, dont le noyau est un complexe de modules injectifs.
- (3) La proposition 2.3.13 reste vraie pour la structure projective et les structures de modèle sont cofibrement engendrées (cf. Définition 2.3.26).

*Ébauche de preuve.* La preuve de la proposition 2.3.13 (avec  $n$  décrivant  $\mathbb{Z}$ ) s'applique *verbatim* aux catégories  $Ch_b(R)$ ,  $Ch_+(R)$ ,  $Ch_-(R)$ . Les affirmations (1) (et respectivement (2)) sur les (co)fibrations découlent immédiatement des conditions (3) du théorème 2.3.3 (resp. 2.3.7) et du fait que les objets dans les catégories concernées sont nécessairement bornés inférieurement (resp. supérieurement).

La seule subtilité pour appliquer directement la preuve du théorème 2.3.3 est dans l'application de l'argument du petit objet pour garantir l'existence des factorisations dans les sous-catégories concernées. Une fois fixé un morphisme de complexes  $f : X \rightarrow Y$  dans  $Ch_b(R)$ .

On est alors ramené, dans l'argument du petit objet, à ne regarder que des diagrammes commutatifs où les flèches verticales de gauche  $0 \rightarrow D^i(R)$  (resp.  $S^{i-1}(R) \rightarrow D^i(R)$ ) sont restreintes à  $i \in [n, m]$  (resp.  $[n, m + 1]$ ) ce qui garantit que la factorisation se fait dans  $Ch_b(R)$ . Le même argument s'applique pour les autres catégories. □

Notons que par définition des colimites, on a un quasi-isomorphisme  $C_{b,f} \xrightarrow{\sim} C_f$  où  $C_{b,f}$ ,  $C_f$  sont les factorisations induites par l'argument du petit objet dans le cas borné et l'autre dans le cas non-borné. De même, un remplacement (co)fibrant calculé dans la catégorie bornée est encore (co)fibrant dans la catégorie bornée.

Ceci permet en fait en pratique de transférer essentiellement tous les résultats et calculs que l'on fait de manière non-bornée au cas borné et de ne pas se soucier de cette catégorie de modèle "non-bornée" mais de se contenter d'utiliser la propriété (3) des Théorèmes 2.3.3, 2.3.7 pour identifier des (co)fibrations et de l'existence de remplacement borné (resp. supérieurement, inférieurement) pour les complexes bornés (resp. supérieurement, inférieurement).

## Catégories de modèles cofibrement engendrées

Les structures de modèles projectives font partie d'un type de structure très courant de catégorie de modèle, pour lesquelles l'argument du petit objet permet de construire les factorisations. Ces structures sont caractérisées par le fait que les fibrations et cofibrations acycliques sont caractérisées par le fait qu'elles ont la propriété de relèvement à droite par rapport à une famille "petite" de morphismes, cf

<sup>35.</sup> c'est à dire que (MC1) doit être remplacé par le fait que la catégorie a toutes les (co)limites finies

la proposition 2.3.13. On peut remarquer que les fibrations de Serre ont été définies similairement. Cette propriété et l'argument du petit objet ont plein de conséquences agréables car elles donnent non seulement un moyen efficace de construire des structures de modèles mais aussi qu'elles permettent de construire et étudier leurs (co)limites homotopiques, cf Remarque 2.5.15. Une telle catégorie de modèle est dite cofibrement engendrée. Avant de donner la définition précise, nous avons besoin d'introduire encore un peu de terminologie...

La définition suivante est la généralisation, dans toute catégorie, de la notion de complexe cellulaire relatif dans les espaces topologiques. Comme d'habitude la notion topologique de recollement est remplacée par celle de poussé-en-avant.

**Définition 2.3.22** (Morphisme cellulaire relatif). Soit  $\mathcal{F} := (A_i \xrightarrow{\alpha_i} B_i)_{i \in I}$  une famille fixée de morphismes de  $\mathbf{C}$ . Un complexe (ou morphisme)  $\mathcal{F}$ -cellulaire relatif est un morphisme  $X \rightarrow Y$  où  $Y$  est une colimite  $\text{colim}_{s \in \kappa} X_s$  où  $\kappa$  est un ordinal<sup>36</sup> et  $X_{s+1}$  est obtenu comme un poussé en avant de la forme

$$\begin{array}{ccc} A_{i_s} & \longrightarrow & X_s \\ \alpha_{i_s} \downarrow & & \downarrow \\ B_{i_s} & \xrightarrow{g} & X_{s+1} \end{array}$$

On notera  $\mathcal{F}\text{-Cell}$  la classe des morphismes  $\mathcal{F}$ -cellulaires relatifs.

Un *complexe  $\mathcal{F}$ -cellulaire* est un objet  $Y$  tel que  $0 \rightarrow Y$  est  $\mathcal{F}$ -cellulaire relatif.

Les isomorphismes sont des complexes  $\mathcal{F}$ -cellulaires relatifs (correspondant à l'ordinal trivial).

*Remarque 2.3.23.* Les complexes cellulaires relatifs, correspondent exactement dans **Top** à ceux associés à la famille  $(\partial I^n \hookrightarrow I^n)_{n \geq 0}$  de la définition précédente. La définition peut s'interpréter comme un recollement d'une famille d'objets de la forme  $B_i$  sur  $X$  le long de  $A_i$  (ou de son image dans  $X$ ).

On considère encore une famille  $\mathcal{F} := (A_i \xrightarrow{\alpha_i} B_i)_{i \in I}$ .

**Définition 2.3.24** (Objets  $\mathcal{F}$ -injectifs et  $\mathcal{F}$ -cofibrants). Une flèche  $f : X \rightarrow Y$  est  $\mathcal{F}$ -injective si elle a la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes de  $\mathcal{F}$ . On notera  $\mathcal{F}\text{-Inj}$  la classe des morphismes  $\mathcal{F}$ -injectifs.

Une flèche  $g : A \rightarrow B$  est dite  $\mathcal{F}$ -cofibrante si elle a la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les flèches  $\mathcal{F}$ -injectives. On notera  $\mathcal{F}\text{-Cof}$  la classe des morphismes  $\mathcal{F}$ -cofibrants.

*Remarque 2.3.25.* On définit dualement des notions de  $\mathcal{F}$ -projectifs et  $\mathcal{F}$ -fibrations. On peut remarquer alors que  $\mathcal{F}\text{-Cof} = (\mathcal{F}\text{-Inj})\text{-Proj}$ .

L'idée sous-jacente à la définition précédente est que les flèches  $\mathcal{F}$ -injectives sont précisément celles que l'on souhaite être les fibrations ou fibrations acyliques (comme dans la proposition 2.3.13). Les  $\mathcal{F}$ -cofibrations seront alors, par définition, ce que doivent être les cofibrations acyliques ou cofibrations dans une catégorie de modèle.

Ceci est articulé précisément dans la définition suivante.

<sup>36</sup>. De manière générale, c'est donc une suite transfinie de poussés-en-avant. On peut se contenter de regarder que les cas de suite usuelle, c'est à dire pour  $\kappa = \mathbb{N}$  ou un ensemble fini  $\{1, \dots, n\}$ , pour comprendre la théorie générale.

**Définition 2.3.26.** Une catégorie de modèle  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  est *cofibrement engendrée* si il existe des ensembles de morphismes  $\mathcal{I} := (A_i \xrightarrow{\alpha_i} B_i)_{i \in I}$  et  $\mathcal{J} := (A'_j \xrightarrow{\beta_j} B'_j)_{j \in J}$  tels que

- (1) les fibrations acycliques sont exactement les  $\mathcal{I}$ -injectives,
- (2) les fibrations sont exactement les  $\mathcal{J}$ -injectives,
- (3) Les domaines des flèches  $\alpha_i$  de  $\mathcal{I}$  sont petits par rapport à la classe  $\mathcal{I} - Cell$ ,
- (4) Les domaines des flèches  $\beta_j$  de  $\mathcal{J}$  sont petits par rapport à la classe  $\mathcal{J} - Cell$ .

Les deux dernières hypothèses techniques sont vérifiées si les domaines sont compacts (et c'est souvent comme ça qu'on le vérifie). Le rôle de ces hypothèses est de garantir que certaines constructions par colimites se comportent bien (comme l'argument du petit objet) dans ces catégories de modèles et de pouvoir caractériser les cofibrations et cofibrations acycliques facilement, voir la proposition 2.3.29.

*Remarque 2.3.27.* Il suit de la définition que les flèches de  $\mathcal{I}$  sont des cofibrations et celles de  $\mathcal{J}$  des cofibrations acycliques. On les appelle respectivement *cofibrations génératrices* et *cofibrations acycliques génératrices*. La définition et la proposition 2.3.29 impliquent de fait que toute la structure des fibrations, cofibrations et les variantes acycliques sont déterminées par les ensembles  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  par propriétés de relèvement successives. Il suit alors aussi que les équivalences faibles sont déterminées par elles aussi d'après le Corollaire 2.1.12.

*Exemple 2.3.28.* • On a vu (Proposition 2.3.13 et Théorème 2.3.3) que les structures de modèles projectives forment une structure de modèles cofibrement engendrés.

- La structure de Quillen sur les espaces topologiques est aussi une structure de modèle cofibrement engendrée (cf la feuille de TD 3).
- La structure de modèle de Strøm n'en est pas une en revanche.

Un des avantages d'avoir une structure de modèle cofibrement engendrée est que l'on peut caractériser facilement les cofibrations à partir de la famille génératrice

**Proposition 2.3.29.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle cofibrement engendrée.

- (1) Les cofibrations sont des rétractes de morphismes  $\mathcal{I}$ -cellulaires,
- (2) les cofibrations acycliques sont des rétractes de morphismes  $\mathcal{J}$ -cellulaires
- (3) les cofibrations sont exactement les flèches  $\mathcal{I}$ -cofibrantes, c'est à dire  $\mathcal{C} = \mathcal{I} - Cof$ ,
- (4) Les cofibrations acycliques sont exactement les flèches  $\mathcal{J}$ -cofibrantes, c'est à dire  $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} = \mathcal{J} - Cof$ .

On en arrive au théorème important de cette sous-partie.

**Théorème 2.3.30.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie complète et cocomplète,  $\mathcal{W}$  une classe de morphismes et  $\mathcal{I}, \mathcal{J}$  deux ensembles de morphismes de  $\mathbf{C}$ . Alors il existe une structure de catégorie de modèle cofibrement engendrée sur  $\mathbf{C}$ , avec  $\mathcal{W}$  comme équivalences faibles,  $\mathcal{I}$  (resp.  $\mathcal{J}$ ) comme cofibrations (resp. cofibrations acycliques) génératrices, si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (1) La classe  $\mathcal{W}$  vérifie l'axiome (MC2) et est stable par rétracte.
- (2) Les domaines des flèches de  $\mathcal{I}$  sont petits par rapport à  $\mathcal{I} - Cell$ ,
- (3) Les domaines des flèches de  $\mathcal{J}$  sont petits par rapport à  $\mathcal{J} - Cell$ .
- (4)  $\mathcal{I} - Cell \subset \mathcal{W} \cap \mathcal{I} - Cof$ .

- (5)  $\mathcal{F}\text{-Inj} \subset \mathcal{W} \cap \mathcal{F}\text{-Inj}$ .  
 (6) Soit  $\mathcal{F}\text{-Cof} \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{F}\text{-Cof}$  soit  $\mathcal{F}\text{-Inj} \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{F}\text{-Inj}$ .

Les propriétés 2 et 3 sont vérifiées si les objets sont compacts. Les propriétés 4) et 5) énoncent que ce qui doit être une (co)fibration acyclique en est bien une. La dernière permet de vérifier l'axiome de recollement.

*Démonstration.* On définit les fibrations comme étant celles qui sont  $\mathcal{F}$ -injectives et les cofibrations comme étant celles qui sont dans  $\mathcal{F}\text{-Cof}$ .

Que les conditions soient nécessaires découle immédiatement de la définition d'une catégorie de modèle et d'une catégorie de modèle cofibrement engendrée. Les conditions (MC1) et (MC2) découlent de l'énoncé et de 1) tout comme la stabilité de  $\mathcal{W}$  par rétracte. Notons que (MC2) assure que  $\mathcal{W}$  est une sous-catégorie. Les (co)fibrations étant définies comme toutes les applications vérifiant certaines propriétés de relèvement, la stabilité par rétracte se démontre comme dans le cas des cofibrations pour la structure projective. C'est donc aussi le cas pour les versions acycliques en combinant les résultats.

Notons d'abord que l'argument du petit objet (tel que nous l'avons démontré) donne des factorisations de tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  sous la forme d'un morphisme  $\mathcal{F}$ -cellulaire suivi d'un morphisme  $\mathcal{F}$ -injectif et de même avec  $\mathcal{F}$  à la place  $\mathcal{F}$ .

Les conditions 5) et 4) garantissent que les morphismes de  $\mathcal{F}\text{-Inj}$  sont des fibrations acycliques, que ceux de  $\mathcal{F}\text{-Cell}$  sont des cofibrations acycliques. On déduit de ce fait et des factorisations précédentes que  $\mathcal{F}\text{-Cof}$  est bien inclus dans les cofibrations acycliques. En effet, un tel morphisme se factorise sous la forme  $f = p \circ q$  où  $q$  est  $\mathcal{F}$ -cellulaire donc une cofibration acyclique. Comme  $f$  a la propriété de relèvement par rapport à  $p$  :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & C \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array}$$

$X \xlongequal{\quad} X \xlongequal{\quad} X$  et donc  $f$  est bien une cofibration acyclique.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xlongequal{\quad} & X & \xlongequal{\quad} & X \\ f \downarrow & & \downarrow q & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{h} & C & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

Les factorisations factorielles données par l'argument du petit objet nous donne donc bien l'axiome (MC5) (car  $\mathcal{F}\text{-Cell} \subset \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{F}\text{-Inj} = \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ ,  $\mathcal{F}\text{-Cell} \subset \mathcal{W} \cap \mathcal{C}$  et  $\mathcal{F}\text{-Inj} = \mathcal{F}$ ).

Il nous faut alors encore vérifier l'axiome (MC4). On utilise (6). Supposons que l'on a  $\mathcal{F}\text{-Cof} \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{F}\text{-Cof}$ . Alors les cofibrations acycliques ont bien la propriété de relèvement par rapport à toutes les fibrations ce qui est la moitié de l'axiome. Si maintenant  $f : X \rightarrow Y$  est une fibration acyclique, on doit vérifier qu'il a la propriété de relèvement par rapport à toutes les cofibrations. Par définition de ces dernières, il suffit de voir qu'il a la propriété de relèvement par rapport à celles de  $\mathcal{F}$ . On factorise alors  $f = p \circ q$  avec  $q$  une cofibration et  $p$  dans  $\mathcal{F}$ -injective d'après l'argument du petit objet ; en particulier  $p \in \mathcal{W}$  par (5) et de (MC2) on déduit que  $q \in \mathcal{W}$ . En particulier,  $f$  a la propriété de relèvement par rapport à  $q$  et comme

précédemment, on obtient que  $f$  est un rétracte de  $p$  donc dans  $\mathcal{S}Inj$  comme souhaité. L'autre cas de figure se fait dualement.  $\square$

## 2.4. FONCTEURS DE QUILLEN, FONCTEURS DÉRIVÉS

On va étudier dans cette partie des foncteurs de Quillen qui permettent de comparer des catégories de modèles et en particulier leurs catégories homotopiques. Cela va nous donner également un sens précis pour définir des "foncteurs à équivalence faible près".

**Définition 2.4.1** (*Foncteurs de Quillen*). Soit  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  deux catégories de modèle.

- (1) Un foncteur  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  est *de Quillen à gauche* si c'est un adjoint à gauche<sup>37</sup> qui préserve les cofibrations et cofibrations acycliques<sup>38</sup>.
- (2) Un foncteur  $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  est *de Quillen à droite* si c'est un adjoint à droite qui préserve les fibrations et fibrations acycliques.

*Remarque 2.4.2.* Un foncteur de *Quillen à gauche commute avec les colimites* (comme tout adjoint à gauche) et un foncteur de *Quillen à droite commute avec les limites* (comme tout adjoint à droite).

Par ailleurs, nos catégories étant supposées (co)complètes, cette dernière condition est équivalente à celle d'avoir un adjoint si nos catégories sont d'une taille "raisonnable" (voir la feuille de TD 3 pour plus de détails). On peut noter aussi que cette notion ressemble donc à celle d'être exact à droite et à gauche dans une catégorie abélienne.

Un foncteur qui préserve les colimites préserve l'objet initial  $\emptyset$  alors qu'un foncteur qui préserve les limites préserve l'objet terminal  $\{*\}$  (*exercice*). On en déduit alors que

- (1) Un foncteur de Quillen à gauche préserve les objets cofibrants.
- (2) Un foncteur de Quillen à droite préserve les objets fibrants.

**Définition 2.4.3** (*Adjonction de Quillen*). Une adjonction de Quillen est une adjonction  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : R$  entre catégories de modèle telle que l'adjoint à gauche  $F$  est de Quillen à gauche et l'adjoint à droite est de Quillen à droite.

Les adjonctions de Quillen sont les foncteurs idoines pour comparer des structures de modèles.

Le lemme suivant nous dit qu'il suffit de vérifier qu'un seul des foncteurs de l'adjonction est de Quillen.

**Lemme 2.4.4.** Soit  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : R$  une adjonction entre catégories de modèles. Alors  $F$  est de Quillen à gauche si et seulement si  $R$  est de Quillen à droite.

*Démonstration.* Supposons que  $F$  soit de Quillen à gauche. Montrons que  $R$  est de Quillen à droite. Il faut montrer que si  $f : P \twoheadrightarrow Q$  est une fibration alors  $R(f) : R(P) \rightarrow R(Q)$  en est une, ce qui revient, d'après la proposition 2.1.11 à

37. autrement dit il existe un foncteur  $R : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$  tel que la paire  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : R$  soit une adjonction : c'est à dire la donnée d'un isomorphisme naturel  $\Phi : \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, R(Y))$

38. c'est à dire qui envoie une cofibration sur une cofibration et une cofibration acyclique sur une cofibration acyclique

montrer que pour tout diagramme commutatif  $A \longrightarrow R(P)$  la flèche pointillée rendant le diagramme commutatif existe. Mais comme  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : R$  est une adjonction, le diagramme précédent (et l'existence de la flèche pointillée) est équivalent au diagramme

$$\begin{array}{ccc} L(A) & \longrightarrow & P \\ \downarrow L(i) & \nearrow & \downarrow f \\ L(C) & \longrightarrow & Q \end{array}$$

puisque  $L(i)$  est une cofibration acyclique étant donné que  $L$  est de Quillen à gauche. Le cas d'une fibration acyclique ou la réciproque se démontre de même.  $\square$

*Exemple 2.4.5.* Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme d'algèbres commutatives. Munissons  $Ch(A)$  et  $Ch(B)$  de leur structure de modèle projective. Alors le foncteur  $B \otimes_A : Ch(A) \rightarrow Ch(B)$  est de Quillen à gauche. Son adjoint à droite est donné par le foncteur qui à un (complexe de)  $B$ -module associe le même (complexe) mais muni de la structure de  $A$ -module donnée par  $a \cdot m = f(a) \cdot m$ .

Un autre exemple standard est donné sous forme d'exercice :

*Exercice 2.4.6.* Soit  $\mathbf{Top}_*$  la catégorie des espaces topologiques pointés et  $U : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}$  le foncteur oublié.

- (1) Démontrer que c'est un adjoint à droite.
- (2) On munit  $\mathbf{Top}$  de la structure de modèle de Quillen (Exemple 2.1.13). Trouver une structure de modèle sur  $\mathbf{Top}_*$  telle que  $U$  soit de Quillen à droite.
- (3) Même question que la question précédente en munissant  $\mathbf{Top}$  de la structure de modèle de Strøm (Exemple 2.1.14).
- (4) A-t-on une généralisation des résultats précédents pour toute catégorie de modèle  $\mathbf{C}$  ?

Le lemme suivant sera très pratique pour garantir que certains foncteurs passent aux catégories homotopiques.

**Lemme 2.4.7** (de Brown). Soit  $H : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ , un foncteur entre deux catégories de modèles.

- (1) Si  $H$  envoie les cofibrations acycliques entre objets cofibrants sur des équivalences faibles, alors  $H$  envoie toute équivalence faible entre objets cofibrants sur une équivalence faible.
- (2) Si  $H$  envoie les fibrations acycliques entre objets fibrants sur des équivalences faibles, alors  $H$  envoie toute équivalence faible entre objets fibrants sur une équivalence faible.

*Remarque 2.4.8.* Un foncteur de Quillen à gauche (resp. à droite) vérifie les hypothèses du 1) (resp. 2)) et envoie donc toute équivalence faible entre objets cofibrants (resp. fibrants) sur des équivalences faibles.

*Preuve du Lemme de Brown.* Les deux preuves sont duales et on ne prouve donc que la première assertion. L'idée est de factoriser une équivalence faible  $f : A \rightarrow B$  entre objets cofibrants de manière intelligente. Le fait que  $A$  et  $B$  soient cofibrants nous dit que les morphismes canoniques  $i_A : A \rightarrow A \amalg B$  et  $i_B : B \rightarrow A \amalg B$  sont des cofibrations (Lemme 2.2.15) et on a par ailleurs que  $H$  est la composée  $A \xrightarrow{i_A} A \amalg B \xrightarrow{f \amalg id} B$ . On note  $A \amalg B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{p} B$  une factorisation de  $f \amalg id$ . Comme  $f$  est une équivalence faible, il suit de la première factorisation et de (MC2) que  $j \circ i_A$  est une équivalence faible, et une cofibration entre objets cofibrants (puisque  $A \amalg B$  l'est et que  $j$  est une cofibration alors  $C$  est bien cofibrant). Ainsi  $H(j \circ i_A)$  est une équivalence faible. De même  $H(j \circ i_B) \in \mathcal{W}$ . Mais  $H(f) = H(p \circ j \circ i_A) = H(p) \circ H(j \circ i_A)$  et il suffit de vérifier que  $H(p)$  est une équivalence faible. Or ceci découle encore de (MC2) car  $H(p) \circ H(j \circ i_B) = H(p \circ j \circ i_B) = H(id_B)$  qui est une équivalence faible ainsi que  $H(j \circ i_B)$ .  $\square$

Donnons une notion de foncteur dérivé générale pour les catégories avec équivalence faible : c'est à dire une catégorie  $\mathbf{C}$  munie d'une classe de morphismes stable par composition  $\mathcal{W}$  (appelées les équivalences faibles). Nous notons encore, comme pour les catégories de modèles qui seront notre principal exemple,  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}) : \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$  sa localisée par rapport à  $\mathcal{W}$  (Définition 2.2.1). On notera  $\pi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}] = \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  le foncteur canonique.

**Définition 2.4.9** (*foncteurs dérivés*). Soit  $(\mathbf{C}, \mathcal{W})$  une catégorie avec équivalence faible et  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  un foncteur.

- (1) Un foncteur *dérivé à gauche* de  $F$  est la donnée d'un foncteur  $\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{D}$  et d'une transformation naturelle<sup>39</sup>  $\mathbb{L}\tau_F : \mathbb{L}F \circ \pi \rightarrow F$  qui vérifient la propriété universelle suivante : pour toute paire  $(G, \alpha)$  où  $G : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{D}$  est un foncteur et  $\alpha : G \circ \pi \rightarrow F$  est une transformation naturelle, il existe une *unique* transformation naturelle  $\theta_F^G : G \rightarrow \mathbb{L}F$  qui factorise  $\alpha$ , c'est à dire que

$$\alpha = G \circ \pi \xrightarrow{\theta_F^G \circ \pi} \mathbb{L}F \circ \pi \xrightarrow{\mathbb{L}\tau_F} F.$$

- (2) Un foncteur *dérivé à droite* de  $F$  est la donnée d'un foncteur  $\mathbb{R}F : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{D}$  et d'une transformation naturelle<sup>40</sup>  $\mathbb{R}\tau_F : F \rightarrow \mathbb{R}F \circ \pi$  qui vérifient la propriété universelle suivante : pour toute paire  $(G, \beta)$  où  $G : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{D}$  est un foncteur et  $\beta : G \circ \pi \rightarrow F$  est une transformation naturelle, il existe

39. c'est à dire, en suivant les notations de 2-catégories, qu'on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} \\ \pi \searrow & \uparrow \mathbb{L}\tau_F & \nearrow \mathbb{L}F \\ & \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) & \end{array}$$

contrôlé par la transformation naturelle  $\mathbb{L}\tau_F$

40. c'est à dire, en suivant les notations de 2-catégories, qu'on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} \\ \pi \searrow & \downarrow \mathbb{R}\tau_F & \nearrow \mathbb{R}F \\ & \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) & \end{array}$$

contrôlé par la transformation naturelle  $\mathbb{R}\tau_F$

une *unique* transformation naturelle  $\theta_G^F : \mathbb{R}F \rightarrow G$  qui factorise  $\beta$ , c'est à dire que

$$\beta = \mathbb{R}F \circ \pi \xrightarrow{\theta_G^F \circ \pi} G \circ \pi \xrightarrow{\beta} F.$$

**Lemme 2.4.10.** Un foncteur dérivé à gauche (resp. à droite), si il existe, est unique à unique isomorphisme naturel près.

*Démonstration.* C'est une conséquence habituelle de la propriété universelle, voir la feuille de TD 3 également.  $\square$

*Remarque 2.4.11.* Un foncteur dérivé à gauche est la meilleure approximation par la gauche de  $F$ . C'est par définition, ce qui s'appelle une extension de Kan à droite du foncteur canonique  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ ; voir la feuille de TD 3.

Lorsque  $\mathbf{C}$  est une catégorie de modèle, on dispose du critère suivant pratique pour vérifier l'existence des foncteurs dérivés.

**Proposition 2.4.12.** Soit  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  où  $\mathbf{C}$  est de modèle.

- (1) Si  $F$  envoie les cofibrations acycliques entre objets cofibrants sur des isomorphismes, alors son foncteur dérivé à gauche existe.
- (2) Si  $F$  envoie les fibrations acycliques entre objets fibrants sur des isomorphismes, alors son foncteur dérivé à droite existe.

*Démonstration.* Les deux preuves sont duales. Montrons seulement la première affirmation. Rappelons que l'on a une équivalence  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \cong \mathbf{Ho}(\mathbf{C}_c)$  données par le foncteur de remplacement cofibrant  $X \mapsto L(X)$  (voir le Lemme 2.2.9). On définit alors le foncteur  $\mathbb{L}F$  comme étant donné par  $X \mapsto F(L(X))$  et on a bien que l'équivalence faible  $L(X) \xrightarrow{\sim} X$  induit une flèche naturelle  $F(L(X)) \rightarrow F(X)$  qui définit une transformation naturelle  $\mathbb{L}\tau_F$ . Il reste à vérifier que  $\mathbb{L}F$  est bien définie. Par le lemme de Brown<sup>41</sup>,  $F$  envoie les équivalences faibles entre objets cofibrants sur des isomorphismes. Ainsi, le foncteur  $Y \mapsto F(Y)$  se factorise bien au travers de  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}_c)$  ce qui termine la construction de  $\mathbb{L}F$ .

Il reste à voir la propriété universelle. Soit  $(G, \beta)$  comme dans l'énoncé; c'est à dire  $G : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow F$  est un foncteur et  $\alpha : G \circ \pi \rightarrow F$  est une transformation naturelle. Comme  $L(X) \xrightarrow{\sim} X$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ , on a que  $G(L(X)) \xrightarrow{\cong} G(X)$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}$ . Par suite, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & F(X) \\ \cong \uparrow & \searrow & \uparrow \mathbb{L}\tau_{FX} \\ G(L(X)) & \xrightarrow{\alpha_{L(X)}} & F(L(X)), \end{array}$$

$\mathbb{L}\tau_F$  et d'autre part que toute factorisation (symbolisée par la flèche en pointillé rendant le triangle supérieur commutatif) est donnée par celle-ci (puisque, le carré commutant, le triangle inférieur commute alors nécessairement aussi).  $\square$

*Remarque 2.4.13.* Il découle de la preuve de la proposition 2.4.12.(1), que si  $A$  est cofibrant, alors,  $\mathbb{L}\tau_F : \mathbb{L}F(A) \rightarrow F(A)$  est un isomorphisme. De même, dans le cas (2), si  $Y$  est fibrant alors  $\mathbb{R}\tau_F : F(Y) \rightarrow \mathbb{R}F(Y)$  est un isomorphisme.

41. où on met la structure de modèle triviale sur  $\mathbf{D}$ , c'est à dire celle dont les équivalences faibles sont les isomorphismes, et les (co)fibrations des morphismes quelconques

Lorsque la catégorie but  $\mathbf{D}$  est aussi une catégorie de modèle (ou même simplement une catégorie avec équivalence faible), la notion de foncteur dérivé à valeur dans  $\mathbf{D}$  n'est plus forcément celle que l'on souhaite ; on peut souvent en pratique s'intéresser aux foncteurs dérivés à équivalence faible près dans  $\mathbf{D}$ . Cette notion est précisément la suivante :

**Définition 2.4.14** (*foncteurs dérivés totaux*). Soit  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  un foncteur entre catégories de modèles (ou avec équivalences faibles).

- (1) Un foncteur *dérivé total à gauche* de  $F$  est la donnée d'un foncteur dérivé à gauche du foncteur composé  $\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D} \xrightarrow{\pi} \mathbf{Ho}(\mathbf{D})$ .
- (2) Un foncteur *dérivé total à droite* de  $F$  est la donnée d'un foncteur dérivé à droite du foncteur composé  $\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D} \xrightarrow{\pi} \mathbf{Ho}(\mathbf{D})$ .

*Notation 2.4.15.* On notera (abusivement) en général  $\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{D})$  et  $\mathbb{R}F : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{D})$  les foncteurs dérivés totaux gauche et droite de  $F$ . C'est à dire que si nous regardons un foncteur entre catégories de modèles, par défaut, nous ne considérerons que des foncteurs dérivés totaux, sauf mention explicite du contraire. Si on doit distinguer entre les deux notions, nous utiliserons la notation  $\mathbb{L}^{tot}F$  et  $\mathbb{R}^{tot}F$  pour les foncteurs dérivés totaux

Lorsque  $\mathbf{C}$  est une catégorie de modèle, on dispose du critère suivant pratique pour vérifier l'existence des foncteurs dérivés.

**Proposition 2.4.16.** Soit  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  où  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  sont de modèle.

- (1) Si  $F$  envoie les cofibrations acycliques entre objets cofibrants sur des équivalences faibles, alors son foncteur dérivé total à gauche existe.
- (2) Si  $F$  envoie les fibrations acycliques entre objets fibrants sur des équivalences faibles, alors son foncteur dérivé total à droite existe.
- (3) En particulier si  $F$  est de Quillen à gauche, son foncteur dérivé total à gauche existe et si  $G$  est de Quillen à droite, alors son foncteur dérivé total à droite existe.

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la proposition 2.4.12 au foncteur composé  $\pi \circ F$  puisque  $\pi$  envoie des équivalences faibles en isomorphismes. La dernière remarque découle de la remarque 2.4.8.  $\square$

*Remarque 2.4.17.* Il découle de la remarque 2.4.13 que, dans le cas (1), si  $A$  est cofibrant, et, dans le cas (2), si  $Y$  est fibrant, alors les applications naturelles  $\mathbb{L}\tau_F : \mathbb{L}F(A) \rightarrow \pi \circ F(A)$  ou  $\mathbb{R}\tau_F : \pi \circ F(Y) \rightarrow \mathbb{R}F(Y)$  sont des isomorphismes dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{D})$ .

*Exercice 2.4.18.* Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $M$  un  $R$ -module (on pourra choisir des catégories de modèles adéquats dans les différents cas).

- (1) Démontrer l'existence et identifier les foncteurs dérivés totaux de  $M \otimes_R - : Ch_{\geq 0}(R) \rightarrow Ch_{\geq 0}(R)$ .
- (2) Démontrer l'existence et identifier les foncteurs dérivés totaux de  $\text{Hom}_R(-, M) : Ch_{\geq 0}(R)^{op} \rightarrow Ch_{\geq 0}(R)$ .
- (3) Que se passe-t-il si on remplace  $Ch_{\geq 0}(R)$  par  $Ch(R)$  ?
- (4) Les foncteurs  $- \otimes - : Ch_{\geq 0}(R) \times Ch_{\geq 0}(R) \rightarrow Ch_{\geq 0}(R)$  et  $\text{Hom}(-, -) : Ch_{\geq 0}(R)^{op} \times Ch_{\geq 0}(R) \rightarrow Ch_{\geq 0}(R)$  ont-ils des foncteurs dérivés totaux ?

On va maintenant vérifier qu'une adjonction de Quillen induit une adjonction au niveau des catégories homotopiques.

D'après la remarque 2.4.8 et la proposition 2.4.16, les foncteurs dérivés totaux à gauche (resp. à droite) de foncteurs de Quillen à gauche (resp. à droite) existent toujours.

**Théorème 2.4.19.** Soit  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : R$  une adjonction de Quillen. Les foncteurs dérivés totaux de  $F$ ,  $G$ , forment une adjonction

$$\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}(\mathbf{D}) : \mathbb{R}G$$

entre les catégories homotopiques.

*Démonstration.* Rappelons que la preuve de la proposition 2.4.12 nous dit que  $\mathbb{L}F$  se factorise sous la forme

$$\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Ho}(\mathbf{C}_c) \xrightarrow{\mathbf{Ho}(F)} \mathbf{Ho}(\mathbf{D})$$

où  $\mathbf{Ho}(F)$  est foncteur induit par  $F$  entre les catégories homotopiques et le premier foncteur est l'inverse de l'inclusion canonique  $\mathbf{C}_c \rightarrow \mathbf{C}$ , explicitement donné par le remplacement cofibrant  $X \mapsto L(X)$ .

De même  $\mathbb{R}G$  se factorise sous la forme

$$\mathbb{R}G : \mathbf{Ho}(\mathbf{D}) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Ho}(\mathbf{D}_f) \xrightarrow{\mathbf{Ho}(G)} \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$$

où le premier foncteur est l'inverse de l'inclusion canonique  $\mathbf{C}_f \rightarrow \mathbf{C}$ , explicitement donné par le remplacement fibrant  $X \mapsto R(X)$ .

Il reste donc à vérifier que nous avons des isomorphismes fonctoriels

$$\mathit{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{D})}(\mathbb{L}F(X), Y) \cong \mathit{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(X, \mathbb{R}G(Y))$$

c'est à dire, par construction des foncteurs dérivés et en vertu du Théorème 2.2.18, des bijections naturelles

$$\mathit{Hom}_{\mathbf{D}}(G(L(X)), R(Y)) / \simeq \cong \mathit{Hom}_{\mathbf{C}}(L(X), G(R(Y))) / \simeq.$$

Comme  $F$  et  $G$  sont adjoints, on a déjà des bijections naturelles  $\phi(-) : \mathit{Hom}_{\mathbf{D}}(G(L(X)), R(Y)) \cong \mathit{Hom}_{\mathbf{C}}(L(X), G(R(Y)))$ . Il faut donc voir que cette bijection naturelle passe au quotient.

Montrons que si  $f, g : F(L(X)) \rightarrow R(Y)$  sont homotopes, et que  $H : F(L(X)) \rightarrow P_{R(Y)}$  est une homotopie à droite où  $P_{R(Y)}$  est un objet en chemin de  $R(Y)$ , alors  $\phi(f), \phi(g) : L(X) \rightarrow G(R(Y))$  sont homotopes. Comme  $G$  préserve les fibrations et produits, on a que  $G(P_{R(Y)}) \rightarrow G(R(Y) \times R(Y)) \cong G(R(Y)) \times G(R(Y))$  est une fibration et par ailleurs,  $R(Y)$  étant fibrant,  $P_{R(Y)}$  l'est aussi et donc  $G$  envoie l'équivalence faible  $R(Y) \xrightarrow{\sim} P_{R(Y)}$  sur une équivalence faible. Conclusion ;  $G(Y) \rightarrow G(P_{R(Y)}) \rightarrow G(R(Y)) \times G(R(Y))$  est un objet en chemin de  $G(R(Y))$ . La functorialité, nous donne alors que  $\phi(H) : L(X) \rightarrow G(P_{R(Y)})$  est une homotopie à droite pour  $\phi(f)$  et  $\phi(g)$ . Le sens réciproque se fait de manière duale.  $\square$

**Définition 2.4.20** (*équivalence de Quillen*). Une adjonction de Quillen  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$  est une équivalence de Quillen si l'adjonction induite  $\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}(\mathbf{D}) : \mathbb{R}G$  est une équivalence de catégorie.

On ne demande en revanche évidemment pas que l'adjonction  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$  soit une équivalence.

Le critère suivant permet de caractériser les équivalences de Quillen via la structure de modèle.

**Proposition 2.4.21.** Soit une adjonction de Quillen  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$ . Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) L'adjonction  $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$  est une équivalence de Quillen.
- (2) Les foncteurs  $F$  et  $G$  vérifient que : pour tout objet cofibrant  $A$  et tout objet fibrant  $Y$  on a qu'une flèche  $f : F(A) \rightarrow Y$  est une équivalence faible si et seulement si son adjoint  $A \rightarrow G(Y)$  est une équivalence faible.
- (3) Pour tout objet cofibrant  $A$  et tout objet fibrant  $Y$ , on a que les flèches

$$A \xrightarrow{\eta} G \circ F(A) \xrightarrow{G(R_{F(A)})} G(R(F(A)))$$

et

$$F(L(G(Y))) \xrightarrow{F(L_{G(Y)})} F \circ G(Y) \xrightarrow{\delta} Y$$

, induites par l'unité  $\eta$  et la counité  $\delta$  de l'adjonction, sont des équivalences faibles. Ici on a noté  $R_C : C \xrightarrow{\sim} R(C)$  et  $L_D : L(D) \xrightarrow{\sim} D$  les flèches données par les remplacements fibrants et cofibrants.

*Démonstration.* Montrons que (2)  $\Leftrightarrow$  (3) : Le morphisme  $A \xrightarrow{\eta} G \circ F(A) \xrightarrow{G(R_{F(A)})} G(R(F(A)))$  est, par définition d'une adjonction, l'adjoint de  $F(A) \xrightarrow{\sim} R(F(A)) \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(F(A), R(F(A)))$ . par (2), il suffit donc de vérifier que  $R_{F(A)} : F(A) \rightarrow R(F(A))$  est une équivalence faible. Or, si  $A$  est cofibrant, nous avons que  $F(A) \xrightarrow{\sim} R(F(A))$  est une cofibration acyclique puisque  $F$  préserve ces dernières ce qui conclut. La preuve de la deuxième partie de (3) est évidemment duale.

Réciproquement, supposons que  $A$  soit cofibrant,  $Y$  fibrant, (3) est vérifié et soit  $f : F(A) \rightarrow Y$  ; on note  $\phi(f) : A \rightarrow G(Y)$  son adjoint. Par définition d'une adjonction, on a que  $\phi(f) = A \xrightarrow{\eta} G(F(A)) \xrightarrow{G(f)} G(Y)$ . On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\eta} & G(F(A)) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \\ \parallel & & \downarrow G(R_{F(A)}) & & \downarrow G(R_Y) \wr \\ A & \longrightarrow & G(R(F(A))) & \xrightarrow{G(R(f))} & G(R(Y)) \end{array}$$

puisque  $R$  est fonctoriel. Si  $f$  est une équivalence faible, alors  $R(f)$  est une équivalence faible entre objets fibrants et donc  $G(R(f))$  est une équivalence faible car  $G$  est de Quillen à droite. Il suit alors de la commutativité du diagramme et de (MC2) que la première ligne, c'est à dire  $\phi(f)$  est une équivalence faible. Si c'est  $A \rightarrow G(Y)$  qui est une équivalence, alors on obtient que  $f$  l'est en dualisant cette preuve en utilisant la counité à la place de l'unité.

Montrons que (1)  $\Leftrightarrow$  (2). L'unité de l'adjonction  $\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}(\mathbf{D}) : \mathbb{R}G$  est, par définition, donnée par l'adjoint  $\tilde{\eta} : A \rightarrow \mathbb{R}G \circ \mathbb{L}F(A)$  de  $id_{\mathbb{L}F(A)} \in \text{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{D})}(\mathbb{L}F(A), \mathbb{L}F(A))$ . On a vu dans la preuve du Théorème 2.4.19 que cette

adjonction est donnée par l'isomorphisme

$$\phi(-) : \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(L(A)), R(F(L(A)))) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(L(A), G(R(F(L(A)))))$$

après passage au quotient par la relation d'homotopie. L'unité est donc  $\phi(F(L(A)) \xrightarrow{\sim} R(F(L(A))))$ . Si (2) est vérifiée, alors, comme  $L(A)$  est cofibrant, la flèche  $L(A) \rightarrow G(R(F(L(A))))$  est une équivalence faible si et seulement si  $F(L(A)) \rightarrow R(F(L(A)))$  en est une ce qui est le cas puisque il s'agit juste de celle donnée par le remplacement fibrant. L'unité de l'adjonction est donc bien un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{D})$ . On monte dualement que la counité l'est.

Réciproquement, montrons que (1)  $\Rightarrow$  (3). Si l'unité de l'adjonction dérivée est un isomorphisme, on a que  $L(A) \rightarrow G(R(F(L(A))))$  est une équivalence faible (par le théorème 2.2.18). Déduisons en que, pour  $A$  cofibrant, la flèche  $A \xrightarrow{\eta} G \circ F(A) \xrightarrow{G(R_{F(A)})} G(R(F(A)))$  est une équivalence faible. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} L(A) & \xrightarrow{\eta} & G \circ F(L(A)) & \xrightarrow{G(R_{F(L(A)})} & G \circ R \circ F(L(A)) \\ \downarrow \wr_{L_A} & & \downarrow G \circ F(L_A) & & \downarrow G \circ R \circ F(L_A) \\ A & \xrightarrow{\eta} & G \circ F(A) & \xrightarrow{G(R_{F(A)})} & G \circ R \circ F(A). \end{array}$$

Comme  $A$  est cofibrant,  $L(A) \rightarrow A$  est une équivalence faible entre cofibrants et donc son image par  $F$  est une équivalence faible (puisque  $F$  est de Quillen à gauche). En appliquant le foncteur  $R$  on obtient une équivalence  $R \circ F(L(A)) \rightarrow R \circ F(A)$  entre objets fibrants et donc encore une équivalence faible en appliquant  $G$ . Finalement les deux flèches verticales à droite et gauche sont des équivalences faibles, et la composée horizontale supérieure aussi. Ainsi la composée horizontale inférieure l'est aussi ce qui conclut. Evidemment la deuxième partie de la preuve est duale.  $\square$

On donne quelques exemples sous forme d'exercices.

- Exercice 2.4.22.* (1) Démontrer que les structures de modèles projectives et injectives sur  $Ch(R)$  (resp. entre  $Ch_{\geq 0}(R)$  et  $Ch_{\leq 0}(R)$ ) sont Quillen équivalentes.
- (2) Démontrer que le foncteur identité induit une adjonction de Quillen entre les structures de modèles de Quillen et de Strøm sur  $\mathbf{Top}$ . Est-ce une équivalence de Quillen? Peut-on trouver une sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Top}$  sur la restriction desquelles cette adjonction devient une équivalence?
- (3) On admet que les structures de modèles projectives sur les complexes de chaînes  $Ch(R)$ ,  $Ch_{\geq 0}(R)$  s'étendent aux modules sur des algèbres commutatives différentielles graduées. Démontrer que l'adjonction de Quillen de l'exemple 2.4.5 s'étend à ce cadre, et que cette adjonction est une équivalence de Quillen si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme d'algèbres qui est de plus un quasi-isomorphisme.

## 2.5. COLIMITES ET LIMITES HOMOTOPIQUES

Nous allons utiliser les notions de foncteurs dérivés totaux pour donner un sens précis aux limites et colimites à équivalence faibles près. Ces notions sont *fondamentales* en topologie algébrique. Nous allons présenter ici sommairement les idées de base, suivant les idées originales de Quillen et Bousfield-Kan. L'idée que nous allons

suivre est que les limites et colimites homotopiques sont les foncteurs dérivés totaux associées à limite et colimite. Pour cela précisons en quoi ce sont des foncteurs en commençant par une remarque élémentaire

Soit  $\mathcal{D}$  une petite <sup>42</sup> catégorie. Un foncteur  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbf{C}$  est simplement un diagramme de forme  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbf{C}$ . C'est à dire, la donnée, pour tout objet  $i \in \mathcal{D}$  d'un objet  $X_i \in \mathbf{C}$  et, pour toute flèche  $\alpha : i \rightarrow j$  dans  $\mathcal{D}$ , d'une flèche  $f(\alpha) : X_i \rightarrow X_j$ . Et ceci de telle sorte que tout diagramme commutatif de  $\mathcal{D}$  s'envoie sur un diagramme commutatif dans  $\mathbf{C}$  (en particulier  $f(\alpha \circ \beta) = f(\alpha) \circ f(\beta)$ ) et que les identités s'envoient sur l'identité.

Un morphisme de foncteurs, c'est à dire une transformation naturelle, est alors simplement un système de flèches  $\tau_i : X_i \rightarrow Y_i$  pour chaque objet  $i \in \mathcal{D}$  tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f(\alpha)} & X_j \\ \tau_i \downarrow & & \downarrow \tau_j \\ Y_i & \xrightarrow{g(\alpha)} & Y_j \end{array}$$

*Notation 2.5.1.* On note  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}} := \text{Fun}(\mathcal{D}, \mathbf{C})$  la catégorie des foncteurs de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbf{C}$  (ses objets sont les foncteurs, ses flèches les transformations naturelles).

Si  $\mathbf{C}$  est cocomplète, alors, pour toute catégorie  $\mathcal{D}$ , la colimite définit un foncteur

$$\text{colim}_{\mathcal{D}} : \mathbf{C}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbf{C}$$

défini par  $F \mapsto \text{colim}_{i \in \mathcal{D}} F(i)$ . La propriété universelle des colimites définit le foncteur sur les transformations naturelles (c'est à dire les flèches de  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$ ). De même, si  $\mathbf{C}$  est complète, pour toute catégorie  $\mathcal{D}$ , la limite donne le foncteur

$$\lim_{\mathcal{D}} : \mathbf{C}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbf{C}$$

défini par  $F \mapsto \lim_{i \in \mathcal{D}} F(i)$ .

Réciproquement, on dispose du foncteur constant  $\text{cst} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  qui à tout objet  $C \in \mathbf{C}$  associe le foncteur constant  $\text{cst}(C)$  donné sur les objets de  $\mathcal{D}$  par  $j \mapsto C$  et sur les flèches par  $\alpha \mapsto C \xrightarrow{\text{id}} C$ .

**Lemme 2.5.2.** S'il existe, le foncteur  $\text{colim}_{\mathcal{D}} : \mathbf{C}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbf{C}$  est adjoint à gauche du foncteur constant et, s'il existe, le foncteur  $\lim_{\mathcal{D}} : \mathbf{C}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbf{C}$  est adjoint à droite du foncteur constant.

*Démonstration.* On peut consulter la feuille de TD 3. □

Si, de plus,  $\mathbf{C}$  est munie d'une classe  $\mathcal{W}$  d'équivalences faibles, alors on peut munir la catégorie  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  des  $\mathcal{D}$ -diagrammes dans  $\mathbf{C}$  d'une classe d'équivalences faibles induites. On dira qu'une flèche  $\tau : X \rightarrow Y$  de  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  est une équivalence faible si chaque  $\tau_i : X_i \rightarrow Y_i$  est une équivalence faible. Autrement dit les équivalences faibles sont définies objet par objet.

*Notation 2.5.3.* On note  $\mathcal{W}^{\mathcal{D}}$  les équivalences faibles de  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$ .

<sup>42</sup>. c'est à dire qu'on a un ensemble d'objet

**Définition 2.5.4** ((co)limites homotopiques). Soit  $(\mathbf{C}, \mathcal{W})$  une catégorie avec des équivalences faibles et  $\mathcal{D}$  une petite catégorie.

- (1) une colimite homotopique est un foncteur dérivé total à gauche  $\mathbb{L}\text{colim}_{\mathcal{D}} : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}^{\mathcal{D}}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  du foncteur  $\text{colim}_{\mathcal{D}} : \mathbf{C}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{C}$ .
- (2) une limite homotopique est un foncteur dérivé total à droite  $\mathbb{R}\text{lim}_{\mathcal{D}} : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}^{\mathcal{D}}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$  du foncteur  $\text{lim}_{\mathcal{D}} : \mathbf{C}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{C}$ .

S'ils existent, ces foncteurs de (co)limites homotopiques sont uniques à unique isomorphisme naturel près.

*Notation 2.5.5.* Ces foncteurs sont souvent aussi dénotés  $\text{hocolim} = \mathbb{L}\text{colim}$  et  $\text{holim} = \mathbb{R}\text{lim}$  dans la littérature.

*Remarque 2.5.6.* On prendra garde que  $\mathbb{L}\text{colim}$  n'est pas une colimite dans la catégorie homotopique en général et que  $\mathbb{R}\text{lim}$  n'est pas une limite dans la catégorie homotopique non plus en général. Voir la feuille de TD 3. De manière générale, même si  $\mathbf{C}$  est complète et cocomplète, sa catégorie homotopique ne l'est pas forcément et ses (co)limites n'ont pas forcément le sens voulu. La raison en est que passer à la catégorie homotopique est une opération assez brutale qui oublie beaucoup d'informations et que les (co)limites dans cette catégorie perdent trop d'informations par rapport à  $\mathbf{C}$ . Un moyen de circonvenir à cet ennui (en dehors du cadre de ce cours) est de travailler avec une version enrichie/supérieure des catégories homotopiques appelées  $\infty$ -catégories et de définir des (co)limites dans ce contexte.

Comme on l'a vu dans la partie précédente, il est commode d'avoir des structures de modèle pour garantir l'existence (et comprendre leur structure) des foncteurs dérivés. Ainsi, on a envie, étant donné une structure de modèle  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ , d'en définir une sur  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$ . Rappelons qu'on a défini une structure de catégorie avec équivalences faibles sur  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$ .

On dira qu'une structure de modèle sur  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  étend les équivalences faibles  $\mathcal{W}^{\mathcal{D}}$  si les équivalences faibles de  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  contiennent  $\mathcal{W}^{\mathcal{D}}$ .

**Lemme 2.5.7.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle.

- (1) Si  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  admet une structure de modèle étendant les équivalences faibles telle que le foncteur constant  $\text{cst} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  soit de Quillen à droite, alors la colimite homotopique  $\mathbb{L}\text{colim}_{\mathcal{D}}$  existe.

De plus si  $\alpha : F \rightarrow F'$  est une transformation naturelle entre diagrammes qui est une équivalence faible objet par objet, alors la flèche naturelle  $\mathbb{L}\text{colim}_{\mathcal{D}}(\alpha) : \mathbb{L}\text{colim}_{\mathcal{D}}(F) \rightarrow \mathbb{L}\text{colim}_{\mathcal{D}}(F')$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ .

- (2) Si  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  admet une structure de modèle étendant les équivalences faibles telle que le foncteur constant  $\text{cst} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  soit de Quillen à gauche, alors la limite homotopique  $\mathbb{R}\text{lim}_{\mathcal{D}}$  existe.

De plus si  $\alpha : F \rightarrow F'$  est une transformation naturelle entre diagrammes qui est une équivalence faible objet par objet, alors la flèche naturelle  $\mathbb{R}\text{lim}_{\mathcal{D}}(\alpha) : \mathbb{R}\text{lim}_{\mathcal{D}}(F) \rightarrow \mathbb{R}\text{lim}_{\mathcal{D}}(F')$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.4.16 et de la définition des équivalences faibles sur les diagrammes.  $\square$

Il n'est cependant pas du tout évident de construire de telles structures de modèles pour des paires  $\mathcal{D}$  et  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  quelconques.

On a cependant des candidats évidents.

**Définition 2.5.8.** Soit  $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  une catégorie de modèle et  $\mathcal{D}$  une petite catégorie.

- (1) On appelle structure projective sur  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  la classe dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles objets par objets (soit  $\mathcal{W}^{\mathcal{D}}$ ), les fibrations sont les fibrations objets par objets (soit  $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}$ ) et les cofibrations sont les transformations naturelles ayant la propriété de relèvement par rapport aux fibrations acycliques.
- (2) On appelle structure injective sur  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  la classe dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles objets par objets (soit  $\mathcal{W}^{\mathcal{D}}$ ), les cofibrations sont les cofibrations objets par objets (soit  $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ ) et les fibrations sont les transformations naturelles ayant la propriété de relèvement par rapport aux cofibrations acycliques.

**Proposition 2.5.9.** Si la structure projective définit une structure de catégorie de modèle, alors la colimite homotopique  $\mathbb{L}\text{colim}_{\mathcal{D}}$  existe et est invariante par équivalences faibles<sup>43</sup>.

Si la structure injective définit une structure de catégorie de modèle, alors la limite homotopique  $\mathbb{R}\text{lim}_{\mathcal{D}}$  existe et est invariante par équivalences faibles<sup>44</sup>.

*Démonstration.* Si la structure projective existe, alors le foncteur constant préserve les fibrations et fibrations acycliques (puisqu'elles sont définies objet par objet). On applique alors le lemme 2.5.7. De même avec la structure injective.  $\square$

*Remarque 2.5.10.* Dans le cas de figure du lemme, d'après la remarque 2.4.17, si la structure projective existe, pour calculer la colimite homotopique, il suffit de remplacer le diagramme  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{C}$  par un remplacement cofibrant  $L(F)$  et de calculer  $\text{colim}_{\mathcal{D}} L(F)$  pour calculer  $\mathbb{L}\text{colim}_{\mathcal{D}}$ . Cela peut être plus ou moins dur. Mais dans plusieurs cas simples (par exemple un poussé-en-avant ou une suite de flèches composables), on peut faire des constructions plus simples. Voir l'exemple 2.5.17

Nous donnons maintenant un théorème (qui combine plusieurs théorèmes non-triviaux...) garantissant l'existence de ces structures. Avant cela nous introduisons la terminologie suivante.

**Définition 2.5.11.** Nous dirons qu'une catégorie  $\mathcal{D}$  est très petite si elle a un nombre fini d'objets, un nombre fini de morphismes et qu'il existe un entier  $N$  tel que toute suite  $A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \cdots A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n$  de flèches composables ne contienne qu'au plus  $N$  flèches qui ne sont pas l'identité.

Une classe d'exemple de très petite catégorie est donnée par un ensemble fini partiellement ordonné<sup>45</sup>. C'est en particulier le cas des diagrammes décrivant des poussés-en-avant, tirés en arrières, (co)produits finis.

43. c'est à dire qu'une transformation naturelle qui est une équivalence faible objet par objet induit un isomorphisme entre les colimites homotopiques comme dans le lemme 2.5.7.

44. c'est à dire qu'une transformation naturelle qui est une équivalence faible objet par objet induit un isomorphisme entre les limites homotopiques.

45. que l'on voit comme une catégorie avec une flèche  $i \rightarrow j$ , pour  $i \neq j$ , si et seulement si  $i < j$

**Définition 2.5.12.** Une catégorie de modèle est dite *combinatoire* si elle est cofibrément engendrée et qu'il existe un ensemble d'objets  $S$  qui sont compacts<sup>46</sup> tel que tout objet est une colimite filtrée d'objets de  $S$ .

Ces hypothèses supplémentaires sont essentiellement des hypothèses garantissant que la taille des structures de notre catégorie de modèle ne sont pas trop grandes. On appelle parfois ces catégories de modèle présentables.

*Exemple 2.5.13.* Les catégories de modèles  $\mathbf{C} = Ch(R)$ ,  $Ch_{\geq 0}(R)$  (munie des structures projectives ou injectives), celle des ensembles simpliciaux  $\mathbf{sEns}$  (voir Section 2.5) sont combinatoires. La catégorie  $\mathbf{Top}$  (munie de la structure de Quillen) ne l'est pas, mais est Quillen équivalente (Théorème 3.2.15) à  $\mathbf{sEns}$  qui l'est. Ceci garantit que le résultat du Théorème 2.5.14.(3) s'applique à  $\mathbf{Top}$  aussi.

**Théorème 2.5.14.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie de modèle et  $\mathcal{D}$  une petite catégorie.

- (1) Les structures projectives et injectives forment une catégorie de modèle si  $\mathcal{D}$  est très petite.
- (2) Si  $\mathbf{C}$  est une catégorie de modèle cofibrément engendrée alors les structures projectives forment une structure de modèle pour toute petite catégorie  $\mathcal{D}$ .
- (3) Si  $\mathbf{C}$  est de plus combinatoire, alors les structures injectives forment aussi une structure de modèle pour toute petite catégorie  $\mathcal{D}$ .

*Remarque 2.5.15.* En particulier, il suit des deux derniers points que les (co)limites homotopiques sont toutes définies dans les complexes de chaînes ou espaces topologiques ou ensembles simpliciaux.

Par ailleurs, on peut montrer que si  $\mathbf{C}$  est cofibrément engendrée (resp. combinatoire) alors les structures de modèle sur  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  sont cofibrément engendrée (resp. combinatoires).

Ainsi, lorsque  $\mathbf{C}$  est combinatoire (par exemple donc si  $\mathbf{C} = Ch(R)$  ou si  $\mathbf{C} = \mathbf{sEns}$  est la catégorie de modèle des ensembles simpliciaux), alors la catégorie de modèle  $Fun(\mathcal{S}^{op}, \mathbf{C})$  des préfaisceaux, que l'on a muni de la structure de modèle projective sur les préfaisceaux, est encore combinatoire. On peut donc définir ses (co)limites homotopiques.

Par ailleurs, il existe d'autres hypothèses sur  $\mathcal{D}$ , par exemple être de Reedy, qui garantissent l'existence de structures de modèles étendant les équivalences faibles pour des catégories de modèles simpliciales.

*Idée de la preuve de (2) et (3).* Que les propriétés d'engendrement par une famille de petits objets d'une catégorie  $\mathbf{C}$  s'étendent aux catégories de foncteurs  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  sont des résultats généraux indépendants des catégories de modèle (mais pas du tout évident). Pour (2) et (3), le reste de l'idée est en fait de montrer que la structure de modèle est encore cofibrément engendrée. Dans le cas projectif, si on note  $\mathcal{F} = (A_i \xrightarrow{\alpha_i} B_i)_{i \in I}$  (respectivement  $\mathcal{G} = (A'_j \xrightarrow{\beta_j} B'_j)_{j \in J}$ ) les cofibrations (resp. acycliques) génératrices de  $\mathbf{C}$ , alors on montre en fait que  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  est cofibrément engendrée avec comme cofibrations (resp. acycliques) génératrices l'ensemble

$$\left( F^d(A_i) \xrightarrow{F^d(\alpha_i)} F^d(B_i) \right)_{i \in I, d \in \mathcal{D}}, \quad (\text{resp. } \left( F^d(A'_j) \xrightarrow{F^d(\beta_j)} F^d(B'_j) \right)_{j \in J, d \in \mathcal{D}}).$$

46. on peut se restreindre à  $\kappa$ -petit pour un cardinal  $\kappa$  à condition d'exiger que les colimites filtrées que l'on prend pour engendrer tout objet soit de taille au plus  $\kappa$

Dans la définition ci-dessus, on a noté, pour tout objet  $d \in \mathcal{D}$  et tout objet  $C \in \mathbf{C}$ ,  $F^d(C) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  le foncteur  $\mathcal{D} \ni x \mapsto \coprod_{\{f:d \rightarrow x\}} C$  et agit sur une flèche  $\phi : x \rightarrow y$

dans  $\mathcal{D}$  en envoyant la “composante”  $C$  correspondant à  $f$  par l’identité sur celle correspondant à  $\phi \circ f$ . Une flèche  $\gamma : C \rightarrow C'$  dans  $\mathbf{C}$  induit alors la transformation naturelle  $F^d(\gamma) : F^d(C) \rightarrow F^d(C')$  donnée, pour tout objet  $d' \in \mathcal{D}$ , par  $\coprod_{\{f:d \rightarrow d'\}} \gamma$ . On

applique alors le Théorème 2.3.30. Démontrer (3) est un peu plus ardu et utilise le fait que la “petitesse” de la catégorie donnée par l’existence des générateurs compacts permet de garantir l’existence de générateurs pour les cofibrations de la structure injective et à partir de là de reproduire le schéma précédent.  $\square$

*Exemple 2.5.16.* Dans  $Ch(R)$ , la colimite homotopique d’un diagramme  $f : P \rightarrow Q$  (autrement dit le conoyau homotopique) est donné par le cône  $(P_{n-1} \oplus Q_n, d(p, q) = (-d(p), d(q) - f(p)))$  du morphisme de complexe (voir la feuille de TD 3).

*Exemple 2.5.17 (Poussé-en-avant homotopique).* Par définition, pour calculer un poussé-en-avant homotopique, c’est à dire la colimite d’un diagramme  $X \in \mathbf{C}^{\mathcal{D}}$  (avec  $\mathcal{D} = x \leftarrow z \rightarrow y$ ), lorsque la structure projective est de modèle, on calcule  $\mathbb{L} \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} F = \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} L(F)$  où  $L(F)$  est un remplacement cofibrant de  $F := X \leftarrow Z \rightarrow Y$  dans  $\mathbf{C}^{\mathcal{D}}$ . D’après le TD 3, un tel remplacement est donné par un diagramme  $L_X \longleftarrow \langle L_Z \rangle \longrightarrow L_Y$ , où  $L_Z$  est cofibrant, et une équivalence faible  $L(F) \xrightarrow{\sim} F$ . Dans le cas de **Top** ou **sEns** ou des complexes de chaînes  $Ch(R)$  et plus généralement des catégories propres à gauche<sup>47</sup>, il existe un moyen plus simple :

*Proposition 2.5.18.* Soit  $f : Z \rightarrow Y$  une flèche dans **Top** ou **sEns** munie de leur structure de Quillen ou  $Ch(R)$  munie de la structure projective. Si  $\tilde{f} : Z \rightarrow \tilde{Y}$  est un remplacement de  $f : Z \rightarrow Y$  par une cofibration, c’est à dire que  $f$  se factorise sous la forme  $f : Z \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{Y} \xrightarrow{\sim} Y$ , alors le poussé-en-avant  $X \coprod_Z \tilde{Y}$  est un modèle pour le pushout homotopique de tout diagramme  $X \leftarrow Z \xrightarrow{f} Y$ . Plus précisément, on a une équivalence faible naturelle

$$\begin{aligned} \mathbb{L} \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} (X \leftarrow Z \rightarrow Y) &= \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} (L_X \longleftarrow \langle L_Z \rangle \longrightarrow L_Y) \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} (X \leftarrow Z \rightarrow \tilde{Y}) = X \coprod_Z \tilde{Y}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Voir les solutions du TD 3.  $\square$

En particulier, étant donné deux applications continues  $A \xrightarrow{i} X$  et  $A \xrightarrow{j} Y$ , leur pushout homotopique est donné par  $X \coprod_A \operatorname{Cyl}(i) \cong X \coprod_A^h Y$  le poussé-en-avant homotopique introduit dans le chapitre 1.7. En particulier on obtient que ce dernier est bien invariant par homotopie faible.

Rappelons que le cône  $C(P \xrightarrow{f} Q)$  d’un morphisme de complexe est le complexe qui en degré  $n$  vaut  $C(f)_n = P_{n-1} \oplus Q_n$  avec pour différentielle  $d(x, y) = (-d(x), d(y) + f(x))$ . On peut montrer en utilisant le résultat précédent que

47. Plus précisément ce résultat est vrai pour toute catégorie de modèle dite propre à gauche, c’est à dire telle que les poussés en avant d’équivalences faibles sont des équivalences faibles.

*Proposition 2.5.19.* Le quotient homotopique d'un complexe de chaînes  $P \xrightarrow{f} Q$ , c'est à dire la colimite homotopique  $\mathbb{L} \operatorname{colim}(P \xrightarrow{f} Q)$ <sup>48</sup> est équivalent au cône  $C(f)$  du morphisme  $f$ . Plus généralement si  $A \xrightarrow{f} P$  et si  $A \xrightarrow{g} Q$  sont des morphismes de complexes, alors le poussé-en-avant homotopique est équivalent au cône  $C(f - g)$  du morphisme  $f - g$ .

*Démonstration.* Voir les solutions du TD 3. □

De manière duale, dans les catégories de modèles citées ci-dessus (ou celles qui sont propres à droite), un tiré-en-arrière homotopique se calcule en rempaçant une des flèches par une fibration et en prenant le tiré-en-arrière. Dans les complexes de chaînes, on calcule ceci par le cocône  $C(f)[1]$ , qui n'est rien d'autre que le cône décalé de 1.

*Exercice 2.5.20.* Démontrez le résultat cité ci-dessus sur le calcul du noyau homotopique dans  $Ch(R)$ , ainsi que le poussé-en-avant homotopique.

*Exercice 2.5.21.* On munit **Top** de la structure de Quillen (Exemple 2.1.13).

- (1) Démontrez que le pushout homotopique  $X \coprod_A^h Y$  est bien le poussé-en-avant homotopique au sens de la définition 2.5.4, c'est à dire est un objet représentant cette colimite homotopique dans **Ho(Top)** (on commencera par montrer que les cofibrations de la structure de modèle projective sur les diagrammes  $1 \leftarrow 0 \rightarrow 2$  sont données par les cofibrations objets par objets, puis par identifier la colimite homotopique associée).
- (2) Quel est le tiré-en-arrière homotopique ?

---

48. qui est équivalente au pushout homotopique  $\mathbb{L} \operatorname{colim}(0 \leftarrow P \xrightarrow{f} Q)$

### III. ENSEMBLES SIMPLICIAUX

Les ensembles simpliciaux sont un modèle combinatoire très puissant du type d'homotopie faible des espaces. En topologie algébrique, et plus encore en théorie de l'homotopie, le mot espace (en anglais ou en français) désigne très (voire le plus) souvent un ensemble simplicial.

On pourra consulter [6] pour une introduction aux ensembles simpliciaux, [11] pour une étude détaillée ainsi que les chapitres correspondants de [10] et de [17]. On pourra aussi consulter [1, chapitre Polyèdres, applications et variétés PL]

#### 3.1. COMPLEXES SIMPLICIAUX ET ENSEMBLES SIMPLICIAUX

La notion d'ensemble simplicial est provient (et est une abstraction) de la notion de complexe simplicial, aussi connu comme polyèdres. Nous rappelons ici la notion de complexe simplicial (plongé).

**Définition 3.1.1** (Simplexes). Un *simplexe*  $\sigma$  de dimension  $r$  dans un espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , pour un certain  $n \geq r$ , est l'enveloppe convexe de  $r + 1$  points indépendants<sup>49</sup>  $s_0, \dots, s_r$ . Les  $s_i$  sont appelés *sommets* de  $\sigma$ . Les *faces* de  $\sigma$  sont les simplexes de dimension  $r - 1$  dont les sommets sont des sommets de  $\sigma$ . Une *orientation* de  $\sigma$  est le choix d'un ordre sur ses sommets modulo les permutations paires.

*Exemple 3.1.2. (simplexes standards)* Le simplexe standard de dimension  $n$ ,  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , est le sous-espace

$$\Delta^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_i \geq 0 \text{ (pour tout } i) \text{ et } x_0 + \dots + x_n = 1\}.$$

On peut aussi l'identifier canoniquement avec le sous-ensemble

$$\Delta^n \cong \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n / 0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq 1\}$$

via les relations  $t_i = x_0 + \dots + x_{i-1}$ .

La notation  $\Delta^n$  suggère la forme du simplexe standard. On notera que  $\Delta^0$  est juste un point et que  $\Delta^1 \cong [0, 1]$ . Plus généralement,  $\Delta^n \cong [0, 1]^n$  et son bord, c'est à dire la réunion de ses faces,  $\partial\Delta^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$ .

**Définition 3.1.3** (Complexe simplicial). Un *complexe simplicial* dans un espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble  $K$  de simplexes dans  $\mathbb{R}^n$  tel que :

- (1) si  $\sigma \in K$  alors toute face de  $\sigma$  appartient également à  $K$  ;
- (2) si  $\sigma, \tau \in K$  et  $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$  alors  $\sigma \cap \tau$  est le simplexe dont tous les sommets sont des sommets commun à  $\sigma$  et  $\tau$  ;
- (3) si  $x \in \sigma \in K$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $U$  ne rencontre qu'un nombre fini de simplexes de  $K$ .

On appelle *polyèdre* associé à un complexe simplicial  $K$  — ou *réalisation* de  $K$  — la réunion  $|K|$  de ses simplexes :

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

que l'on munit de la topologie induite par celle de l'espace euclidien ambiant.

<sup>49</sup>. C'est-à-dire que les vecteurs  $v_1 = s_1 - s_0, \dots, v_r = s_r - s_0$  sont linéairement indépendants.

La dernière condition est une condition de finitude locale ; elle garantit que la topologie de  $K$  est compatible avec celle de la réunion des simplexes. En particulier un sous-espace est fermé si et seulement si son intersection avec tout simplexe est fermée. On a en fait que le polyèdre  $|K|$  est un CW-complexe, pour lequel les applications de recollement sont en fait injectives. Un contre exemple à cette condition est par exemple donné par la réunion d'intervalles dans  $\mathbb{R}^2$  passant par  $(0, 1)$  et les points  $(0, 0)$ ,  $(1/n, 0)$  ( $n > 0$ ).

La dimension maximale d'un simplexe de  $K$  est appelée *dimension de  $K$* . Noter que les complexes simpliciaux forment une catégorie : un morphisme  $f : K \rightarrow L$  est un ensemble d'applications linéaires sur les simplexes compatibles sur les faces.

Par ailleurs un complexe simplicial  $K$  est fini si et seulement si le polyèdre associé  $|K|$  est compact.

La définition ci-dessus est une définition concrète (et essentiellement géométrique) des complexes simpliciaux, c'est à dire provenant d'un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  avec une topologie qui, localement, coïncide avec celle des simplexes.

Il existe aussi une notion *purement combinatoire*, et plus générale, de *complexe simplicial abstrait*. Cette dernière est définie comme un ensemble de sommets  $\{v_i, i \in I\}$  et un ensemble "abstrait" de faces, qui sont des sous-ensembles finis de  $\{v_i, i \in I\}$ , vérifiant les propriétés 3.1.3.(1) et 3.1.3.(2). A un tel espace, on peut définir une réalisation géométrique mais qui ne se plonge pas nécessairement dans  $\mathbb{R}^n$  (à moins de supposer une condition analogue à 3.1.3.(3)) ; en général on peut cependant le plonger dans un  $\mathbb{R}^I$  de la même manière que les complexes simpliciaux ci-dessus en imposant la topologie de la réunion. On ne va pas s'attarder sur cette définition car nous donnerons directement la définition de la réalisation adéquate pour les ensembles simpliciaux.

Cette version générale des complexes simpliciaux abstrait permet de traiter plus d'exemples mais souffre de trois défauts majeurs des complexes simpliciaux. Premièrement, le produit de deux complexes simpliciaux n'est pas un complexe simplicial. Plus exactement, le produit de deux polyèdres est bien un polyèdre, mais sa structure de complexe simplicial ne se détermine pas directement à partir de la donnée de la structure des complexes simpliciaux (regarder l'exemple de  $\Delta^1 \times \Delta^1$  est parlant). Par ailleurs, il existe un certain nombre de CW-complexes simples<sup>50</sup> que l'on souhaite voir comme des objets triangulés mais qui ne sont pas des polyèdres. Par exemple, la présentation d'un cercle comme la donnée d'un intervalle dont on a identifié les deux extrémités n'est pas un polyèdre. Ce dernier point est lié au fait qu'il n'y a que trop peu d'applications "simpliciales" en tout cas dans un sens naïf. Enfin, la donnée combinatoire donnée, n'est pas suffisante pour encoder toute la structure homotopique d'un polyèdre. Un premier indice de ce point est que pour voir l'invariance par homotopie de l'homologie singulière, il faut décomposer des prismes en sous-simplexes et que de même, l'invariance de l'homologie simpliciale n'est pas aisée.

Ces problèmes peuvent être résolus par les *ensembles simpliciaux*, qui consistent à rajouter aux complexes simpliciaux des simplexes "dégénérés"<sup>51</sup>, c'est à dire des

50. par exemple les  $\Delta$ -complexes de [8]

51. plus précisément, on va autoriser dans un simplexe à avoir plusieurs fois un même sommet. En particulier pour chaque  $i$ -simplexe on aura  $i+1$  simplexes dégénérés de dimension  $i+1$  correspondant aux  $i+1$  sommets qu'on peut doubler. Chacun de ces  $i+1$ -simplexes va lui même engendrer  $i+2$  simplexes de dimension  $i+2$  etc...

simplexes qu'on a écrasé sur des faces (voir des sous-faces), qui tiennent compte de la structure cellulaire des produits et de données homotopiques.

Pour cela nous introduisons la catégorie suivante

**Définition 3.1.4.** La catégorie  $\Delta$  est la catégorie des ordinaux finis et des applications préservant l'ordre. Précisément, ses *objets* sont les ensembles ordonnés  $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$  (munis de l'ordre naturel  $0 < 1 < \dots$ ) et ses morphismes sont les applications croissantes (au sens large).

On a donc un objet par entier naturel.

**Lemme 3.1.5.** Toute application  $[n] \rightarrow [m]$  dans  $\Delta$  se factorise *uniquement* sous la forme de la composée d'une surjection croissante suivie d'une inclusion croissante. De plus

- Les injections croissantes sont engendrées par les applications  $d^i : [n-1] \rightarrow [n]$  (où  $i = 0, \dots, n$ ) définies par

$$d^i(j) = j \text{ si } j < i \text{ et } d^i(j) = j + 1 \text{ si } j \geq i,$$

- les surjections croissantes sont engendrées par les  $s^j : [n] \rightarrow [n-1]$  (où  $j = 0 \dots n-1$ ) définies par

$$s^j(k) = k \text{ si } k \leq j \text{ et } s^j(k) = k - 1 \text{ si } k \geq j + 1.$$

- Les relations entre les  $s^j$  et  $d^i$  sont engendrées par

$$(9) \quad \begin{cases} d^j d^i = d^i d^{j-1} & (\text{si } i < j) \\ s^j d^i = d^i s^{j-1} & (\text{si } i < j) \\ s^j d^i = id & (\text{si } i = j, j + 1) \\ s^j d^i = d^{i-1} s^j & (\text{si } i > j + 1) \\ s^j s^i = s^{i-1} s^j & (\text{si } i > j) \end{cases}$$

Les relations (9) sont appelées les relations cosimpliciales.

**Définition 3.1.6** (*ensemble (co)simplicial*). Soit **Ens** la catégorie des ensembles.

- Un ensemble simplicial est un foncteur  $\Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ .
- Un ensemble cosimplicial est un foncteur  $\Delta \rightarrow \mathbf{Ens}$ .
- Plus généralement un objet simplicial dans une catégorie **C** est un foncteur  $\Delta^{op} \rightarrow \mathbf{C}$  et un objet cosimplicial dans **C** est un foncteur  $\Delta \rightarrow \mathbf{C}$ .
- Les morphismes entre ensembles (co)simpliciaux sont les transformations naturelles.

*Notation 3.1.7.* On notera **sEns** la catégorie des ensembles simpliciaux ainsi définie, et plus généralement **sC** la catégorie des objets simpliciaux de **C**.

*Exemple 3.1.8* (*le retour des simplexes standards*). La collection des simplexes standards  $\Delta^n$  (exemple 3.1.2) forme un *espace topologique cosimplicial*<sup>52</sup>. Plus précisément on définit le foncteur  $[n] \mapsto \Delta^n$  sur les objets et, sur les flèches génératrices de  $\Delta$ , on définit  $d_*^i : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n+1}$  et  $s_*^j : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n-1}$  par les formules

$$\begin{aligned} d_*^i(x_0, \dots, x_n) &= (x_0, \dots, x_i, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ s_*^j(x_0, \dots, x_n) &= (x_0, \dots, x_{j-1}, x_j + x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

52. autrement dit un objet cosimplicial dans **Top**

En termes des coordonnées  $\underline{t} = (t_1 \leq \dots \leq t_n)$ , on a de manière équivalente :

$$\begin{aligned} d_*^i(\underline{t}) &= (t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_i \leq t_i \leq t_{i+1} \dots \leq t_n) \\ s_*^j(\underline{t}) &= (t_0 \leq t_1 \leq \dots \widehat{t}_j \dots \leq t_n). \end{aligned}$$

(avec la convention  $t_0 = 0, t_{n+1} = 1$ ).

Cet exemple, outre qu'il est fondamental comme nous allons le voir, à la vertu qu'il permet de se retrouver facilement les identités cosimpliciales.

Le lemme 3.1.5 implique

**Proposition 3.1.9.** Un ensemble simplicial est la même chose que la donnée d'une suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  d'ensembles et d'applications, *appelées faces*,  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$  ( $i = 0 \dots n$ ) et  $s_j : X_n \rightarrow X_{n+1}$  ( $j = 0 \dots n$ ), *appelées dégénérescences*, soumis aux relations

$$(10) \quad \begin{cases} d_i d_j = d_{j-1} d_i & (\text{si } i < j) \\ d_i s_j = s_{j-1} d_i & (\text{si } i < j) \\ d_i s_j = id & (\text{si } i = j, j + 1) \\ d_i s_j = s_j d_{i-1} & (\text{si } i > j + 1) \\ s_i s_j = s_j s_{i-1} & (\text{si } i > j) \end{cases}$$

De même, un ensemble cosimplicial est la même chose que la donnée d'une suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  d'ensembles et d'applications, *appelées cofaces*,  $d^i : X_{n-1} \rightarrow X_n$  ( $i = 0 \dots n$ ) et  $s^j : X_{n+1} \rightarrow X_n$  ( $j = 0 \dots n$ ), *appelées codégénérescences*, soumis aux relations 9.

Un *morphisme entre ensembles (co)simpliciaux* est la donnée d'une suite d'applications  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$  qui commutent avec les (co)faces et (co)dégénérescences.

La même description s'applique pour les objets (co)simpliciaux dans  $\mathbf{C}$ , en prenant une suite d'objets et en imposant que les (co)faces, (co)dégénérescences soit des flèches de  $\mathbf{C}$  bien sûr.

On appelle un élément de  $X_n$  (dans le cas d'un ensemble ou objet simplicial  $X_\bullet$ ), un  **$n$ -simplexe** de  $X_\bullet$ . On qualifiera parfois  $n$  de dimension ou de degré du simplexe.

*Notation 3.1.10.* On rencontre souvent la notation suivante

$$\begin{array}{ccccccc} & & \xrightarrow{d_3} & & \xrightarrow{d_2} & & \xrightarrow{d_1} \\ & & \xleftarrow{s_2} & & \xleftarrow{s_1} & & \xleftarrow{s_0} \\ & & \xrightarrow{d_2} & & \xrightarrow{d_1} & & \xrightarrow{d_0} \\ \dots & X_3 & \xleftarrow{s_1} & X_2 & \xrightarrow{d_1} & X_1 & \xleftarrow{s_0} & X_0 \\ & & \xrightarrow{d_1} & & \xleftarrow{s_0} & & \xrightarrow{d_0} \\ & & \xleftarrow{s_0} & & \xleftarrow{s_0} & & \\ & & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & \end{array}$$

pour un objet simplicial (qui permet de se rappeler du nombre de faces et de dégénérescences).

Les identités simpliciales 10 ont la conséquence suivante : on peut écrire toute itération de dégénérescences sous la forme  $s_{i_0} \dots s_{i_k}$  avec  $i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k$  et toute composée de faces sous la forme  $d_{l_m} \dots d_{l_0}$  avec  $l_0 \leq \dots \leq l_m$ .

**Définition 3.1.11** (*simplexes (non)-dégénérés*). Soit  $X$  un ensemble simplicial et  $x \in X_n$ . On dira que  $x$  est *dégénéré* s'il est dans l'image d'une dégénérescence (c'est à dire dans  $\mathfrak{S}(s_j)$  pour un  $j$  quelconque). Dans le cas contraire on dira qu'il est *non-dégénéré*.

On dira qu'un ensemble simplicial est fini s'il n'a qu'un nombre fini de simplexes non-dégénérés.

*Exemple 3.1.12 (le  $n$ -simplexe simplicial).* On note  $\Delta_{\bullet}^n$  l'ensemble simplicial  $\text{Hom}_{\Delta}(-, [n])$  c'est à dire

$$[k] \mapsto \text{Hom}_{\Delta}([k], [n]).$$

Le lemme de Yoneda donne

*Lemme 3.1.13.* On a un isomorphisme naturel

$$\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta_{\bullet}^n, X_{\bullet}) \cong X_n$$

donné par  $f \mapsto f([n] \xrightarrow{id} [n])$ .

*Démonstration.* Les identités simpliciales (10) assurent qu'il suffit de connaître un morphisme d'ensembles simpliciaux sur les simplexes non-dégénérés pour le connaître sur tout  $X_{\bullet}$ . Notons que  $\Delta_{\bullet}^n$  a exactement un simplexe non-dégénéré en dimension  $n$ , donné par l'identité de  $[n] \xrightarrow{id} [n]$  et aucun en dimension  $\geq n+1$ . Il suit alors des relations simpliciales que si  $f_{\bullet} : \Delta_{\bullet}^n \rightarrow X_{\bullet}$  est un morphisme d'ensemble simpliciaux, alors  $f_{>n}$  est déterminée par les  $f_{\leq n}$ . Par ailleurs, tous les simplexes non-dégénérés de  $\Delta_{\bullet}^n$  en dimension  $< n$  sont des (itérations de) faces de  $[n] \xrightarrow{id} [n]$ . Ainsi en vertu des identités simpliciales, il suffit de connaître l'image de  $[n] \xrightarrow{id} [n]$  pour connaître leur valeur. Réciproquement étant donné  $x_n \in X_n$ , on peut lui associer  $[n] \xrightarrow{id} [n] \mapsto x_n$  et en vertu des relations simpliciales ceci s'étend bien en un morphisme d'ensemble simpliciaux (on a pas d'autres relations à vérifier puisque  $\Delta_k^n$  est l'ensemble des morphismes  $[k] \rightarrow [n]$  dans  $\Delta$  sans aucune autre condition.  $\square$

On déduit du lemme précédent que pour tout ensemble simplicial  $X_{\bullet}$ , on a un isomorphisme naturel

$$(11) \quad \text{colim}_{\substack{\Delta_{\bullet}^n \rightarrow X_{\bullet} \\ (n \geq 0)}} \Delta_{\bullet}^n \cong X_{\bullet}.$$

*Remarque 3.1.14.* La collection des ensembles simpliciaux  $\Delta_{\bullet}^n$  forme elle même un objet cosimplicial dans les ensembles simpliciaux. C'est une instance du fait que  $\text{Hom}_{\Delta}(-, -)$  est un foncteur  $\Delta^{op} \times \Delta \rightarrow \mathbf{Ens}$  et donc naturellement un objet simplicial et cosimplicial.

Le lemme suivant explique pourquoi la connaissance des simplexes non-dégénérés détermine canoniquement un ensemble simplicial.

**Lemme 3.1.15.** Un simplexe dégénéré est obtenu comme une composée de dégénérescences d'un *unique* simplexe non-dégénéré.

*Exemple 3.1.16 (complexes simpliciaux).* Tout complexe simplicial donne lieu à un ensemble simplicial canonique<sup>53</sup> obtenu comme l'ensemble simplicial dont les simplexes non-dégénérés sont exactement les simplexes de  $K$  auquel on a rajouté "librement" toutes leur dégénérescences itérées (en respectant bien sûr les relations simpliciales (10) ce qui détermine les faces des simplexes dégénérés ainsi ajoutés et lesquels sont identifiés entre eux). Une formule précise est obtenue ainsi. On

53. à un choix de bijection entre les sommets de  $K$  près

choisit un ordre total (préservant l'orientation si on en a choisi une) sur les sommets  $\{v_i, i \in I\}$  de  $K$  et on considère l'ensemble simplicial  $K_\bullet$  donné par

$$K_n := \{(v_{i_0} \leq v_{i_1} \leq \cdots \leq v_{i_n}) / \{v_{i_0}, \cdots, v_{i_n}\}\} \text{ est un simplexe de } K$$

les suites ordonnées de sommets (avec répétitions éventuelles) de longueur  $n + 1$  dont la réunion des sommets distincts est un simplexe de  $K$  (de dimension forcément inférieure ou égale à  $n$ ). On définit les faces et dégénérescences par

$$\begin{aligned} d_j(v_{i_0} \leq v_{i_1} \leq \cdots \leq v_{i_n}) &= (v_{i_0} \leq \cdots \leq v_{i_{j-1}} \leq v_{i_{j+1}} \leq \cdots \leq v_{i_n}), \\ s_j(v_{i_0} \leq v_{i_1} \leq \cdots \leq v_{i_n}) &= (v_{i_0} \leq v_{i_0} \leq \cdots \leq v_{i_j} \leq v_{i_j} \leq \cdots \leq v_{i_n}), \end{aligned}$$

c'est à dire en omettant le  $j$ -ième sommet ou en doublant le  $j$ -ième sommet respectivement.

Un simplexe non-dégénéré de dimension  $n$  est donc précisément une suite strictement croissante  $(v_{i_0} < v_{i_1} < \cdots < v_{i_n})$  qui correspond à un simplexe de dimension  $n$  de  $K$ . Les faces d'un simplexe non-dégénéré sont alors exactement les restrictions aux faces respectives du simplexe dans  $K$ .

*Remarque 3.1.17.* L'ensemble simplicial correspondant (via la construction précédente) au simplexe standard  $\Delta^n$  (muni de l'ordre correspondant à la numérotation des coordonnées) est exactement le  $n$ -simplexe simplicial  $\Delta_\bullet^n$  de l'exemple 3.1.2.

**Définition 3.1.18** (*réalisation géométrique*). Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial. Sa réalisation géométrique est l'espace topologique quotient

$$|X_\bullet| := \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \Delta^n / \sim$$

où  $X_n$  est muni de la topologie discrète et la relation d'équivalence est donnée par

$$(d_i(x), \underline{t}) \sim (x, d^i(\underline{t})), \quad (s_j(y), \underline{t}) \sim (y, s^j(\underline{t})) \quad \text{pour } .$$

L'ensemble singulier d'un espace topologique  $Y$  est l'ensemble simplicial

$$\text{Sing}_\bullet(Y) := \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_\bullet, Y)$$

où la structure simpliciale est donnée par la structure cosimpliciale des simplexes standards (voir exemple 3.1.8).

La réalisation géométrique et l'ensemble singuliers réalisent naturellement des foncteurs  $\mathbf{sEns} \rightarrow \mathbf{Top}$ ,  $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sEns}$  respectivement.

**Proposition 3.1.19.**

- (1) La réalisation géométrique est adjoint à gauche du foncteur ensemble singulier :  $|-| : \mathbf{sEns} \rightleftarrows \mathbf{Top} : \text{Sing}_\bullet(-)$ .
- (2) La réalisation géométrique  $|X_\bullet|$  d'un complexe simplicial est un CW-complexe dont les cellules de dimension  $n$  sont en bijection avec les  $n$ -simplexes non-dégénérés de  $X$  et les applications de recollement sont données par la réunion des faces.

*Remarque 3.1.20.*

- (1) En particulier la réalisation géométrique commute avec les colimites (comme tout adjoint à gauche) et le foncteur ensemble singulier  $\text{Sing}_\bullet(-)$  commute avec les limites (comme tout adjoint à droite).

- (2) Si  $X_\bullet$  est fini, alors sa réalisation géométrique est un CW-complexe fini et donc est compact.
- (3) L'adjonction de la proposition s'étend aux catégories pointées.

*Démonstration.* Soit  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, \text{Sing}_\bullet(Y))$ . Par définition cela veut dire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a des applications  $f_n : X_n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n, Y)$  qui commutent avec les faces et dégénérescences. On lui associe une application  $\bar{\psi}(f_\bullet) : \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \Delta^n \rightarrow Y$  définie sur chaque composante  $X_n \times \Delta^n$  par la formule  $(x_n, \bar{t}) \mapsto f_n(x_n)(\bar{t})$ . Cette application est continue puisque  $X_n$  est discret et que  $f_n(x_n) : \Delta^n \rightarrow Y$  l'est. Par ailleurs, puisque  $f_\bullet$  est simpliciale, on a que  $f_n(d_i(x_{n+1}))(\bar{t}) = (d_i f_{n+1}(x_{n+1}))(\bar{t}) = f_{n+1}(x_{n+1})(d_i^*(\bar{t}))$  et de même  $f_n(s_j(x_{n-1}))(\bar{t}) = f_{n-1}(x_{n-1})(s_j^*(\bar{t}))$ . Il suit que  $\bar{\psi}(f_\bullet)$  passe au quotient pour définir une application continue  $\psi(f_\bullet) : |X_\bullet| \rightarrow Y$ .

Réciproquement, si  $h : |X_\bullet| \rightarrow Y$  est une application continue, on lui associe, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'application  $\phi(h)_n : X_n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n, Y)$  donnée par  $x_n \mapsto \phi(h)_n(x_n) = (t \mapsto h([x_n, \bar{t}]))$  où  $[x_n, \bar{t}] \in |X_\bullet|$  est la classe de  $(x_n, \bar{t}) \in X_n \times \Delta^n$  vu dans le quotient qu'est la réalisation géométrique. De manière analogue à ci-dessus, on voit que pour tout  $x_n \in X_n$  on a que  $\phi(h)_n(x_n)$  est bien continue et que la collection  $\phi(h) = (\phi(h)_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un morphisme d'ensemble simpliciaux. Les formules explicites nous donnent que  $\phi \circ \psi(f_\bullet) = f_\bullet$  et que  $\psi \circ \phi(h) = h$  et ce sont donc des bijections. Leur naturalité se déduit des mêmes formules. Ainsi  $\phi$  est un isomorphisme naturel  $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X_\bullet|, Y) \cong \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_\bullet, \text{Sing}_\bullet(Y))$  (d'inverse  $\psi$ ).  $\square$

*Remarque 3.1.21.* De la preuve découle immédiatement que l'unité de l'adjonction est le morphisme  $\eta_{X_\bullet} : X_\bullet \rightarrow \text{Sing}_\bullet(|X_\bullet|)$  donné par  $X_n \ni x \mapsto (\bar{t} \mapsto [(x, \bar{t})])$  où  $[-]$  désigne la classe dans le quotient définissant la réalisation géométrique.

La counité de l'adjonction est l'application naturelle  $\delta_Y : |\text{Sing}_\bullet(Y)| \rightarrow Y$  donnée par  $[(\Delta^n \xrightarrow{f} Y, \bar{t})] \mapsto f(\bar{t})$ .

*Exemple 3.1.22 (le retour des complexes simpliciaux).* La réalisation géométrique de l'ensemble simplicial  $K_\bullet$  associé à un complexe simplicial (exemple 3.1.16) est canoniquement homéomorphe à la réalisation du complexe simplicial  $|K|$ . En effet, il s'agit simplement du complexe cellulaire obtenu en identifiant en dimension  $n$  les faces de chaque  $n$ -simplexe de  $K$  à leur image dans  $K^{(n-1)}$  ! En fait, la réalisation  $|K|$  est un CW-complexe dont les applications de recollement sont injectives (et affines une fois plongée).

*Exercice 3.1.23.* Identifier la structure simpliciale de l'ensemble simplicial qui a exactement deux simplexes non-dégénérés, un en degré 0 et 1 en degré 1. Démontrer que sa réalisation géométrique est un cercle.

Donner un ensemble simplicial  $S_k^n$  modélisant une sphère de dimension  $n$  tel que  $S_k^n$  est de cardinal  $1 + k^n$ .

*Exemple 3.1.24 (ensemble simplicial constant).* Un ensemble  $E$  donne lieu à un ensemble simplicial constant  $E_\bullet$  défini par  $E_n = E$  avec les faces et les dégénérescences données par l'identité. Sa réalisation géométrique est juste  $E$  muni de la topologie discrète.

Plus généralement tout ensemble simplicial dont la réalisation géométrique est homotope (faiblement homotope suffit en vertu du théorème de Whitehead) à un espace topologique discret est appelé discret également.

*Remarque 3.1.25.* La construction de la réalisation géométrique utilise le fait qu'on a un espace topologique cosimplicial "naturel", donné par les  $\Delta^n$ . Cette construction s'applique ainsi plus généralement pour des objets simpliciaux lorsque on a un objet cosimplicial naturel, voir l'exercice 6 de la feuille de TD 4.

Une conséquence de la proposition 3.1.19 est que la réalisation géométrique a son image essentielle dans la catégorie des CW-complexes et en particulier dans celle des espaces Hausdorff compactement engendrés<sup>54</sup>. On note  $\mathbf{CGH} - \mathbf{Top}$  cette sous-catégorie de  $\mathbf{Top}$ . La réalisation géométrique a la propriété remarquable suivante.

**Proposition 3.1.26.** Le foncteur de réalisation géométrique commute aux limites (en particulier aux produits) finies dans  $\mathbf{CGH} - \mathbf{Top}$ . En particulier, la réalisation géométrique d'un produit d'ensembles simpliciaux *finis* commute avec les produits.

*Démonstration.* Le point essentiel pour les produits est le fait que  $\Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^m$  est une décomposition cellulaire de  $I^{n+m} \cong \Delta^{n+m} \cong |\Delta_\bullet^{n+m}|$ . Voir [11] pour une preuve.  $\square$

Des propriétés de finitude sont essentielles si on veut obtenir des limites dans  $\mathbf{Top}$ . En effet, le produit dans  $\mathbf{Top}$  de deux CW-complexes non localement finis n'est pas un CW-complexe en général.

*Remarque 3.1.27* (Filtration canonique). On a vu que la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial est un CW-complexe. La filtration canonique de ce CW-complexe provient en fait d'une filtration au niveau de l'ensemble simplicial. Soit  $X_\bullet$  un ensemble simplicial. Le *n-squelette* de  $X_\bullet$  est le sous-ensemble simplicial  $X_\bullet^{\leq n} \subset X_\bullet$  engendré par les simplexes non-dégénérés de  $X_\bullet$  de dimension  $\leq n$  (autrement dit, on retire tous les simplexes non-dégénérés de dimension  $> n$  et leurs dégénérescences). On a

$$(12) \quad X_\bullet = \operatorname{colim}_n X_\bullet^{\leq n}.$$

Tout comme les CW-complexes s'obtiennent inductivement en recollant des cellules de dimension de plus en plus grande, les ensembles simpliciaux se reconstruisent à partir de leurs sommets. Soit  $X_\bullet \in \mathbf{sEEns}$ . Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $ND(X)_n$  le sous-ensemble des  $n$ -simplexes non-dégénérés de  $X_\bullet$ . Pour tout  $x \in ND(X)_n$ , par l'exemple 3.1.12, on obtient un morphisme d'ensemble simplicial  $x : \Delta_\bullet^n \rightarrow X_\bullet^{\leq n}$ . La composition  $\partial\Delta_\bullet^n \hookrightarrow \Delta_\bullet^n \xrightarrow{x} X_\bullet^{\leq n}$  a son image dans  $X_\bullet^{\leq n-1}$  puisque  $\partial\Delta_\bullet^n$  n'a que des simplexes non-dégénérés en degré  $\leq n-1$ .

*Lemme 3.1.28.* Le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{ND(X)_n} \partial\Delta_\bullet^n & \longrightarrow & X_\bullet^{\leq n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{ND(X)_n} \Delta_\bullet^n & \longrightarrow & X_\bullet^{\leq n} \end{array}$$

est un poussé en avant ; autrement dit  $X_\bullet^{\leq n} \cong \left( \coprod_{ND(X)_n} \Delta_\bullet^n \right) \coprod_{\coprod_{ND(X)_n} \partial\Delta_\bullet^n} X_\bullet^{\leq n-1}$ .

<sup>54</sup> c'est à dire ceux qui sont Hausdorff et tels qu'un ensemble est fermé si et seulement si son intersection avec tout compact est fermée. Par exemple un CW-complexe !

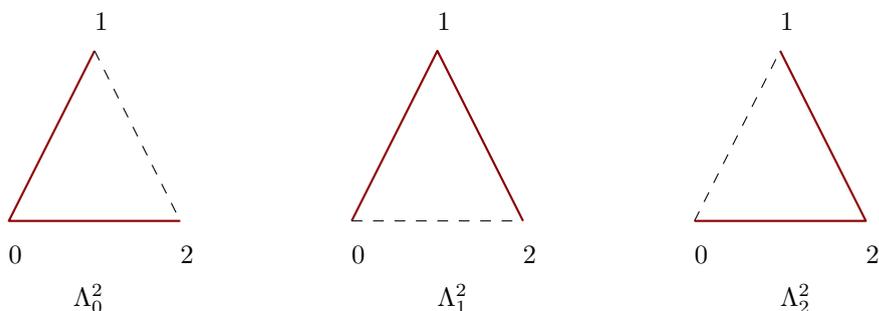


FIGURE 6. La réalisation (en rouge) des 3 cornets possibles dans  $\Delta^2$  (la face retirée est représentée en pointillé).

*Démonstration.* Cela suit du lemme 3.1.13 et du fait que les (co)limites se calculent degré par degré dans  $\mathbf{sEns}$ .  $\square$

### 3.2. STRUCTURE DE MODÈLE

On va ici définir une structure de modèle Quillen équivalente à celle de  $\mathbf{Top}$ . On commence par définir deux familles d'ensembles simpliciaux utiles.

**Définition 3.2.1.** On note  $\partial\Delta_{\bullet}^n$  le sous-ensemble simplicial déduit de  $\Delta_{\bullet}^n$  en enlevant le  $n$ -simplexe non-dégénéré.

Pour tout  $0 \leq r \leq n$ , on définit aussi  $\Lambda_{r,\bullet}^n$ , appelé le  $r$ -cornet, le sous-ensemble simplicial de  $\partial\Delta_{\bullet}^n$  obtenu en retirant aussi la face opposée au sommet  $r$ . Autrement dit  $\Lambda_{r,m}^n$  est le sous-ensemble des applications croissantes  $f : [m] \rightarrow [n]$  dont l'image ne contient pas l'ensemble  $[n] - \{j\}$ .

Par définition,  $\partial\Delta_{\bullet}^n$  est l'ensemble simplicial correspondant au complexe simplicial  $\partial\Delta^n$  obtenu en prenant toutes les faces du complexe standard. Sa structure est donc donnée par l'exemple 3.1.16 et sa réalisation géométrique est la sphère de dimension  $n - 1$ . On a en particulier que  $\partial\Delta_k^n = \{f : [k] \rightarrow [n] \in \Delta, f \text{ non-surjective}\}$

De même, le  $r$ -cornet  $\Lambda_{r,\bullet}^n$  est l'ensemble simplicial correspondant au complexe simplicial obtenu en prenant toutes les faces sauf l'intérieur de la  $r$ -ième dans le complexe simplicial standard. Sa réalisation géométrique est donc un cône de sommet  $r$ . En particulier,  $|\partial\Delta_{\bullet}^n| \cong \partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n = |\Delta_{\bullet}^n|$  est une cofibration et  $\Lambda_r^n := |\Lambda_{r,\bullet}^n| \hookrightarrow \Delta^n = |\Delta_{\bullet}^n|$  est une cofibration acyclique (et même un rétract par déformation forte, homéomorphe à l'inclusion d'une face  $I^{n-1} \times \{0\}$  un cube  $I^n$ ).

On notera aussi  $*_{\bullet}$  l'ensemble simplicial terminal qui est donné par le point  $\{*\}$  en tout degré  $n$ .

**Définition 3.2.2** (*Fibrations de Kan*). Un morphisme  $f : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$  d'ensemble simpliciaux est une fibration de Kan si elle vérifie la propriété de relèvement à droite par rapport aux inclusions  $\Lambda_r^n \hookrightarrow \Delta_{\bullet}^n$  pour tout  $n$  et tout  $r = 0 \dots n$ . C'est à dire qu'il existe un relèvement  $h$  dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda_{r,\bullet}^n & \longrightarrow & X_{\bullet} \\
 \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\
 \Delta_{\bullet}^n & \longrightarrow & Y_{\bullet}
 \end{array}$$

rendant les deux triangles commutatifs.

Un ensemble simplicial  $X_\bullet$  est *fibrant* (on dit aussi de Kan ou Kan-fibrant) si  $X_\bullet \rightarrow *_\bullet$  est une fibration de Kan.

De la définition des cornets comme sous-ensembles simpliciaux de  $\Delta_\bullet^n$  et du lemme de Yoneda 3.1.13 on déduit

**Lemme 3.2.3.** L'ensemble  $\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Lambda_{r,\bullet}^n, X_\bullet)$  est en bijection avec l'ensemble des  $n$ -uplets de  $n-1$ -simplexes  $(x_0, \dots, \widehat{x_r}, \dots, x_n)$  de  $X_\bullet$  vérifiant que pour tout  $i, j \neq r$  et  $i < j$ , on a  $dx_j = d_{j-1}x_i$ .

*Démonstration.* Voir le TD 4. □

*Remarque 3.2.4.* Un ensemble simplicial n'est pas toujours fibrant. Par exemple  $\Delta_\bullet^n$  n'est pas fibrant pour  $n \geq 1$  comme le montre la figure 7 ou l'exemple 3.3.4).

**Lemme 3.2.5.** Une application  $f : X \rightarrow Y$  entre espaces topologiques est une fibration de Serre si et seulement si  $\text{Sing}_\bullet(f) : \text{Sing}_\bullet(X) \rightarrow \text{Sing}_\bullet(Y)$  est une fibration de Kan.

En particulier  $\text{Sing}_\bullet(X)$  est fibrant.

*Démonstration.* L'adjonction 3.1.19 donnée par la réalisation géométrique donne une bijection entre les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{r,\bullet}^n & \longrightarrow & \text{Sing}_\bullet(X) \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow \text{Sing}_\bullet(f) \\ \Delta_\bullet^n & \longrightarrow & \text{Sing}_\bullet(Y) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_r^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \Phi_h & \downarrow f \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Comme  $\Lambda_r^n$  est un rétracte par déformation de  $\Delta^n$  et un sous complexe, la propriété de relèvement à droite caractérise les fibrations de Serre (cf lemme 1.5.9). Le résultat en découle. □

**Théorème 3.2.6** (Quillen). La catégorie  $\mathbf{sEns}$  a une structure de modèle dont les **équivalences faibles** : sont les morphismes  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  tels que  $|f| : |X_\bullet| \rightarrow |Y_\bullet|$  sont des équivalences d'homotopie faibles, **fibrations** : sont les fibrations de Kan, **cofibrations** : sont les morphismes  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques.

Nous renvoyons à [7], [10] et [12] pour une preuve détaillée. Nous nous bornons ici à donner les grandes lignes et résultats intermédiaires principaux et importants.

Quillen démontre aussi la caractérisation très simple et remarquable suivante des cofibrations : il s'agit de celles qui sont des inclusions en chaque degré, cf proposition 3.2.9 ci-dessous.

Les fibrations et fibrations acycliques sont caractérisées par le lemme suivant qui est un point clé.

**Lemme 3.2.7.** Soit  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  un morphisme dans  $\mathbf{sEns}$ .

- (1) On a que  $f$  est une fibration acyclique si et seulement si elle a la propriété de relèvement par rapport aux applications  $\partial\Delta_\bullet^n \hookrightarrow \Delta_\bullet^n$ .
- (2) On a que  $f$  est une fibration si et seulement si elle a la propriété de relèvement par rapport aux applications  $L_\bullet \times \Delta_\bullet^1 \cup K_\bullet \times \{0\} \hookrightarrow K_\bullet \times \Delta_\bullet^1$  pour toute inclusion (degré par degré)  $L_\bullet \hookrightarrow K_\bullet$ .

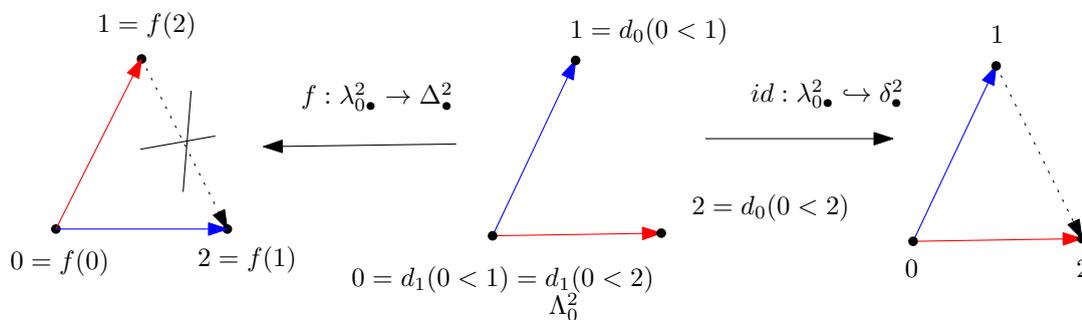


FIGURE 7. Deux morphismes de  $\Lambda_{0,\bullet}^2 \rightarrow \Delta_0^2$ . Celui de droite, qui est l'identité admet évidemment un relèvement depuis  $\Delta_\bullet^2$  mais celui de gauche n'en admet pas car  $f(1) > f(2)$ .

- (3) Si  $A_\bullet \xrightarrow{\sim} B_\bullet$  est une cofibration acyclique, alors pour toute inclusion (degré par degré)  $L_\bullet \hookrightarrow K_\bullet$ , le morphisme  $L_\bullet \times B_\bullet \cup_{L_\bullet \times A_\bullet} K_\bullet \times A_\bullet \hookrightarrow K_\bullet \times B_\bullet$  est une cofibration acyclique.

*Démonstration.* Pour le point (1), on renvoie à [10] ou [7] pour une preuve complète (et non-triviale ; les ingrédients sont la théorie des fibrations de Kan minimales et la proposition 3.2.11).

Explicitons un peu la preuve de (2). L'idée est de montrer que la classe des applications stables par poussés-en-avant et rétractes à partir des inclusions de cornet ou à partir des inclusions de type (2) sont les mêmes. En effet, si c'est le cas, les applications définies par propriété de relèvement à droite seront bien les mêmes et la première classe est par définition celle des fibrations.

Esquissons pourquoi  $L_\bullet \times \Delta_\bullet^1 \cup K_\bullet \times \{0\} \hookrightarrow K_\bullet \times \Delta^1$ , avec  $L_\bullet \hookrightarrow K_\bullet$  une inclusion, est une composition (dénombrable) de pushouts par des applications du type  $\Lambda_r^n \hookrightarrow \Delta_\bullet^n$ , on procède comme suit. Notons pour simplifier  $Y^0 := L_\bullet \times \Delta_\bullet^1 \cup K_\bullet \times \{0\}$ . On note  $S_0$  les 0-simplexes de  $K_\bullet \times \Delta_\bullet^1$  qui ne sont pas dans  $Y^0$ . Un simplexe  $s \in S_0$  est un simplexe de la forme  $k \times \{1\} \in K_\bullet \times \Delta_\bullet^1$  où  $k \notin L_0$ . On note  $Y^1 := Y^0 \coprod_{\coprod_{S_0} \Lambda_1^1} (\coprod_{S_0} \Delta_\bullet^1)$  le

poussé en avant obtenu en recollant les points de  $S_0$  comme l'extrémité d'un segment  $\Delta_\bullet^1$  (faire un dessin). Par construction, tout sommet de  $K_\bullet \times \Delta_\bullet^1$  est inclus dans  $Y^1$ , de même que tout 1-simplexe de la forme  $v \times id_{[1]}$  où  $v \in K_1$  est dégénéré (autrement dit l'image d'un sommet) et  $id_{[1]} \in \Delta_1^1$  est l'unique 1-simplexe non dégénéré. Soit  $z \in Y_1$ , un 1-simplexe de  $K_\bullet \times \Delta_\bullet^1$  qui ne soit pas dans  $Y^1$ . Alors  $z$  s'écrit sous la forme  $z = k_1 \times \{1\}$  ou  $z = k_1 \times id_{[1]}$  (avec  $k_1 \notin L_1$  et non dégénéré) (en effet tous ceux de la forme  $z = k_0 \times id_{[1]}$ , avec  $k_0$  un simplexe dégénéré identifié avec un sommet de  $K_0 \setminus L_0$ , ont été ajoutés à la première étape et les autres sont déjà dans  $Y^0$ ). Soit  $S_1$  l'ensemble de ceux de la première forme. Considérons ce premier cas : alors  $d_i(k_1 \times \{1\}) = d_i(k_1) \times \{1\}$  et on est dans une situation correspondant au

diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 d_0(k_1) \times \{0\} & \xrightarrow{d_0(k_1) \times id_{[1]}} & d_0(k_1) \times \{1\} \\
 \uparrow k_1 \times \{0\} & \nearrow k_1 \times id_{[1]} & \uparrow k_1 \times \{1\} \\
 d_1(k_1) \times \{0\} & \xrightarrow{d_1(k_1) \times id_{[1]}} & d_1(k_1) \times \{1\}
 \end{array}$$

dans lequel les flèches solides représentent des 1-simplexes de  $Y^1$ , les pointillées et les faces<sup>55</sup> sont dans  $(K_\bullet \times \Delta_\bullet^1)^{\leq 2}$ . On a une application canonique de  $\Lambda_1^2 \rightarrow Y^1$  donnée par la flèche verticale de gauche et la flèche horizontale du dessus. Le poussé en avant  $\Delta_\bullet^2 \coprod_{\Lambda_1^2} Y^1$  associé permet de rajouter le triangle supérieur du diagramme à  $Y^1$ .

Ce faisant, nous avons aussi nécessairement recollé tous les 1-simplexes de la forme  $k_1 \times id_{[1]}$  (puisque ceux-ci viennent nécessairement en compagnie d'un 1-simplexe adjacent  $k_1 \times \{1\}$ ). On appelle  $Y^2$  le recollement obtenu indiqué par tous les éléments de  $S_1$ . On construit de même  $S_2$  et  $Y_3$  en recollant des prismes ouverts et ainsi de suite. On renvoie à [7] pour une preuve détaillée.

Pour démontrer que les rétractes et compositions vis à vis des cornets sont bien dans la classe des applications stables par poussés-en-avant et rétractes à partir de celles données par (2), il suffit de remarquer que les inclusions de cornet sont des rétractes d'applications simpliciales du type (2), plus précisément un rétract de  $\Lambda_{k_\bullet}^n \times \Delta_\bullet^1 \cup \Delta_\bullet^n \times \{0\} \rightarrow \Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^1$  si  $k < n$ , et de  $\Lambda_{n_\bullet}^n \times \Delta_\bullet^1 \cup \Delta_\bullet^n \times \{1\} \rightarrow \Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^1$  si  $k = n$ .

Pour (3), l'idée est similaire à (2). Ayant fixé  $L_\bullet \hookrightarrow K_\bullet$ , on obtient que la classe des morphismes de la forme  $L_\bullet \times B'_\bullet \cup_{L_\bullet \times A'_\bullet} K_\bullet \times A'_\bullet \hookrightarrow K_\bullet \times B'_\bullet$  stables par poussés-en-avant et rétractes des morphismes [11] ou [10].  $\square$

On en déduit :

**Proposition 3.2.8.** La catégorie **sEns** est cofibrément engendrée, combinatoire, avec les applications  $(\partial\Delta_\bullet^n \hookrightarrow \Delta_\bullet^n)_{n \in \mathbb{N}}$  comme cofibrations génératrices et les applications  $\Lambda_r^n \hookrightarrow \Delta_\bullet^n$  (où  $0 \leq r \leq n$  et  $n > 0$ ) comme cofibrations acycliques génératrices.

*Démonstration.* Cela suit principalement du Théorème 3.2.6 et Lemme (1) qui assure que les fibrations sont bien les applications injectives par rapport à l'ensemble  $(\partial\Delta_\bullet^n \hookrightarrow \Delta_\bullet^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Que les inclusions de cornet soient des cofibrations acycliques génératrices est simplement la définition des fibrations de Kan. Il suit essentiellement du Lemme 3.1.13 que les sources des cofibrations génératrices sont petites (et qu'en fait tout ensemble simplicial est petit relativement au cardinal de l'ensemble de ses sommets comme il suit de (12) et du lemme 3.1.28). De même une fois que l'on a montré que la catégorie est cofibrément engendrée, qu'elle soit combinatoire découle du lemme 3.1.28; les objets  $(\partial\delta_\bullet^n, \Delta_\bullet^n)_{n \geq 0}$  sont en effet générateurs de la catégorie (et compacts, en particulier petits).  $\square$

**Proposition 3.2.9.** Un morphisme  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  est une cofibration si et seulement si c'est une inclusion en tout degré.

<sup>55</sup>. ces faces sont précisément données par  $s_0(k_1) \times s_1(id_{[1]})$  et  $s_1(k_1) \times s_0(id_{[1]})$  qui ne sont pas dégénérées

*Démonstration.* Cela découle essentiellement du point (1) de la proposition 3.2.8. Notons que la propriété d'être une injection est stable par rétracte comme on l'a vu, mais aussi par poussé-en-avant et colimite indicée par un ordinal. Il suit alors que, comme les morphismes  $\partial\Delta_{\bullet}^n \hookrightarrow \Delta_{\bullet}^n$  sont injectifs et les cofibrations des rétractes de compositions de poussés-en-avant par des cofibrations génératrices, que toute cofibration est injective. La réciproque se voit ainsi : il suffit de montrer que tout morphisme  $X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$  injectif est une colimite séquentielle de tels poussés en avant. On pose  $Y^0 = X_{\bullet}$  et on construit inductivement  $Y^{n+1} \hookrightarrow Y_{\bullet}$  comme le poussé en avant  $Y^{n+1} = Y^n \coprod_{\coprod_{ND_n} \partial\Delta_{\bullet}^n} \coprod_{ND_n} \Delta_{\bullet}^n$  où  $ND_n$  est l'ensemble des  $n$ -simplexes

non dégénérés de  $Y_{\bullet}$  qui ne sont pas dans  $Y^n$  ; chaque tel simplexe définissant un morphisme simplicial  $x : \Delta_{\bullet}^n \rightarrow Y_{\bullet}$  par le lemme 3.1.13 dont la restriction à  $\partial\Delta_{\bullet}^n$  a son image dans  $Y^n$ . L'application  $Y^{n+1} \hookrightarrow Y_{\bullet}$  est alors donné par le poussé en avant. On peut vérifier que l'inclusion  $Y^{n+1} \hookrightarrow Y_{\bullet}$  ainsi définie est un isomorphisme en degré inférieur ou égal à  $n$ . La colimite  $\text{colim}_n Y^n$  est égale à  $Y_{\bullet}$ .  $\square$

*Remarque 3.2.10.* En particulier, tout *ensemble simplicial est cofibrant*.

La réalisation géométrique se comporte par ailleurs bien par rapport aux fibrations :

**Proposition 3.2.11** (Quillen). La réalisation géométrique d'une fibration de Kan est une fibration de Serre.

On renvoie à [10] pour une preuve <sup>56</sup>.

Soit  $X_{\bullet}, Y_{\bullet}$  des ensembles simpliciaux. L'ensemble des morphismes  $\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_{\bullet}, Y_{\bullet})$  peut être *enrichi* dans  $\mathbf{sEns}$  (c'est à dire muni d'une structure d'ensemble simplicial dont les sommets sont exactement les morphismes d'ensembles simpliciaux).

**Définition 3.2.12.** On note  $\text{Map}_{\bullet}(X_{\bullet}, Y_{\bullet})$  l'ensemble simplicial dont les  $n$ -simplexes sont

$$\text{Map}_n(X_{\bullet}, Y_{\bullet}) := \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X_{\bullet} \times \Delta_{\bullet}^n, Y_{\bullet})$$

dont la structure simpliciale est donnée par la structure cosimpliciale de  $n \mapsto \Delta_{\bullet}^n$  (voir remarque 3.1.14).

Les 0-simplexes de  $\text{Map}_{\bullet}(X_{\bullet}, Y_{\bullet})$  sont donc précisément les morphismes d'ensembles simpliciaux de  $X_{\bullet}$  vers  $Y_{\bullet}$  <sup>57</sup>.

**Lemme 3.2.13.** On a un isomorphisme naturel (en les 3 variables)

$$\text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(L_{\bullet}, \text{Map}_{\bullet}(K_{\bullet}, X_{\bullet})) \cong \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(L_{\bullet} \times K_{\bullet}, X_{\bullet})$$

*Démonstration.* L'application  $\psi : \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(L_{\bullet}, \text{Map}_{\bullet}(K_{\bullet}, X_{\bullet})) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(L_{\bullet} \times K_{\bullet}, X_{\bullet})$  est donnée explicitement par

$$f = (f_n)_{n \geq 0} \mapsto (L_{\bullet} \times K_{\bullet} \xrightarrow{f \times \text{id}} \text{Map}_{\bullet}(K_{\bullet}, X_{\bullet}) \times K_{\bullet} \xrightarrow{\text{eval}} X_{\bullet})$$

<sup>56.</sup> si la fibration de Kan  $X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$  est acyclique, on peut démontrer plus facilement que sa réalisation est un rétracte d'une projection  $|W_{\bullet}| \times |Y_{\bullet}| \rightarrow |Y_{\bullet}|$  (ce qui provient du résultat analogue avant de passer aux réalisations) où  $W_{\bullet}$  est contractile et donc une fibration de Serre ; forcément acyclique par définition des équivalences faibles

<sup>57.</sup> et on doit penser à ses 1-simplexes comme les chemins ou homotopies entre morphismes etc

où le morphisme d'évaluation  $eval = (eval_n : \text{Map}_n(K_\bullet, X_\bullet) \times K_n \rightarrow X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donnée, en tout degré  $n \in \mathbb{N}$ , pour  $h_n \in \text{Map}_n(K_\bullet, X_\bullet) = \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(K_\bullet \times \Delta_\bullet^n, X_\bullet)$ <sup>58</sup> et  $\kappa_n \in K_n$ , par

$$eval_n(h_n, \kappa_n) := h_n(\kappa_n, [n] \xrightarrow{id} [n]).$$

On notera que dans la formule on utilise que la composante  $h_{n,n}$  de de degré  $n$  dans  $h_n = (h_{n,i} : K_i \times \Delta_i^n \rightarrow X_i)_{i \geq 0}$ . On a que pour tout  $h_n : K_\bullet \times \Delta_\bullet^n \rightarrow X_\bullet$ ,  $\kappa_n \in K_n$ ,

$$d_i(eval_n(h_n, \kappa_n)) = d_i(h_n(\kappa_n, [n] \xrightarrow{id} [n])) = h_n(d_i(\kappa_n), [n-1] \xrightarrow{d^i} [n]) \text{ car } h_n \text{ est simpliciale.}$$

Mais, comme la face  $d_i(h_n) : K_\bullet \times \Delta_\bullet^{n-1} \rightarrow X_\bullet$  est donné, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , par  $d_i(h_n)(\kappa_j, [j] \xrightarrow{p} [n-1]) = h_n(\kappa_j, [j] \xrightarrow{d_i^{op}} [n])$ , on a aussi que

$$\begin{aligned} eval_{n-1}(d_i(h_n), d_i(\kappa_n)) &= d_i(h_n)(d_i(\kappa_n), [n-1] \xrightarrow{id} [n-1]) \\ &= h_n(d_i(\kappa_n), [n-1] \xrightarrow{d^i} [n]) \end{aligned}$$

ce qui assure que  $eval$  commute bien avec les faces. On montre de même qu'il commute avec les  $s_j$  et ainsi que  $eval$  est bien un morphisme d'ensembles simpliciaux. Donc  $eval \circ f \times id$  est également un morphisme d'ensembles simpliciaux. la réciproque de  $\psi$  est construite comme suit. Notons, pour tout morphisme  $f : [k] \rightarrow [m]$  dans  $\Delta$  et tout ensemble simplicial  $Z_\bullet$ ,  $f^* : Z_m \rightarrow Z_k$  l'application induite par la structure simpliciale de  $Z_\bullet$ . On définit  $\varphi : \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(L_\bullet \times K_\bullet, X_\bullet) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(L_\bullet, \text{Map}_\bullet(K_\bullet, X_\bullet))$  comme donné, pour tout morphisme simplicial  $h_\bullet : L_\bullet \times K_\bullet \rightarrow X_\bullet$  et pour tout  $\ell_n \in L_n$ , par l'élément  $\varphi(h_\bullet)(\ell_n) : K_\bullet \times \Delta_\bullet^n \rightarrow X_\bullet$ , défini par la formule, pour tout  $\kappa_i \in K_i$  et  $[i] \xrightarrow{f} [n] \in \Delta_\bullet^n$ , donnée par

$$\varphi(h_\bullet)(\ell_n)(\kappa_i, [i] \xrightarrow{f} [n]) = h_i(f^*(\ell_n), \kappa_i) \in X_i.$$

Que  $\varphi(h_\bullet)(\ell_n) : K_\bullet \times \Delta_\bullet^n \rightarrow X_\bullet$  soit un morphisme d'ensemble simpliciaux découle du fait que  $h_\bullet$  en est un et que  $d_i = (d^i)^*$ . Par ailleurs, on vérifie comme pour  $\psi$  que  $\ell_n \mapsto \varphi(h_\bullet)$  est un morphisme d'ensembles simpliciaux de  $L_\bullet$  dans  $\text{Map}_\bullet(K_\bullet, X_\bullet)$ .

On vérifie alors que  $\varphi$  est bien un inverse de  $\psi$  (ce qui revient au même genre de calcul que le dernier point).  $\square$

Le point suivant est un point important. Notons que si  $i : L_\bullet \rightarrow K_\bullet$  et  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  sont des morphismes simpliciaux, alors, la pré-composition par  $i$  et la post-composition par  $f$  donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}_\bullet(K_\bullet, X_\bullet) & \xrightarrow{f \circ -} & \text{Map}_\bullet(K_\bullet, Y_\bullet) \\ \text{\scriptsize } - \circ i \downarrow & & \downarrow \text{\scriptsize } - \circ i \\ \text{Map}_\bullet(L_\bullet, X_\bullet) & \xrightarrow{f \circ -} & \text{Map}_\bullet(L_\bullet, Y_\bullet) \end{array}$$

dont on déduit un morphisme d'ensemble simplicial canonique  $\text{Map}_\bullet(K_\bullet, X_\bullet) \rightarrow \text{Map}_\bullet(L_\bullet, X_\bullet) \times_{\text{Map}_\bullet(L_\bullet, Y_\bullet)} \text{Map}_\bullet(K_\bullet, Y_\bullet)$ .

**Lemme 3.2.14.** Soit  $L_\bullet \subset K_\bullet$  une cofibration et  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  une fibration de Kan. Alors le morphisme canonique

$$\text{Map}_\bullet(K_\bullet, X_\bullet) \rightarrow \text{Map}_\bullet(L_\bullet, X_\bullet) \times_{\text{Map}_\bullet(L_\bullet, Y_\bullet)} \text{Map}_\bullet(K_\bullet, Y_\bullet)$$

<sup>58.</sup> on a donc que chaque  $h_n$  est une collection  $h_{n,i} : K_i \times \Delta_i^n \rightarrow X_i$  (pour  $i \in \mathbb{N}$ ) qui commute avec les opérateurs de face et dégénérescences. On omettra l'indice  $i$  dans la notation dans la suite

est une fibration de Kan.

Si de plus  $L_{\bullet} \subset K_{\bullet}$  est une cofibration acyclique<sup>59</sup> ou que  $f$  est une fibration acyclique, alors c'est une fibration acyclique.

*Démonstration.* Pour la première assertion, il faut montrer que  $\text{Map}_{\bullet}(\Delta_{\bullet}^1, X_{\bullet}) \rightarrow X_{\bullet}$  a la propriété de relèvement à droite par rapport aux inclusions  $\Lambda_{r,\bullet}^n \hookrightarrow \Delta_{\bullet}^n$ . Pour la deuxième partie, par la caractérisation des fibrations acycliques (lemme 3.2), il faut montrer que  $\text{Map}_{\bullet}(\Delta_{\bullet}^1, X_{\bullet}) \rightarrow X_{\bullet}$  a la propriété de relèvement à droite par rapport aux inclusions  $\partial\Delta_{\bullet}^n \hookrightarrow \Delta_{\bullet}^n$ . Démontrons la deuxième dans le cas  $L_{\bullet} \subset K_{\bullet}$  est une cofibration acyclique.

De la propriété fondamentale de  $\text{Map}_{\bullet}(Z_{\bullet}, W_{\bullet})$  donnée par le lemme 3.2.13, on déduit qu'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_{\bullet}^n & \longrightarrow & \text{Map}_{\bullet}(K_{\bullet}, X_{\bullet}) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta_{\bullet}^n & \longrightarrow & \text{Map}_{\bullet}(L_{\bullet}, X_{\bullet}) \times_{\text{Map}_{\bullet}(L_{\bullet}, Y_{\bullet})} \text{Map}_{\bullet}(K_{\bullet}, Y_{\bullet}) \end{array}$$

est équivalent à un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_{\bullet}^n \times K_{\bullet} \cup_{\partial\Delta_{\bullet}^n \times L_{\bullet}} \Delta_{\bullet}^n \times L_{\bullet} & \longrightarrow & X_{\bullet} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta_{\bullet}^n \times K_{\bullet} & \longrightarrow & Y_{\bullet} \end{array}$$

La flèche de gauche est une cofibration acyclique, c'est à dire a la propriété de relèvement par rapport à toutes les fibrations de Kan, d'après le lemme 3.2.(3). Le relèvement existe donc puisque la flèche de droite est une fibration de Kan. Si on a supposé que c'est  $f : X \rightarrow Y$  qui est une fibration acyclique, alors on raisonne de la même façon en utilisant seulement que la flèche de gauche est une cofibration (elle est injective).

Pour la première assertion, par le même argument, on est ramené à étudier l'existence de relèvement dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{r,\bullet}^n \times K_{\bullet} \cup_{\Lambda_{r,\bullet}^n \times L_{\bullet}} \Delta_{\bullet}^n \times L_{\bullet} & \longrightarrow & X_{\bullet} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta_{\bullet}^n \times K_{\bullet} & \longrightarrow & Y_{\bullet} \end{array}$$

et on a encore que la flèche de gauche est une cofibration acyclique (cette fois ci car  $\Lambda_{r,\bullet}^n \subset \Delta_{\bullet}^n$  l'est).  $\square$

La structure de modèle a pour conséquence le corollaire important suivant, qui explique pourquoi les ensembles simpliciaux encodent les types d'homotopie faibles.

**Corollaire 3.2.15** (Quillen). ) L'adjonction  $| - | : \mathbf{sEns} \rightleftarrows \mathbf{Top} : \text{Sing}_{\bullet}(-)$  est une équivalence de Quillen. En particulier les catégories homotopiques de  $\mathbf{Top}$  et  $\mathbf{sEns}$  sont équivalentes.

59. ce qui implique que sa réalisation géométrique est un rétracte par déformation

*Remarque 3.2.16.* Comme la réalisation géométrique se factorise au travers des CW-complexes et donc des espaces compactement engendrés de Hausdorff, cette équivalence de Quillen identifie aussi les catégories homotopiques des ensembles simpliciaux avec celle des types d'homotopies d'espaces homotopes à des CW-complexes.

En particulier la counité de l'adjonction  $\delta_Y : |\mathrm{Sing}_\bullet(Y)| \rightarrow Y$  est donc une équivalence d'homotopie faible pour tout espace  $Y$ . Comme  $|\mathrm{Sing}_\bullet(Y)|$  est un CW-complexe, cela prouve que tout espace topologique est fonctoriellement faiblement homotopiquement équivalent à un CW-complexe.

*Démonstration.* Nous ne donnons que les grandes lignes de l'argument. Il faut commencer par montrer que l'adjonction est de Quillen. Pour cela, il suffit de voir que l'ensemble simplicial  $\mathrm{Sing}_\bullet$  préserve fibrations et fibrations acycliques (d'où il découlera immédiatement que la réalisation géométrique préserve cofibrations et cofibrations acycliques Lemme 2.4.4). Or on a vu que  $\mathrm{Sing}_\bullet$  préserve les fibrations (lemme 3.2.5). Il préserve aussi les fibrations acycliques. En effet : par le lemme 3.2.(1) et l'argument du lemme 3.2.5, on a que  $\mathrm{Sing}_\bullet$  envoie les fibrations acycliques sur les applications ayant la propriété de relèvement par rapport aux inclusions  $S^{n-1} \hookrightarrow I^n$ . Or ces dernières sont exactement les fibrations de Serre acycliques (voir la feuille de TD 3). Ainsi  $\mathrm{Sing}_\bullet$  est de Quillen à droite et donc  $|-|$  de Quillen à gauche.

Pour voir que c'est une équivalence de Quillen, en vertu de la Proposition 2.4.21, il suffit de montrer que pour tout ensemble simplicial  $A_\bullet$  (nécessairement cofibrant) et tout espace topologique  $Y$  (nécessairement fibrant), on a qu'une application continue  $f : |A_\bullet| \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie faible si et seulement si le morphisme adjoint  $\phi_f : A_\bullet \rightarrow \mathrm{Sing}_\bullet(Y)$  est une équivalence faible dans  $\mathbf{sEns}$ , c'est à dire que  $|\phi_f| : |A_\bullet| \rightarrow |\mathrm{Sing}_\bullet(Y)|$  est une équivalence d'homotopie faible.

La counité de l'adjonction nous donne le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} |A_\bullet| & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow |\phi_f| & \nearrow \delta_Y \\ & |\mathrm{Sing}_\bullet(Y)| & \end{array}$$

Ainsi il suffit de montrer que la counité  $\delta_Y : |\mathrm{Sing}_\bullet(Y)| \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie faible. Pour cela on va utiliser les groupes d'homotopie simpliciaux de la section 3.3.

Comme  $\mathrm{Sing}_\bullet(Y)$  est fibrant, il résulte de la proposition 3.3.12 dans la section suivante que pour tout  $v \in Y$  (également identifié avec l'application constante  $\Delta^n \rightarrow Y$  qui vaut  $v$  en tout point), on a  $\pi_n(|\mathrm{Sing}_\bullet(Y)|, |v|) \cong \pi_n(\mathrm{Sing}_\bullet(Y), v)$  où les groupes d'homotopie à droite sont les groupes d'homotopie simpliciaux. Or on a vu dans le lemme 3.3.9 que tout élément de  $\pi_n(\mathrm{Sing}_\bullet(Y), v)$  est représenté par un morphisme  $\alpha : \Delta_\bullet^n \rightarrow \mathrm{Sing}_\bullet(Y)$  dont la restriction à  $\partial\Delta_\bullet^n$  est le morphisme constant  $v$ . Par adjonction, on a que ces morphismes sont en bijection avec ceux de  $\Delta^n \cong |\Delta_\bullet^n| \rightarrow Y$  qui envoie  $S^{n-1} \cong |\partial\Delta_\bullet^n|$  sur  $v$ . De même,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^1, \mathrm{Sing}_\bullet(Y)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta_\bullet^n \times \Delta_\bullet^1|, Y) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta_\bullet^n| \times |\Delta_\bullet^1|, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n \times I, Y) \end{aligned}$$

car le produit d'ensembles simpliciaux finis commute avec la réalisation géométrique (Proposition 3.1.26).  $\square$



FIGURE 8. La relation de symétrie à gauche et de transitivité à droite.

### 3.3. GROUPES D'HOMOTOPIE SIMPLICIAUX

On explique ici une version purement combinatoire des groupes d'homotopie. Au vu de la Proposition 2.2.14, les relations d'homotopie donnent une relation d'équivalence sur les morphismes si la source est cofibrante et la cible est fibrante. Dans les espaces topologiques, pour étudier les groupes d'homotopie, cela ne pose aucun problème puisque tout espace est fibrant et que les sphères sont cofibrantes (voir par ailleurs exercice 2.2.20). En revanche cette hypothèse ne tient plus pour des ensembles simpliciaux et va nous obliger à considérer des ensembles simpliciaux fibrants.

Commençons par la relation d'homotopie entre sommets.

**Définition 3.3.1.** Deux sommets  $x_0, x_1$  dans  $X_0$  sont dits homotopes, noté  $x_0 \sim x_1$  si il existe un 1-simplexe  $H \in X_1$  tel que

$$d_0(\sigma) = x_1 \quad \text{et} \quad d_1(\sigma) = x_0.$$

**Lemme 3.3.2.** Si  $X_\bullet$  est fibrant, la relation d'homotopie entre les sommets est une relation d'équivalence.

*Notation 3.3.3.* On note  $\pi_0(X_\bullet) := X_0 / \sim$  le quotient de  $X_0$  par la relation d'homotopie sur les sommets.

*Démonstration.* La réflexivité de  $\sim$  est donnée par  $s_0(x)$  et la relation  $d_0 s_0(x) = d_1 s_0(x) = x$ . La symétrie et la transitivité sont exhibées par la figure 8 où on a dessiné en rouge deux arêtes données et en pointillé bleu l'arête qui existe par propriété de relèvement d'un morphisme du 2-simplexe par rapport à un morphisme défini seulement sur un cornet.

□

*Exemple 3.3.4.* Montrons que la relation d'homotopie n'est pas symétrique sur  $\Delta_\bullet^n$  (pour  $n \geq 1$ ). Ce qui en particulier prouve que ce dernier n'est pas fibrant. Considérons les sommets 0 et 1 (donné par les applications  $0 \mapsto 0, 1$ ), le 1-simplexe non dégénéré  $f(0) = 0, f(1) = 1$  donne une homotopie entre 0 et 1. Mais il n'y a aucune arête de 1 vers 0 car une telle arête serait une application strictement décroissante de  $[1]$  dans  $[n]$ .

**Lemme 3.3.5.** Si  $X_\bullet$  est fibrant, on a un isomorphisme naturel  $\pi_0(X_\bullet) \cong \pi_0(|X_\bullet|)$ .

*Démonstration.* Notons, pour  $v \in X_0$ ,  $X_{\bullet,v}$  le sous-ensemble simplicial formés de tous les simplexes dont l'une des faces itérées est  $v$ . Par le lemme précédent, on a

que si  $v \sim w$ , alors  $X_{\bullet|v} = X_{\bullet|w}$ . On en déduit que  $X_{\bullet} = \coprod_{[v] \in \pi_0(X_{\bullet})} X_{\bullet|v}$ . Puisque la réalisation géométrique commute avec les colimites, on a  $|X_{\bullet}| \cong \coprod_{[v] \in \pi_0(X_{\bullet})} |X_{\bullet|v}|$ . Par ailleurs, tout simplexe de  $X_{\bullet|v}$  est relié à  $v$  par une suite de faces. Il suit de la description explicite de la réalisation géométrique que  $|X_{\bullet|v}|$  est connexe par arcs. Ce qui conclut la preuve.  $\square$

Il y a plusieurs façons équivalentes de définir les groupes d'homotopie supérieurs. Nous allons en donner une qui généralise trivialement la précédente. Remarquons que les groupes d'homotopie supérieurs  $\pi_n(X, x)$  d'un espace topologique sont simplement les classes d'homotopie de l'espace topologique (muni de la topologie compact-ouverte)  $\Omega_x^n X := \{f : I^n \rightarrow X, / f(\partial I^n) = x\}$ . Cet espace étant la fibre de l'application de restriction envoyant  $f : I^n \rightarrow X$  sur  $f : \partial I^n \rightarrow X$ , on généralise cette définition comme suit. On définit

*Notation 3.3.6.* Soit  $v \in X_0$ . On note

$$\Omega_v^n(X_{\bullet})_{\bullet} := \text{Fibre}_v(\text{Map}_{\bullet}(\Delta_{\bullet}^n, X_{\bullet}) \rightarrow \text{Map}_{\bullet}(\partial\Delta_{\bullet}^n, X_{\bullet}))$$

la fibre en l'application constante  $v$  de l'application de restriction.

Comme  $\partial\Delta_{\bullet}^n \rightarrow \Delta_{\bullet}^n$  est une cofibration (elle est injective), l'ensemble simplicial  $\Omega_v^n(X_{\bullet})_{\bullet}$  est fibrant par le lemme 3.2.14.

**Définition 3.3.7.** Soit  $X_{\bullet}$  un ensemble simplicial fibrant. Pour tout sommet  $v \in X_{\bullet}$ , on définit, le  $n$ ième groupe d'homotopie simpliciale en  $v$  de  $X_{\bullet}$  par

$$\pi_n(X_{\bullet}, v) := \pi_0(\Omega_v^n(X_{\bullet})_{\bullet})$$

*Remarque 3.3.8.* Les 0-simplexes de  $\Omega_v^n(X_{\bullet})_{\bullet}$  sont donc exactement les morphismes d'ensembles simpliciaux  $\Delta_{\bullet}^n \rightarrow X_{\bullet}$  dont la restriction à  $\partial\Delta_{\bullet}^n$  est constante égale à  $v$ . Leur réalisation est donc une application continue de  $I^n$  dans  $|X_{\bullet}|$  dont la restriction au bord est constante égale au point  $|v|$ . En particulier un 0-simplexe définit un élément de  $\pi_n(|X_{\bullet}|, |v|)$ .

Par ailleurs les 1-simplexes de  $\Omega_v^n(X_{\bullet})_{\bullet}$  sont exactement les morphismes d'ensembles simpliciaux  $\Delta_{\bullet}^n \times \Delta_{\bullet}^1 \rightarrow X_{\bullet}$  dont la restriction à  $\partial(\Delta_{\bullet}^n) \times \delta_{\bullet}^1$  est constante égale à  $v$ . Ses restriction à  $\Delta_{\bullet}^n \times \{0\}$  et  $\Delta_{\bullet}^n \times \{1\}$  définissent deux 0-simplexes  $f_{\bullet}, g_{\bullet}$  comme ci-dessus et sa réalisation géométrique définit une homotopie entre les réalisations de  $f_{\bullet}$  et  $g_{\bullet}$ .

Le lemme suivant donne deux autres caractérisations naturelles des groupes d'homotopie supérieurs. Le premier point découle essentiellement de la remarque précédente.

**Lemme 3.3.9.** Soit  $X_{\bullet}$  un ensemble simplicial fibrant et  $v \in X_0$ . On a des bijections naturelles entre  $\pi_n(X_{\bullet}, v)$  et

- (1) l'ensemble des classes d'équivalence  $\{f \in \text{Hom}_{\mathbf{sEns}}(\Delta_{\bullet}^n, X_{\bullet}) / f(\partial\Delta_{\bullet}^n) = v\} / \sim$   
où la relation d'homotopie est la relation  $f \sim g$  si il existe  $H : \Delta_{\bullet}^n \times \Delta_{\bullet}^1 \rightarrow X_{\bullet}$   
tel que  $H|_{\partial\Delta_{\bullet}^n \times \Delta_{\bullet}^1} = v$ ,  $H|_{\Delta_{\bullet}^n \times \{0\}} = f$  et  $H|_{\Delta_{\bullet}^n \times \{1\}} = g$ <sup>60</sup>,

<sup>60.</sup> on utilise la notation évidente  $\{0\}$  et  $\{1\}$  pour les deux sommets de  $\Delta_{\bullet}^1$ , c'est à dire que  $d_0([1] \xrightarrow{id} [1]) = \{1\}$  et  $d_1([1] \xrightarrow{id} [1]) = \{0\}$

- (2) ainsi que l'ensemble des classes d'équivalences de  $\{\sigma \in X_n / d_i(\sigma) = v\} / \sim$  de  $n$ -simplexes dont toutes les faces sont (l'image par des dégénérescences de)  $v$  et où la relation  $\sim$  est donnée par  $\sigma \sim \tau$  si il existe un  $n + 1$ -simplexe  $K \in X_{n+1}$  tel que  $d_{n+1}(K) = \sigma$ ,  $d_n(K) = \tau$  et  $d_{i < n}(K) = v$ .

Le fait que les relations sont bien des relations d'équivalence se démontre par des méthodes similaires à celle du lemme 3.3.2. On peut remarquer que  $\Delta_{\bullet}^n \times \Delta_{\bullet}^1 \xrightarrow{proj} \Delta_{\bullet}^n$  est un cylindre fonctoriel pour  $\Delta_{\bullet}^n$  (et utiliser une preuve similaire à celle de la proposition 2.2.14 et l'universalité de ce cylindre pour en déduire le résultat).

*Remarque 3.3.10.* Si  $f : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$  est un morphisme d'ensembles simpliciaux, alors les morphismes induits  $\text{Map}_{\bullet}(\Delta_{\bullet}^n, X_{\bullet}) \rightarrow \text{Map}_{\bullet}(\Delta_{\bullet}^n, Y_{\bullet})$ ,  $\text{Map}_{\bullet}(\partial\Delta_{\bullet}^n, X_{\bullet}) \rightarrow \text{Map}_{\bullet}(\partial\Delta_{\bullet}^n, Y_{\bullet})$  et par suite des applications  $f_* : \pi_n(X_{\bullet}, v) \rightarrow \pi_n(Y_{\bullet}, f(v))$  (pour n'importe quel modèle choisi) vérifiant évidemment  $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$ ,  $id_* = id$ .

**Lemme 3.3.11.** Soit  $f : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$  une fibration de Kan acyclique entre ensembles simpliciaux fibrants. Alors  $f_* : \pi_0(X_{\bullet}) \rightarrow \pi_0(Y_{\bullet})$  est une bijection et, pour tout  $v \in X_0$ ,  $n > 0$ ,  $f_* : \pi_n(X_{\bullet}, v) \rightarrow \pi_n(Y_{\bullet}, f(v))$  est également une bijection.

*Démonstration.* Montrons l'injectivité de  $f_*$ . Soit  $\alpha, \beta : \Delta^n \rightarrow X_{\bullet}$  représentant des classes de  $\pi_n(X_{\bullet}, v)$ ; on note encore  $\alpha$  et  $\beta$  leurs restrictions, qui sont constantes égales à  $v$ , à  $\partial\Delta^n$ . Supposons que  $\alpha$  et  $\beta$  sont équivalentes dans  $Y_{\bullet}$ . Donc qu'il existe  $H : \Delta^n \times \Delta^1 \rightarrow Y_{\bullet}$  une homotopie entre  $f \circ \alpha$  et  $f \circ \beta$ . On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\bullet}^n \times \partial\Delta_{\bullet}^1 & \xrightarrow{\alpha \cup \beta} & X_{\bullet} \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow f \\ \Delta_{\bullet}^n \times \Delta_{\bullet}^1 & \xrightarrow{H} & Y_{\bullet} \end{array}$$

Le relèvement  $\tilde{H}$  existe car la flèche verticale de gauche est une cofibration (elle est injective) et donne que  $\alpha \sim \beta$ . La surjectivité est similaire en utilisant le relèvement :

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_{\bullet}^n & \xrightarrow{t_* \mapsto v} & X_{\bullet} \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow f \\ \Delta_{\bullet}^n & \xrightarrow{\alpha} & Y_{\bullet} \end{array}$$

□

Les groupes d'homotopie d'un ensemble simplicial fibrant s'identifient avec ceux de la réalisation géométrique.

**Proposition 3.3.12.** Soit  $X_{\bullet}$  un ensemble simplicial fibrant. On a une bijection naturelle

$$\pi_n(X_{\bullet}, v) \cong \pi_n(|X_{\bullet}|, |v|)$$

Ceci démontre qu'en particulier les groupes d'homotopie simpliciaux sont bien des groupes pour  $n \geq 1$ .

*Exercice 3.3.13.* Définir la structure de groupe de  $\pi_n(X_{\bullet}, v)$  en utilisant les modèles simpliciaux du lemme 3.3.9.

Une méthode pour démontrer la proposition précédente est d'utiliser la longue suite exacte d'une fibration de Kan. Soit  $p : E_{\bullet} \rightarrow B_{\bullet}$  une fibration de Kan entre ensembles simpliciaux fibrants. Soit  $b \in B_0$  et  $v \in E_0$  tel que  $p(v) = b$ . On note  $F_{b,\bullet}$  la fibre en  $b$  de  $p$ , et  $i$  son inclusion dans  $E_{\bullet}$ . Cette fibre est fibrante puisque le tiré en arrière d'une fibration est une fibration. On a une application naturelle  $\partial : \pi_n(B_{\bullet}, b) \rightarrow \pi_{n-1}(F_{b,\bullet}, v)$  donnée par la construction suivante. Soit  $f : \Delta_{\bullet}^n \rightarrow B_{\bullet}$  un représentant d'une classe dans  $\pi_n(B_{\bullet}, b)$ . On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{n,\bullet}^n & \xrightarrow{\{v\}} & E_{\bullet} \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ \Delta_{\bullet}^n & \xrightarrow{f} & B_{\bullet} \end{array}$$

et, comme  $p$  est une fibration de Kan, le relèvement  $h$  dans ce diagramme existe et fait commuter les triangles. En particulier,  $p \circ d_n(h) = b$  implique<sup>61</sup> que  $d_n(h) : \Delta_{\bullet}^{n-1} \rightarrow E_{\bullet}$  est à valeur dans  $F_{b,\bullet}$  et vaut  $v$  sur ses faces (par la commutativité du diagramme supérieur). Ainsi  $d_n(h)$  définit une classe, que l'on note  $\partial([f])$  dans  $\pi_{n-1}(F_{b,\bullet}, v)$ . Une preuve similaire à celle du lemme 1.5.12 montre

**Lemme 3.3.14.** L'application  $[f] \mapsto \partial([f])$  est indépendante du choix du représentant  $f$  dans  $\pi_n(B_{\bullet}, b)$ .

La proposition suivante peut se démontrer essentiellement comme son analogue topologique (théorème 1.5.14) en introduisant des groupes d'homotopie simpliciaux relatifs (en utilisant la définition 3.3.9.(1)).

**Proposition 3.3.15.** Soit  $p : E_{\bullet} \rightarrow B_{\bullet}$  une fibration de Kan entre ensembles simpliciaux fibrants. La suite longue suivante est exacte

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F_{b,\bullet}, v) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E_{\bullet}, v) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B_{\bullet}, b) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F_{b,\bullet}, v) \rightarrow \cdots$$

*Démonstration de la proposition 3.3.12.* La preuve se fait par récurrence en partant du lemme 3.3.2 qui établit l'initialisation. Plus exactement supposons avoir démontré que pour tout ensemble simplicial fibrant  $Z_{\bullet}$  on a, pour tout point  $z \in Z_0$  que  $\pi_{i \leq n-1}(Z_{\bullet}, z) = \pi_{i \leq n-1}(|Z_{\bullet}|, |z|)$  et démontrons la bijection entre les groupes d'homotopies pour tout ensemble simplicial  $X_{\bullet}$  en degré  $n$ . On définit ensuite l'espace des chemins  $P_v(X_{\bullet})_{\bullet}$  en  $v \in X_0$  comme le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccc} P_v(X_{\bullet})_{\bullet} & \longrightarrow & \text{Map}(\Delta_{\bullet}^1, X_{\bullet}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow (d_0^*, d_1^*) \\ X_{\bullet} & \xrightarrow{v \times id} & X_{\bullet} \times X_{\bullet} \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est donnée par les deux restrictions aux inclusions  $\{0, 1\} \cong \partial \Delta_{\bullet}^1 \hookrightarrow \Delta_{\bullet}^1$ . L'application verticale de droite est une fibration de Kan par le lemme 3.2.14 et donc celle de gauche aussi. On a de plus que  $\Omega_v^1(X_{\bullet})_{\bullet}$  est isomorphe à la fibre en  $v$  de cette fibration  $\pi : P_v(X_{\bullet})_{\bullet} \rightarrow X_{\bullet}$ . Par ailleurs on peut montrer que la composée  $P_v(X_{\bullet})_{\bullet} \rightarrow X_{\bullet} \rightarrow \{v\}$  est une fibration acyclique. Pour le voir, il suffit de montrer que  $\text{Map}_{\bullet}(\Delta_{\bullet}^1, X_{\bullet}) \rightarrow \text{Map}_{\bullet}(\Delta_{\bullet}^0, X_{\bullet}) \cong X_{\bullet}$  est une fibration acyclique

61. on utilise qu'un morphisme  $\Delta_{\bullet}^m \rightarrow Y_{\bullet}$  est la même chose qu'un élément, ici donné par une face d'un élément, de  $Y_m$

(puisque la précédente est un tiré en arrière de celle-ci) ce qui découle du lemme 3.2. Le lemme 3.3.11 garantit alors que les  $\pi_n(P_v(X_\bullet)_\bullet, v)$  sont triviaux. Il suit alors de la longue suite exacte d'une fibration que  $\pi_{n-1}(\Omega_v^1(X_\bullet)_\bullet) \cong \pi_n(X_\bullet, v)$ . La réalisation géométrique d'une fibration (acyclique en l'occurrence) est une fibration par le lemme 3.2.11, et  $|P_v(X_\bullet)_\bullet| \rightarrow |\Delta_\bullet^0| = \{*\}$  est une équivalence faible (puisque c'est la réalisation d'une fibration acyclique, donc d'une équivalence faible). Il suit qu'on a aussi un isomorphisme  $\pi_{n-1}(|\Omega_v^1(X_\bullet)_\bullet|) \cong \pi_n(|X_\bullet|, |v|)$  qui provient de la longue suite exacte d'une fibration de Serre (théorème 1.5.14). L'hypothèse de récurrence nous permet alors de conclure. La difficulté dans les derniers arguments provient du fait qu'on a pas que la réalisation géométrique de  $\Omega_v^n(X_\bullet)_\bullet$  est  $\Omega^n(|X_\bullet|)$ . La preuve ci-dessus nous indique cependant que ces deux espaces topologiques sont faiblement homotopiquement équivalents.  $\square$

### 3.4. GÉNÉRALISATIONS ET APPLICATION AUX COLIMITES HOMOTOPIQUES

La théorie homotopique des ensembles simpliciaux des sections précédentes s'adapte à d'autres catégories algébriques. Elle permet de définir des structures de modèle pour les objets simpliciaux dans un nombre important de catégories.

C'est en particulier le cas si les objets de  $\mathbf{C}$  sont naturellement des ensembles. Soit donc  $U : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un foncteur (qui en pratique sera souvent un "oubli" de structure supplémentaire) qui est un adjoint à droite. On note  $F$  son adjoint à gauche.

*Exemple 3.4.1.* Par exemple on pourra considérer les catégories  $\mathbf{Ab}$  des groupes abéliens,  $Ch(R)$ ,  $Ch_{\geq 0}(R)$ ,  $Ch_{\leq 0}(R)$ , les catégories de d'algèbres associatives, algèbres commutatives, ou algèbres de Lie (et même leurs versions différentielles graduées), où  $U$  est simplement le foncteur oubliant la structure additive/algébrique supplémentaire. Dans le premier cas  $F(X) = \mathbb{Z} \langle X \rangle$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre de base les éléments de  $X$  et pour les versions algébriques, le foncteur  $F$  est le foncteur algèbre (de Lie, associative, commutative) libre associé à un ensemble.

On définit une structure de modèle sur les objets simpliciaux  $s\mathbf{C}$  comme suit :

**les équivalences faibles:** sont les  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  tels que  $U(f)$  est une équivalence faible dans  $\mathbf{sEns}$  ;

**les fibrations:** sont les  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  tels que  $U(f)$  est une fibration dans  $\mathbf{sEns}$  ;

**les cofibrations:** sont les morphismes avec la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques.

Soit l'hypothèse

(\*) : *les cofibrations définies par la propriété précédente et qui ont la propriété de relèvement par rapport à toutes les fibrations sont des équivalences faibles.*

Cette hypothèse est évidemment nécessaire pour que la structure précédente soit bien une structure de modèle. Cette hypothèse est vérifiée par les exemples 3.4.1.

**Théorème 3.4.2.** Supposons de plus que  $\mathbf{C}$  soit simplète et cocomplète, que la flèche naturelle  $\text{colim}_{n \in \mathbb{N}}(U(X_n)) \rightarrow U(\text{colim}_{\mathbb{N}} X_n)$  soit un isomorphisme et que (\*) soit vérifiée. Alors  $s\mathbf{C}$  munie de la structure précédente est une catégorie de modèle.

*Exemple 3.4.3.* On peut identifier la structure projective sur les complexes de chaînes avec la précédente. Soit  $N : s\mathbf{Ab} \rightarrow Ch_{\geq 0}(\mathbb{Z})$  le foncteur défini par  $N(A_\bullet)$  est le complexe  $\bigoplus_{n \geq 0} A_n / \mathfrak{S}(s_i(A_{n-1}))$  (c'est à dire qu'on quotiente les  $A_n$  par l'image des dégénérescences) muni de la différentielle  $d := \sum_{i=0}^n d_i : N_n(A_\bullet) \rightarrow N_{n-1}(A_\bullet)$ . On

vérifie que  $d$  passe au quotient et est de carré nul (c'est comme pour l'homologie singulière).

*Théorème 3.4.4* (Dold-Kan + Quillen). Le foncteur  $N : s\mathbf{Ab} \rightarrow Ch_{\geq 0}(\mathbb{Z})$  est une équivalence de catégorie qui est également une équivalence de Quillen entre les structures de modèle du Théorème 3.4.2 à gauche et la structure projective à droite.

*Démonstration.* L'inverse du foncteur  $N$  est donné, pour un complexe  $C = (\bigoplus_{i \geq 0} C_i, b)$ , par

$$F(C)_\bullet := [n] \mapsto F(C)_n = \bigoplus_{p \leq n} \bigoplus_{\substack{\varphi : [n] \rightarrow [p] \in \mathbf{sEns} \\ \text{tels que } \varphi \text{ est surjective.}}} C_p.$$

La structure simpliciale est donnée, pour tout  $f : [n] \rightarrow [m]$  dans  $\Delta$ , de la façon suivante. Pour tout  $\psi : [m] \rightarrow [q]$ , on considère les uniques factorisations, associées à toute surjection  $\psi : [m] \rightarrow [q]$ ,

$$\begin{array}{ccc} [n] & \xrightarrow{f} & [m] \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ [p] & \hookrightarrow & [q] \end{array}$$

en une surjection  $\varphi$  et une inclusion. Si  $p = q$ , alors l'application induite de la composante  $C_p = C_q$  associée à  $\psi$  est l'isomorphisme naturel avec la même composante associée à  $\phi$ . Si  $q = p + 1$  et que  $[p + 1] \hookrightarrow [p]$  est la codégénérescence  $s^p$ , alors on envoie la composante  $C_{p+1}$  correspondant à  $\psi$  sur la composante  $C_p$  correspondante à  $\varphi$  par la différentielle  $C_{p+1} \xrightarrow{b} C_p$ . Dans les autres cas, on utilise l'application nulle. Au total on a défini une application  $f^* : F(C)_m \rightarrow F(C)_n$ .  $\square$

*Remarque 3.4.5.* Quillen a également montré une que si  $\mathbf{C}$  est une catégorie complète et cocomplète et qui possède suffisamment d'objets projectifs, alors on peut construire une structure de modèle dont les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont les applications  $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  telles que, pour tout objet projectif  $P$  de  $\mathbf{C}$ , le morphisme induit d'ensembles simpliciaux<sup>62</sup>

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(P, X_\bullet) \xrightarrow{f^{\circ-}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(P, Y_\bullet)$$

est une équivalence faible (resp. une fibration). Les cofibrations sont évidemment définies par la propriété de relèvement à gauche.

*Proposition 3.4.6* (Quillen). Si  $\mathbf{C}$  vérifie que tout objet de  $s\mathbf{C}$  est fibrant, alors la structure précédente est de modèle.

L'hypothèse est notamment vérifiée pour les  $\mathbf{C} = \mathbf{Ab}$  (exercice). On peut alors vérifier que la structure obtenue est Quillen équivalente à la précédente.

On peut utiliser les méthodes simpliciales pour calculer des colimites homotopiques dans  $\mathbf{Top}$  (et dans le cas de toute catégorie de modèle simpliciale, voir ci-dessous).

62. Si  $X_\bullet$  est simplicial dans  $\mathbf{C}$ , sa structure induit par functorialité une structure d'ensemble simpliciaux sur les ensembles de morphismes  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X_\bullet)$  pour tout objet  $A$

Soit  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Top}$  un diagramme (autrement dit un foncteur issu d'une petite catégorie  $\mathcal{D}$ ). On définit un espace topologique simplicial<sup>63</sup>  $\mathcal{N}_\bullet(F)$  comme suit :

$$\mathcal{N}_n(F) = \coprod_{i_0 \xleftarrow{f_1} i_0 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_n} i_n} F(i_n).$$

Les faces  $d_j : \mathcal{N}_n(F) \rightarrow \mathcal{N}_{n-1}(F)$ , pour  $j < n$ , envoie identiquement  $F(i_n)$  sur lui-même vu comme étant dans la composante associée à la suite de compositions

$$i_0 \xleftarrow{f_1} i_0 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_{j-1}} i_{j-1} \xleftarrow{f_j \circ f_{j+1}} i_{j+1} \longleftarrow \dots \longleftarrow i_{n-1} \xleftarrow{f_n} i_n$$

(c'est à dire qu'elles sautent l'objet  $i_j$ ) et la dernière face  $d_n$  envoie  $F(i_n)$  vers  $F(i_{n-1})$  via l'application  $F(f) : F(i_n) \rightarrow F(i_{n-1})$ , ce dernier étant vu dans la composante de la suite de compositions  $i_0 \xleftarrow{f_1} i_0 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_{n-1}} i_{n-1}$ . Enfin les dégénérescences  $s_j$  consistent à intercaler des identités, c'est à dire envoie  $F(i_n)$  identiquement sur lui-même mais vu dans la composante associée à la suite de compositions

$$i_0 \xleftarrow{f_1} i_0 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_j} i_j \xleftarrow{id} i_j \xleftarrow{f_{j+1}} i_{j+1} \dots \longleftarrow i_{n-1} \xleftarrow{f_n} i_n.$$

Identifions tout espace topologique  $X$  avec un objet simplicial constant (exemple 3.1.24). Par définition, chaque  $F(i_n)$  s'envoie dans la colimite  $\operatorname{colim}_{\mathcal{D}} F(i)$  et ceci produit un morphisme d'espace topologiques simpliciaux

$$\mathcal{N}_\bullet(F) \rightarrow \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} F(i).$$

La réalisation géométrique s'étend des ensembles simpliciaux aux espaces topologiques simpliciaux par exactement la même formule<sup>64</sup> (à la différence que cette fois-ci,  $X_n$  n'est plus discret).

**Proposition 3.4.7.** La réalisation géométrique  $|\mathcal{N}_\bullet(F)|$  calcule la colimite homotopique de  $F$ . C'est à dire qu'il y a un isomorphisme naturel

$$|\mathcal{N}_\bullet(F)| \cong \mathbb{L}\operatorname{colim} F$$

dans  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$ .

On peut en fait montrer la chose suivante. Pour tout objet  $j \in \mathcal{D}$ , on note  $\mathcal{D}|_j$  la catégorie des objets au dessus de  $j$ , dont les objets sont les flèches  $f : i \rightarrow j$  d'un objet quelconque de  $\mathcal{D}$  vers  $j$ , et les morphismes entre  $i \xrightarrow{f} j$  et  $i' \xrightarrow{f'} j$  sont les triangles commutatifs

$$\begin{array}{ccc} i & \xrightarrow{f} & j \\ \downarrow & \nearrow f' & \\ i' & & \end{array}$$

induit par  $F$ , qui à un objet  $i \xrightarrow{f} j$  associe l'objet  $F(i)$ . Notons que toute flèche  $j \rightarrow k$  dans  $\mathcal{D}$  induit un foncteur naturel  $\mathcal{D}|_j \rightarrow \mathcal{D}|_k$  par post-composition par cette flèche.

Soit

$$L_j(F) := |\mathcal{N}_\bullet(F|_j)|.$$

63. en utilisant le nerf de la catégorie  $\mathcal{D}$  pour définir la structure simpliciale, voir la feuille de TD 4.

64. dans le cadre des espaces topologiques simpliciaux, la réalisation géométrique n'est évidemment plus forcément un CW-complexe, à moins que les dégénérescences ne soient des applications cellulaires

L'espace topologique simplicial  $\mathcal{N}_\bullet(F|_j)$  diffère de  $\mathcal{N}_\bullet(F)$  en ce que l'on a changé la catégorie indiquant les coproduits. On a un morphisme naturel  $\mathcal{N}_\bullet(F|_j) \rightarrow F(j)$  (vu comme espace simplicial constant) donnée par les flèches  $i \xrightarrow{f} j$  dans la définition des objets de la catégorie  $\mathcal{D}|_j$ . On en déduit une application  $L_j(F) \rightarrow F(j)$  en passant aux réalisations géométriques.

**Lemme 3.4.8.** L'application naturelle  $L_j(F) \rightarrow F(j)$  est une équivalence d'homotopie faible.

Le lemme est essentiellement du au fait qu'on a un objet terminal dans la catégorie  $\mathcal{D}|_j$  qui induit une homotopie entre son nerf et le point.

Comme la construction de  $\mathcal{D}|_j$  est fonctorielle, on obtient un foncteur  $L_*(F) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Top}$  qui à  $j$  associe  $L_j(F)$ .

**Lemme 3.4.9.** Le foncteur  $L_*(F)$  est cofibrant dans la structure de modèle projective pour les diagrammes à valeur dans  $\mathbf{Top}$ .

Comme les flèches  $L_j(F) \rightarrow F(j)$  sont naturelles, on obtient une transformation naturelle (c'est à dire une flèche de  $\mathbf{Top}^{\mathcal{D}}$ )

$$L_*(F) \longrightarrow F$$

qui par le lemme 3.4.8 est une équivalence faible dans la catégorie des diagrammes. Ainsi les deux lemmes précédents montrent que  $L_*(F) \longrightarrow F$  est un remplacement cofibrant dans la structure de modèle projective de  $\mathbf{Top}^{\mathcal{D}}$ . La proposition 3.4.7 en résulte car

$$|\mathcal{N}_\bullet(F)| \cong \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} L_*(F)$$

(voir la remarque 2.5.10).

Les résultats précédents sur les colimites homotopiques s'étendent à toute catégorie de modèle simpliciale, c'est à dire une catégorie de modèle dont les morphismes sont enrichis dans  $\mathbf{sEns}$  et vérifient les résultats du Lemme 3.2.14.

**Définition 3.4.10.** Une catégorie de modèle simpliciale est une catégorie de modèle  $\mathbf{C}$  munie d'un ensemble simplicial de morphismes, c'est à dire d'un foncteur  $\operatorname{Map}_{\mathbf{C},\bullet}(-, -) : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{sEns}$  vérifiant

- $\operatorname{Map}_{\mathbf{C},0}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ ,
- Les foncteurs  $\operatorname{Map}_{\mathbf{C},\bullet}(-, B) : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{sEns}$  et  $\operatorname{Map}_{\mathbf{C},\bullet}(A, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{sEns}$  ont des adjoints à gauche dénotés respectivement  $K_\bullet \mapsto B^{K_\bullet} \in \mathbf{C}$  et  $K_\bullet \mapsto A \otimes K_\bullet \in \mathbf{C}$  a un isomorphisme naturel  $\operatorname{Hom}_{\mathbf{sEns}}(X, \operatorname{Map}_{\mathbf{C},\bullet}(Y, Z)) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, A \otimes Z)$
- On a un isomorphisme naturel  $A \otimes (K_\bullet \times L_\bullet) \cong (A \otimes K_\bullet) \otimes L_\bullet$ ,

et qui satisfait en plus à l'axiome suivant : si  $p : X \twoheadrightarrow Y$  est une fibration de  $\mathbf{C}$  et  $i : L \hookrightarrow K$  est une cofibration de  $\mathbf{C}$ , alors, le morphisme canonique

$$\operatorname{Map}_\bullet(K, X) \longrightarrow \operatorname{Map}_\bullet(L, X) \times_{\operatorname{Map}_\bullet(L, Y)} \operatorname{Map}_\bullet(K, Y)$$

est une fibration de Kan, qui est acyclique si  $p$  ou  $i$  l'est

*Exemple 3.4.11.* La catégorie  $\mathbf{sEns}$  est simpliciale (grâce au lemme 3.2.14). Les catégories de préfaisceaux  $\operatorname{Fun}(D, \mathbf{sEns})$  munie de la structure projective sont aussi simpliciales.

## RÉFÉRENCES

- [1] Henri Paul de Saint Gervais, **Analysis Situs** Topologie algébrique des variétés, site web disponible en ligne  
<http://analysis-situs.math.cnrs.fr/>
- [2] A. Bousfield, V. Gugenheim, *On PL de Rham theory and rational homotopy type*, Mem. Amer. Math. Soc. 8 (1976), no. 179.
- [3] G. Bredon, *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 139. Springer-Verlag, New York, 1997
- [4] W. Dwyer, J. Spaliński, *Homotopy theories and model categories*, Handbook of algebraic topology, 73–126, North-Holland, Amsterdam, 1995.
- [5] Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, *Rational homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics, 205. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [6] G. Friedman, *An elementary illustrated introduction to simplicial sets*, disponible sur ArXiv.
- [7] P. G. Goerss and J. F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, reprint of the 1999 edition, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [8] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002
- [9] K. Hess. *Rational Homotopy Theory : A Brief Introduction*.
- [10] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, 63. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [11] J.-P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, The University of Chicago Press, disponible en ligne sur la page de l'auteur.
- [12] D. Quillen, *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Mathematics 43, Springer, 1967.
- [13] D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. (2) 90 (1969) 205–295.
- [14] P. Schapira, *Categories and Homological Algebra*, Notes de cours, disponible en ligne : <https://webusers.imj-prg.fr/~pierre.schapira/lectnotes/>
- [15] E. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1966.
- [16] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 47 (1977), 269–331 (1978).
- [17] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994
- [18] G. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics, 61. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.