G. Ginot M2- Paris 13 - Paris 6 2017-2018

Quelques exercices sur fibrations, cofibrations et CW-complexes

Exercice 1 (localité des notions de fibrations)**.** Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant. Si $p : E \to B$ est une application telle que tout point b admet un voisinage ouvert U tel que $p : p^{-1}(U) \to U$ est une fibration de Serre, alors $p : E \to B$ est une fibration de Serre.

1. Démontrer que le tiré en arrière d'une fibration de Serre (resp. Hurewicz) est une fibration de Serre (resp. Hurewicz).

2. Soit $X \to Y$ une fibration de Serre. Montrer que pour tout $0 \le a < b \le 1$, on a un relèvement du diagramme suivant:
$$\begin{tikzcd} \partial I^n \times [a,b] \cup I^n \times \{a\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d] \\ I^n \times [a,b] \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y \end{tikzcd}$$

3. En déduire le résultat (on pourra prendre une triangulation du cube I^{m+1} suffisamment fine).

Solution 1. 1. Les deux cas se démontrent de même. Ils sont conséquence de la propriété universelle du tiré en arrière:
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dotted, "q"] \arrow[rr, bend left] \arrow[dr, bend right] & X \times_B E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$
pour tout diagramme il existe une unique flèche q qui rende le diagramme commutatif. En termes de coordonnées, on a que $q(x, y) = (f(x), g(y))$. On rappelle que $X \times_B E$ est homéomorphe au sous-espace $\{(x, e),\ x \in X, e \in E$ tels que $p(e) = f(x)\}$ du produit et que les flèches vers X et E sont les projections naturelles. Soit maintenant un diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \times_B E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ Z \times [0,1] \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & X \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$
dans lequel on *doit* démontrer l'existence de l'application en pointillée rendant le diagramme commutatif. Comme $p : E \to B$ est une fibration (on peut supposer de Serre seulement si X est un cube), il existe une application $Z \times [0, 1] \to E$ rendant le diagramme commutatif. Par propriété du tiré en arrière, on obtient donc le rélèvement. Cette flèche est l'unique flèche déterminée par $Z \times [0, 1] \to E$ et $Z \times [0, 1] \to X$ ce qui assure la commutativité de tous les triangles (obtenus du diagramme, de la flèche et du reevement $Z \times [0, 1] \to E$) en dessous d'elle. De même, les composées $Z \hookrightarrow Z \times [0, 1] \to E$ et $Z \hookrightarrow Z \times [0, 1] \to X$ sont respectivement égales aux composées $Z \to X \times_B E \to E$ et $Z \to X \times_B E \to X$. par propriété universelle, cela garantit que $Z \hookrightarrow Z \times [0, 1] \to X \times_B E$ est égale à $Z \to X \times_B E$.

2. Cela provient de l'homéomorphisme de paires vu en cours
$$(I^n \times [a, b], \partial I^n \times [a, b] \cup I^n \times \{a\}) \cong (I^n \times [a, b], I^n \times \{a\})$$
et la définition d'une fibration de Serre.

3. On veut construire le relèvement dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} I^n \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & E \arrow[d] \\ I^n \times [0,1] \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dotted] & B \end{tikzcd}.$$

Par compacité de I^{n+1}, on peut subdiviser le cube en petits cubes (cellulaires, notons $sd(I^n)$ le complexe ainsi obtenu) $c \times [i/m, i+1/m]$ de telles sortes que $h(c \times [i/m, i+1/m])$ soit incluses intégralement dans un ouvert U sur la restriction duquel p devient une fibration de Serre. Par la qquestion 1, c'est aussi le cas pour les restrictions de p à $c \times [i/m, i+1/m]$ et à toute sous-cellule de son squelette. On étend notre homotopie alors petit-cube par petit cube (en initialisant par sa valeur sur $I^n \times \{0\}$. Pour simplifier la construction de cette extension, le plus simple est de le faire par récurence sur le squelette de la subdivision du cube. Si on suppose avoir construit le relèvement sur le j-squelette $sd(I^n)^{(j)}$, puis par récurrence sur i pour tout cube de la forme $c \times [i/m]$ avec $c \in sd(I^n)^{(j+1)}$. Pour passer de i à $i+1$, on utilise que l'on connait notre homotopie sur le bord $\partial c \times [i+1/m, i+2/m]$ par hypothèse de récurrence sur le squelette et aussi sur $c \times \{i+1\}$ par celle sur i. On est exactement ramené au diagramme de la question 2 et on peut compléter l'homotopie ! Les cas limites ($i = 0$, $i = m$ se ramènenent aussi à un diagrame équivalent).

Exercice 2 (Théorème de Whitehead)**.** Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces cellulaires. On veut démontrer que f est une équivalence d'homotopie faible, alors f est une équivalence d'homotopie

1. Soit L un CW-complexe et $K \subset L$ un sous-complexe cellulaire. Soit $\emptyset \neq A \subset B$ une paire d'espaces topologiques. On suppose que, pour tout entier $n \geq 0$, si $L^{(n)} - K^{(n)} \neq \emptyset$, alors, quelque soit $a_0 \in A$, $\pi_n(B, A, a_0) = 0$[1]. Démontrer que toute application continue $g : (L, K) \to (B, A)$ est homotope relativement à K à une application à valeur dans A.

2. On suppose que $f : X \to Y$ est l'inclusion d'un sous-CW complexe. En déduire qu'alors $f : X \to Y$ est un rétracte par déformation de Y et conclure.

3. Démontrer que l'application de paire naturelle $(X \cup Y, X) \hookrightarrow (Cyl(f), X)$ est homotope à une application à valeur dans X (utiliser la première question). Ici $Cyl(f) = X \times [0,1] \cup_f Y$ est le cylindre de f.

4. Démontrer que l'homotopie de la question précédente s'étend en une homotopie définie sur tout le cylindre (et pas seulement $X \cup Y$).

5. En déduire qu'il existe une application $f : Cyl(f) \to Cyl(f)$à valeur dans X, qui vaut l'identité sur X, et est homotope à l'identité.

6. Conclure (on pourra utiliser la première question).

Solution 2. Remarque, puisque toute application continue entre CW-complexes est homotope à une application cellulaire, on peut, à homotopie près, remplacer f par une application cellulaire. On peut alors simplifier la fin de la preuve en se ramenant à la question via l'inclusion (devenue cellulaire) de X dans le cylindre de f.

1. Comme d'habitude avec les CW-complexes, on construit g et l'homotopie H par récurrence sur le squelette. Supposons avoir construit une telle homotopie H sur $L^{(<n)}$. Supposons que $L^{(n)} - K^{(n)} \neq \emptyset$ (sinon il n'y a rien d'autres à faire qu'étendre H par les valeurs (constante en $t \in [0,1]$) de g sur les cellules de $K^{(n)}$; cela ne pose pas de problèmes puisque par hypothèse sur le bord des cellules de $K^{(n)}$, l'homotopie coincide avec g). Pour construire H sur $L^{(n)}$, il

[1] pour $n = 0$, on définit cette condition comme le fait que l'application naturelle $\pi_0(A) \to \pi_0(B)$ est une bijection

suffit maintenant de construire H sur chaque cellule de dimension $e_\alpha : I^n \to L^{(n)} - K^{(n)}$. Par hypothèse de récurrence $g \circ e_\alpha(\partial I^n)$ est dans $g(L^{(n-1)}) \subset K$. En choisissant un point base dans K correspondant à l'image d'un point base de ∂I^n, de $\pi_n(B, A, a_0) = 0$, on déduit que $g \circ e_n$ est homotope, relativement à son bord à une application à valeur dans K (cf le lemme du cours sur la nullité d'une classe dans les groupes d'homotopie d'une paire). La réunion de ces homotopies, en donne une sur tout le n-squelette (on a pas de problème de compatibilité puisque on recolle sur le bord dont l'image est fixé). Pour conclure, il suffit de vérifir qu'on peut effectuer ces opérations à chauqe étage n successivement. C'est en fait facile: rappelons que pour construire une application $H : L \times [0,1] \to B$, il suffit de construire une famille d'application $H_{(n} : L^{(n)} \times [0,1] \to B$ telles que $H_{(n)|L^{(m)}} = H_{(m)}$ puisque la topologie est celle de la réunion. On construit alors $H_{(n)}$ comme ci-dessus mais de telle sorte que l'homotopie à l'étage n ne soit non-constante que sur l'intervalle de temps $[1 - 1/2^n, 1 - 1/2^{n+1}]$. On peut alors effectivement recoller les homotopies ci-dessus.

2. On applique la question précédente à l'identité $Y \to Y$ en remarquant que la longue suite exacte d'une paire implique que $\pi_n(Y, X, x_0)$ est nulle pour tout n.

3. On a la factorisation $f : X \hookrightarrow Cyl(f) \xrightarrow{\simeq} Y$ dont la deuxième flèche est une équivalence d'homotopie. Comme f_* est une équivalence d'homotopie faible par hypothèse, on en déduit que $X \hookrightarrow Cyl(f)$ est une équivalence d'homotopie faible aussi. Par conséquent, par le même argument que la question précédente, on a que $\pi_n(Cyl(f), X, x_0) = 0$ et ainsi on peut appliquer la question 1 qui donne une homotopie de l'inclusion naturelle $(X \cup Y, X) \hookrightarrow (Cyl(f), X)$ avec une application à valeur dans X, qui plus est par une homotopie constante égale à l'identité sur X.

4. Commençons par remarquer que $X \cup Y \hookrightarrow Cyl(f)$ est une paire cellulaire relative, donc une cofibration. Ainsi, on peut étendre l'homotopie $H : X \cup Y \to Cyl(f)^{[0,1]}$ au dessus de l'identité en une homotopie $\tilde{H} : Cyl(f) \to Cyl(f)^{[0,1]}$ telle que $\tilde{H}(-,1)$ est à valeur dans X (et vaut l'identité sur X). Maintenant, il nous suffit de considérer l'application composée de paires

$$(X \times [0,1] \cup Y, X \times 0, 1 \cup Y) \twoheadrightarrow (Cyl(f), X \times 1 \cup Y) \xrightarrow{\tilde{H}(-,1)} (Cyl(f), X)$$

dont la source est une paire cellulaire (la première fléche étant l'application quotient). Le résultat de la question 1 nous donne bien, après passage au quotient, une homotopie entre l'identité et une application qui envoie le cylindre sur X et est constante, égale à l'identité, sur X.

5. La question précédente nous fournit une homotopie $\tilde{H} : Cyl(f) \to Cyl(f)^{[0,1]}$ telle que $\tilde{H}(-,1)$ est à valeur dans X (et vaut l'identité sur X). Maintenant, il nous suffit de considérer l'application composée de paires

$$(X \times [0,1] \cup Y, X \times \{0,1\} \cup Y) \twoheadrightarrow (Cyl(f), X \times \{1\} \cup Y) \xrightarrow{\tilde{H}(-,1)} (Cyl(f), X)$$

dont la source est une paire cellulaire (la première fléche étant l'application quotient). Le résultat de la question 1 nous donne bien, après passage au quotient, une homotopie entre l'identité (du cylindre) et une application qui envoie le cylindre sur X et est constante, égale à l'identité, sur X.

6. Puisque l'application canonique $Cyl(f) \xrightarrow{\simeq} Y$ eest une équivalence d'homotopie, de la factorisation $f : X \hookrightarrow Cyl(f) \xrightarrow{\simeq} Y$, on déduit que $X \hookrightarrow Cyl(f)$ est une équivalence faible et qu'il suffit désormais de montrer que c'est une équivalence d'homotopie pour conclure. Montrons que c'est en fait un rétracte par déformation, c'est à dire qu'on peut trouver une homotopie, relativement à X, entre l'identité de $Cyl(f)$ et une application envoyant $Cyl(f)$ sur X (toujours relativement à X, c'est à dire étant l'identité sur X).

   Comme on a que $\pi_n(Cyl(f), X, x_0) = 0$, il suffit d'appliquer la conclusion de la première question (ce qui est licite puisque $X \cup Y$ est bien un sous-complexe cellulaire du cylindre puisque X et Y sont cellulaires) appliquée à l'application construite à la question précédente.

Exercice 3. Soit X un espace connexe par arcs non-vide. Démontrer que pour tout $x \in X$, $n \geq 1$, on a

$$\pi_n(X, x) \cong \pi_{n-1}(\Omega_x X, c_x)$$

où $\Omega_x X$ désigne l'espace des lacets de X d'origine x, pointé par le lacet constant.

Solution 3. On note P_x l'objet en chemin associé à l'inclusion $\{x\} \hookrightarrow X$. C'est par définition le sous espace des chemins sur X qui commencent en x_0. D'après le cours, l'évaluation en 1, $P_x = \{x_0\} \times_X X^{[0,1]} \longrightarrow X$ est une fibration et sa fibre au dessus de x est constitué des lacets de base x. C'est à dire de $\Omega_x X$. La suite exacte longue d'une fibration donne

$$\cdots \to \pi_n(P_x, c_x) \to \pi_n(X, x) \to \pi_{n-1}(\Omega_x X, c_x) \to \pi_{n-1}(P_x, c_x) \to \ldots.$$

Or P_x est contractile (tout lacet se contracte sur son origine via $H(\gamma, t)(u) = \gamma((1-t)u)$). Ainsi la flèche $\partial : \pi_n(X, x) \to \pi_{n-1}(\Omega_x X, c_x)$ est un isomorphisme (même en degré 0, car $\Omega_x X$ est un groupe à homotopie près).

Exercice 4 (Une cofibration est une inclusion)**.**

1. Démontrer que si $A \subset X$ est un rétracte de X et que X est Hausdorff, alors A est fermé.
2. Démontrer que si $A \to X$ est une cofibration, alors A est l'inclusion d'un sous-espace dans X, qui est fermé si X est Hausdorff. (utiliser le cylindre de $A \to X$ et la première question).

Solution 4.

1. Si X est de Hausdorff, alors la diagonale $\Delta(X) = \{(x, x)\} \subset X \times X$ est fermée. Il suit que si $f, g : X \to X$ sont continues, alors le sous-espace

$$Eq(f, g) := \{x \in X \text{ tel que } f(x) = g(x)\} = (f, g)^{-1}(\Delta(X))$$

est fermé aussi. Si $r; X \to A$ est la rétraction, alors A s'identifie avec $\{x \in X \text{ tel que } r(x) = x\}$ et est donc fermé.

2. Le dernier point suit du premier et de la première question. L'application $i : A \to X$ se factorise au travers du cylindre :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "id\times\{1\}"] \arrow[rr, bend right, "i"'] & Cyl(i) \arrow[r, "\simeq"] & X \end{tikzcd}$$

On veut montrer que i est un homéomorphisme sur son image, et donc construire une application réciproque. On a en fait toute une famille de factorisation comme ci-dessus donnée par les applications $a \mapsto (a, t) \in Cyl(i)$ pour $t \in [0, 1]$. On a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & Cyl(i)^{[0,1]} \arrow[d, "ev_0"] \\ X \arrow[r, hook] \arrow[ur, dotted, "h"] & Cyl(i) \end{tikzcd}$$

dont le relèvement est donné par le fait que $i : A \to X$ est une cofibration. L'homotopie induite h est juste l'inclusion de X dans le cylindre pour $t = 0$ et, pour tout $t > 0$, et $a \in A$, on a donc que

$$h(i(a))(t) = (a, t).$$

En particulier pour $t = 1$ (ou tout autre $t > 0$), on a que la restriction de $h(-)(1)$ à $i(A)$ donne une application continue $h(-)(1) : i(A) \to A \times \{1\} \cong A$ qui est un inverse à gauche de i. Ceci prouve l'injectivité de i et nous donne aussi immédiatement que $i : A \to i(A)$ est un homéomorphisme d'inverse $h(-)(1)$.

Exercice 5 (Quotients par une cofibration)**.**

1. Soit $A \subset X$ une cofibration. Démontrer que l'espace quotient X/A est homotope au cône $C(i) := A \times [0, 1] \cup_f X/(a, 1) \sim (a', 1)$ de i.

2. Que vaut l'homologie réduite du quotient X/A quand $A \subset X$ est une cofibration ?

3. Est-ce que le type d'homotopie du quotient par une cofibration est invariant par homotopie ?

4. On dit qu'un espace (X, x_0) est bien pointé si l'inclusion $x_0 \subset X$ est une cofibration. Donner des exemples et contre exemples d'espaces bien pointés.

5. Démontrer que si (X, x_0) est bien pointé, alors l'application quotient $\Sigma^{nr}X \to \Sigma X$ de la suspension non-réduite vers la suspension réduite est une équivalence d'homotopie.

Solution 5. Notons aussi $C(A) = C(A \stackrel{id}{\to} A) = A \times [0,1]/(a,1) \sim (a',1)$.

1. On a une inclusion $C(A) \hookrightarrow C(i)$ dont le quotient est homéomorphe à X/A. En particulier on a une application canonique $p : C(i) \to X/A$ (qui factorise $X \to X/A$ via l'inclusion de $X \hookrightarrow C(i)$). On souhaite maintenant construire une application réciproque $X/A \to C(i)$. Evidemment le choix naturel est d'envoyer la classe $[A] \in X/A$ sur la classe $[A \times \{1\}]$ dans le cône $C(i)$. La difficulté est de faire cela continuement et c'est là où va intervenir l'hypothèse de cofibration. En effet l'application quotient $(a,t) \mapsto [(a,t)] \in C(i)$ donne une application continue $A \times C(i)^{[0,1]}$ qui redonne $A \stackrel{i}{\to} X \hookrightarrow C(i)$ pour $t = 0$. On a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & C(i)^{[0,1]} \arrow[d, "ev_0"] \\ X \arrow[r, hook] \arrow[ur, dotted, "h"] & C(i) \end{tikzcd}$$

dont le relèvement h existe par cofibrance de i. Par commutativité du triangle du haut, on a donc que, pour $a \in A$, $h(a)(1) = [A \times \{1\}]$. Ainsi, $h(-)(1)$ définit bien une application continue $\overline{h(-)(1)} : X/A \to C(i)$ par passage au quotient. Il reste à voir que $\overline{h(-)(1)}$ est un inverse homotopique de p.

Pour cela, on étend h pour tout t en remarquant que la composée

$$X \stackrel{h(-)(t)}{\longrightarrow} C(i) \longrightarrow C(i)/C(A) \to A$$

est constante sur A (même raison de commutativité du diagramme). Ainsi, par passage au quotient, on a défini une homotopie $H : X/A \times [0,1] \to X/A$ qui vérifie que $H(-,1) = p \circ \overline{h(-)(1)}$ et $H(-,0)$ est l'identité de X/A. Il reste à voir que $\overline{h(-)(1)} \circ p$ est également homotope à l'identité. On remarque la factorisation

$$\begin{tikzcd} C(i) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "p"] & X \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "h(-)(1)"'] & X/A \arrow[r, "\overline{h(-)(1)}"] & C(i). \end{tikzcd}$$

Il est alors naturel de regarder l'homotopie $C(i) \to C(i)^{[0,1]}$ donnée par

$$C(i) \twoheadrightarrow X \stackrel{h}{\longrightarrow} C(i)^{[0,1]}$$

qui en 1 est exactement $\overline{h(-)(1)} \circ p$ et en 0 est la composée de la projection $C(i) \to X$ et de l'inclusion $X \hookrightarrow C(i)$. Ces deux composées étant des équivalences d'homotopie, on obtient que cette composée est homotope à l'identité de $C(i)$ (on a juste utilisé que X est un rétacte par déformation de $C(i)$).

En fait, la preuve montre qu'on a des équivalences d'homotopie de paires $(X/A, \{A\}) \simeq (C(i), C(A)) \simeq (C(i), [A \times \{1\}])$.

2. Par 1, on a que $\tilde{H}_*(X/A) \cong H_*(C(i))$. Or l'homologie réduite du cône est toujours isomorphe canoniquement à l'homologie de la paire $H_*(X, A)$. En effet: de l'inclusion de paires $(X, A) \hookrightarrow (X \cup CA, CA)$ on déduit que le morphisme canonique

$$H_i(X, A) \to H_i(X \cup CA, CA) \cong \tilde{H}_i(X \cup CA)$$

est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{N}$. Pour cela on applique le théorème des petites chaînes (dans le cas relatif) au recouvrement de $X \cup CA$ par les (deux) ouverts $CA \setminus A$ et $X \cup \{A \times [0, 1/2[\}$. On obtient que l'inclusion

$$C_*(X \cup \{A \times [0, 1/2[\}) + C_*(CA \setminus A, CA \setminus A) \to C_*(X \cup CA, CA)$$

est un quasi-isomorphisme. Par nullité de $C_*(CA \setminus A, CA \setminus A)$ on obtient donc

$$H_i(X \cup CA, CA) \cong H_i(X \cup \{A \times [0, 1/2[\}, \{A \times [0, 1/2[\}).$$

On conclut alors en remarquant que l'inclusion canonique de la paire (X, A) dans la paire $(X \cup \{A \times [0, 1/2[\}, \{A \times [0, 1/2[\})$ est une équivalence d'homotopie de paires.

3. Si $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ sont homotopes alors $Cyl(f)$ et $Cyl(g)$ sont homotopes et de même les cônes $C(f)$ et $C(g)$ sont homotopes. Par ailleurs si $\psi : Y \to Z$ est une équivalence d'homotopie, alors $Cyl(\psi \circ f) \simeq Cyl(\psi \circ g)$ et de même $C(\psi \circ f) \simeq C(\psi \circ g)$. Il résulte alors de 1. et de ces observations que *si $A \to X$ et $A \to X \xrightarrow{f} Y$ sont des cofibrations avec $f : X \to Y$ une homotopie, alors X/A et Y/A sont des équivalences.*

   Supposons plus généralement donné un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\simeq", "f"'] \arrow[d, "i"'] & A' \arrow[d, "i'"] \\ X \arrow[r, "\simeq", "g"'] & X' \end{tikzcd}$$

   avec i, i' des cofibrations (donc des inclusions) et f et g des équivalences d'homotopie. De la commutativité du diagramme, on obtient une application induite $X/A \to X'/A'$. Nos autres hypothèses impliquent en fait que *$X/A \to X'/A'$ est une équivalence d'homotopie.*

   Pour démontrer cela, par 1., il suffit de démontrer que l'application induite $C(i) \to C(i')$ est une équivalence d'homotopie; cette application est donnée[2] par $[(a, t)] \mapsto [(f(a), t)]$ et $x \mapsto g(x)$. Construisons son inverse homotopique. Pour cela, il faut construire une application de $C(i') \to C(i)$. Remarquons la propriété utile suivante:

   Lemme 1. *Soit $f : W \to Y$ et $p : Y \to Z$ des applications continues. Toute homotopie $H : W \times I \to Z$ entre $p \circ f$ et une application constante induit une application continue $C(f) \to Z$ rendant commutatif le diagramme* $\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[dr, "p"'] & C(f) \arrow[d] \\ & Z \end{tikzcd}$ *L'application $C(f) \to Z$ est définie par $y \mapsto p(y)$ et $[(w, t)] \mapsto H(w, t)$.*

   Le lemme est immédiat à vérifier (on a bien sûr supposé que $H(-, 0) = p \circ f$, sinon, il faut remplacer t par $1 - t$!

   Ainsi pour obtenir une application continue $C(i') \to C(i)$, il nous suffit donc de construire une application $g' : X' \to X$ telle que $q \circ g' \circ i'$ soit homotopiquement constante. Ici on note $q : X \to C(i)$ et $q' : X' \to C(i')$ les inclusions (et cofibrations) canoniques.

[2] on vérifie qu'elle envoie bien le point conique sur le point conique et est compatible avec les recollements par i et i'

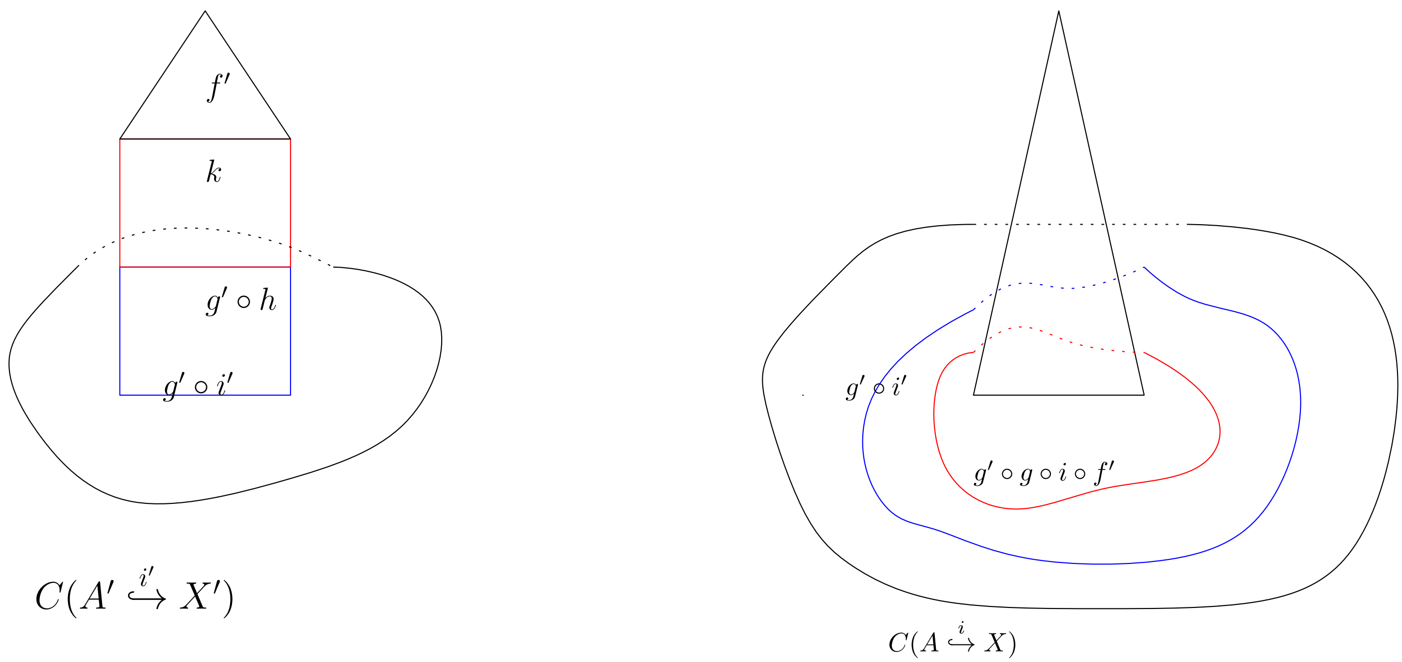

Figure 1: La source de H à droite, avec les applications représenteées, et son image, $C(i)$, à droite.

Soit f', g' des inverses homotopiques de f et g respectivement. On a alors que

$$q \circ g' \circ i' \simeq q \circ g' \circ i' \circ f \circ f' = q \circ g' \circ g \circ i \circ f' \simeq q \circ i \circ f'$$

qui est bien homotope à une application constante car $q \circ i$ l'est canoniquement (via $(a,t) \mapsto [(a,t)]$) On note $H : q \circ g' \circ i' \simeq q \circ i \circ f'$ l'homotopie résultante et aussi, par manque d'imagination, l'application induite $C(i') \to C(i)$. On doit maintenant montrer que les composées $C(i) \to C(i') \xrightarrow{H} C(i)$ et $C(i') \xrightarrow{H} C(i) \to C(i')$ sont homotopes à l'identité. La première composition est donnée par l'application $x \mapsto g' \circ g(x)$ et $[(a,t)] \mapsto [H(f(a),t),t]$. Or $g' \circ g$ est homotope à l'identité et on a aussi que

$$H \circ f : (q \circ g' \circ i') \circ f \simeq (q \circ i \circ f') \circ f \simeq q \circ i.$$

Il suit que la première application est homotope à l'identité (on a en fait composée les homotopies entre $C(i)$, $C(g' \circ g \circ i)$ et $C(i \circ f' \circ f)$ qui existent car toutes ces applications sont homotopes).

L'argument est analogue pour l'autre composition. Plus précisément, en notant respectivement $h : A' \times I \to X'$, $k : A' \times I \to X$ les homotopies $i' \simeq i' \circ f \circ f'$ et $g' \circ g \circ i \circ f' \simeq i \circ f'$, la première application est représentée par la figure (1), c'est à dire la formule

$$\begin{aligned} H(x') &= g(x') \text{ pour } x' \in X', \text{ et pour } a' \in A', \\ H((a',t)) &= g'(h(a',3t)) \quad \text{pour } t \leq 1/3, \\ &= k(a',3t-1) \quad \text{pour } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ &= (f'(a'),3t-2) \quad \text{pour } 2/3 \leq t. \end{aligned}$$

L'homotopie entre $H \circ f$ et $Id_{C(i)}$ est simplement celle qui contracte les deux étages $t \in [0,1/3] \cup [1/3,2/3]$ sur $\{0\}$ dans la composée $H \circ f$.

4. N'importe quel sommet d'un CW-complexe donne un exemple. Pour un contre-exemple, il suffit de prendre 0 dans $X = \{0\} \cup \{1/n, n > 0\}$. Si c'était une cofibration $\{0\}$ aurait un voisinage dans X qui en soit un rétracte par déformation ce qui n'est pas le cas vu qu'aucun de ces voisinages n'est connexe par arcs.

5. Par 3., il suffit de vérifier que l'inclusion $\{[(x_0,t)], t \in [0,1]\} \subset \Sigma^{nr}X = X \times [0,1]/\Big((x,0) \sim (x',0),\ (y',1) \sim (y,1)\Big)$ est une cofibration car l'inclusion du point conique $[x_0,1]$ dans la suspension l'est également, et que cette inclusion dans $\{[(x_0,t)], t \in [0,1]\}$ est une équivalence d'homotopie. Comme $\Sigma^{nr}X$ est le pushout du cylindre $X \times [0,1]$, il suffit de vérifier que $\{x_0\} \times [0,1] \cup X \times \{0,1\} \subset X \times [0,1]$ est une cofibration. Ceci est équivalent à dire que

$$\{x_0\} \times [0,1]^2 \cup X \times \{0,1\} \times [0,1] \cup X \times [0,1] \times \{0\} \subset X \times [0,1] \times [0,1]$$

est un rétracte. Comme d'habitude, on identifie par un homéomorphisme de paires $([0,1]^2, \{0\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0,1\})$ avec $[0,1]^2, \times [0,1] \times \{1\}$ (c'est à dire qu'on échange le complémentaire d'une face dans le bord avec la face). On en déduit que notre inclusion est une cofibration revient à dire que $(X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times [0,1]) \times [0,1] \subset X \times [0,1] \times [0,1]$ est un rétracte. Et ce dernier point découle du fait que $X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times [0,1] \subset X \times [0,1]$ est un rétracte puisque $\{x_0\} \subset X$ est une cofibration !