Examen

Exercice 1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèle. Soit
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g", "\wr"'] \\ B \arrow[r, two heads, "q"'] & Y \end{tikzcd}$$
un diagrame cartésien[1] où q est une fibration et g une équivalence faible. On suppose que X et Y sont fibrants.

1. Démontrer que A et B sont fibrants.

2. Démontrer que f est une équivalence faible si et seulement si pour tout objet cofibrant C, on a que l'application induite $f_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)/_{\simeq} \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B)/_{\simeq}$ ($\simeq$ est la relation d'homotopie) est une bijection.

3. On veut démontrer que pour tout objet cofibrant C, f_* est bijective.
   (a) Démontrer que pour tout $s : C \to B$, il existe $t : C \to X$ tel que $q \circ s \simeq g \circ t$.
   (b) En considérant une homotopie $H : Cyl(C) \to Y$ entre $q \circ s$ et $g \circ t$, montrer que l'on peut trouver $s' \simeq s$ tel que $q \circ s' = g \circ t$ (indic: q est une fibration) et conclure que f_* est surjectif.
   (c) Soit $u, s : C \to A$ tels que $f \circ u \simeq f \circ s$ et H une homotopie à gauche entre eux. Montrer qu'il existe un morphisme $K : Cyl(C) \to X$ où $Cyl(C)$ est un cylindre de C tel que $g \circ K \simeq q \circ H$. En déduire que f_* est injective puis conclure.

4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèle dans laquelle tout objet est fibrant. Démontrer que $\mathcal{C}$ est propre à droite, c'est à dire que le tiré en arrière $X \times_Y B \to B$ de toute équivalence faible $X \xrightarrow{\sim} Y$ le long d'une fibration $B \twoheadrightarrow Y$ est une équivalence faible. Que peut on en déduire pour **Top** ?

Exercice 2. Soit $F : \mathbf{sEns} \rightleftarrows \mathcal{C} : U$ une adjonction. On munit $\mathcal{C}$ de la structure suivante: une équivalence faible (resp. fibration) de $\mathcal{C}$ un morphisme tel que $U(f)$ soit une équivalence faible (resp. fibration). On appelle cofibration de $\mathcal{C}$ un morphisme qui a la propriété de relèvement par rapport à toutes les fibrations acycliques. On note $\Lambda^n_{k\bullet} \subset \Delta^n_\bullet$ les n-cornets.

1. Montrer que F préserve les colimites et les cofibrations. Pourquoi ne préserve-t-il pas nécessairement les cofibrations acycliques ?

2. On note $\mathcal{J}^{ac}$ l'ensemble des morphismes $F(\Lambda^n_k) \to F(\Delta^n_\bullet)$ induit par l'inclusion du cornet. Montrer que les rétractes des morphismes $\mathcal{J}^{ac}$-cellulaires sont des cofibrations qui ont la propriété de relèvement par rapport à toutes les fibrations.

3. On suppose dans cette question que tout objet de $\mathcal{C}$ est fibrant, que $\mathcal{C}$ est complète et cocomplète et que U commute avec les colimites $\mathbb{N}$-séquentielles.
   (a) Déduire de la première hypothèse que toute cofibration de $\mathcal{C}$ qui a la propriété de relèvement par rapport à toutes les fibrations est une équivalence faible.
   (b) Démontrer que la structure sur $\mathcal{C}$ en fait une catégorie de modèle cofibrement engendrée.

4. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{C}$ a une structure de modèle quelconque et que F préserve les cofibrations.
   (a) Démontrer que le morphisme $\Delta^n_\bullet \to \{*\} = \Delta^0_\bullet$ est une équivalence faible dans **sEns**.

[1] a pullback diagram in english

(b) Démontrer que, si pour tout n le morphisme induit $F(\Delta^n_\bullet) \to F(\{*\})$ est une équivalence faible dans $\mathcal{C}$, alors tout sous-ensemble non-vide de $n-1$-faces L de Λ^n_k, le morphisme $F(\Delta^{n-1}_\bullet) \to F(L)$ induit par l'inclusion d'une face de L est une équivalence faible.

(c) En déduire que F préserve les cofibrations acycliques si et seulement si $F(\Delta^n_\bullet) \to F(\{*\})$ est une équivalence faible dans $\mathcal{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Pour tout R-module M, on note $S^n(M)$ le complexe donné par M en degré n et 0 ailleurs.

1. Démontrer que les structures de modèle projective et injective sur les complexes de chaines sont Quillen équivalentes.

2. En déduire que pour tout M, N, résolution projective $P_*(M)$ de M (resp. résolution injective $I^*(N)$ de N) les complexes $\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(M, I^*(N)) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(P_*(M), N)$ sont quasi-isomorphes. On munira dans la suite les complexes de chaînes de la structure projective.

3. Démontrer que pour tout complexe A, on a un isomorphisme naturel (en A)
$$H_n(A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(Ch(R))}(S^n(R), A).$$
(Indic: on pourra utiliser le résultat du devoir que la relation d'homotopie entre un complexe cofibrant et un complexe fibrant est identique à l'homotopie de chaînes).

4. Démontrer que le foncteur $(A \xrightarrow{f} B) \mapsto \mathrm{coker}(f)$ admet un foncteur dérivé total à gauche $\mathbb{L}\mathrm{coker}$. Calculer, pour tout morphisme de module $M \xrightarrow{g} N$ les groupes d'homologie de $\mathbb{L}\mathrm{coker}(g)$. (Indic: on pourra interpréter coker comme une colimite).

5. Calculer le tiré en arrière homotopique $\{0\} \times^h_{X_*} \{0\}$ et ses groupes d'homologie pour X_* un complexe de chaînes.

6. Soit $C_* : \mathbf{sEns} \to Ch_{\geq 0}(\mathbb{Z})$ le foncteur donné par $C_n(X_\bullet) = \mathbb{Z}[X_n]$ le groupe abélien libre engendré par X_n. La différentielle est la somme alternée $\sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$ où les d_i sont les faces $X_n \to X_{n-1}$. Montrer que C_* préserve les cofibrations et cofibrations acycliques. Le foncteur C_* préserve-t-il les limites homotopiques ?

Exercice 4. Soit G un groupe fini et $\mathbf{Top}^G$ la catégorie des espaces topologiques munis d'une action continue de G et dont les morphismes sont les applications continues G-équivariantes: pour tout $g \in G$, $x \in X$, $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$. On note BG la catégorie qui a un seul objet est dont les flèches sont les éléments de G avec la multiplication comme composition.

1. Démontrer que la catégorie des foncteurs $\mathrm{Fun}(BG, \mathbf{Top})$ est équivalente à $\mathbf{Top}^G$.

2. Démontrer que le foncteur d'oubli $\mathbf{Top}^G \hookrightarrow \mathbf{Top}$ est de Quillen à droite pour la structure projective (induite par la question 1.).

3. Démontrer que les foncteurs des points fixes $(-)^G : \mathbf{Top}^G \to \mathbf{Top}$ et orbites $(-)_G : \mathbf{Top}^G \to \mathbf{Top}$, définis par $X^G = \{x \in X, \forall g \in G, g \cdot x = x\}$ et $X_G = X/x \sim g \cdot x$ ont des adjoints à gauche et à droite respectivement. Identifier leurs adjoints.

4. En déduire qu'ils existent respectivement des foncteurs dérivés à droite et à gauche, dénoté $(-)^{hG}$ et $(-)_{hG}$ et les interpréter comme des homotopies (co)limites.

5. Soit EG un complexe cellulaire muni d'une action libre et cellulaire de G. Montrer que E est cofibrant dans $\mathrm{Fun}(BG, \mathbf{Top})$ pour la structure projective.

6. En déduire une formule pour $(-)_{hG}$ puis que $(\{*\})_{h\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \cong \mathbb{R}P^\infty$ (indic: considérer $X \times_G Y = X \times Y/(g \cdot x, y) \sim (x, g \cdot y)$).

7. Donner une formule pour $(-)^{hG}$ en terme de EG et calculer $(\{*\})^{hG}$.