Devoir Maison

Exercice 1 (The canonical model structure in Cat)**.** Let Cat denote the category of small categories with morphisms given by functors between them. Let $\mathcal{W}$ be the collection of functors which are equivalences of categories.

1. Show that the Gabriel-Zisman localization $\mathrm{Cat}[\mathcal{W}^{-1}]$ is equivalent to the category whose objects are small categories and morphisms are isomorphism classes of functors.

2. A functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ between small categories is said to be an isofibration if for every object $c \in \mathcal{C}$ and every isomorphism $f : F(c) \to d$ in $\mathcal{D}$, there exists an object $c' \in \mathcal{C}$ and an isomorphism $u : c \to c'$ such that $d = F(c')$ and $f = F(u)$. Show that an isofibration that is an equivalence of categories is surjective on objects. Conversely, show that if a functor F is fully faithful and surjective on objects then it is an isofibration.

3. A functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ is said to be a cofibration if it is injective on objects. Let Fib denote the collection of all isofibrations and Cof the class of cofibrations. Show that $(\mathrm{Cat}, \mathcal{W}, \mathrm{Fib}, \mathrm{Cof})$ is a model structure and identify its fibrant-cofibrant objects.

Exercice 2 (Whitehead Theorem for model categories)**.** The goal is to prove that in a model category C, *if X, Y are both fibrant and cofibrant objects, then a map $f : X \to Y$ is a weak equivalence if and only if it is an homotopy equivalence.*

1. Let$f \overset{l}{\sim} g$ be left homotopic. Show that f is a weak equivalence if and only if g is a weak equivalence.

2. Let $i : X \overset{\sim}{\hookrightarrow} C$ be an acyclic cofibration where X is both fibrant and cofibrant and C is fibrant. Prove that there is a retraction r of i and then show that r is an homotopy inverse of i.

3. Deduce from the previous question that a weak equivalence between fibrant and cofibrant objects is an homotopy equivalence.

4. Let $f : X \to Y$ be an homotopy equivalence between fibrant and cofibrant objects, and let $f : X \underset{\sim}{\overset{i}{\hookrightarrow}} C \overset{p}{\twoheadrightarrow} Y$ be a factorization where the first map is an acyclic cofibration.

   (a) Prove that C is both fibrant and cofibrant and that if g is an homotopy inverse of f, with left homotopy $H : C' \to Y$ between id_Y and $f \circ g$, there is a lift $H' : C' \to C$ such that $p \circ H' = H$ and $H' \circ i_0 = i \circ g$.

   (b) Deduce that $H' \circ i_1 \circ p$ is homotopical to id_C (one can note that i has an homotopy inverse) and then that it is a weak equivalence.

   (c) Prove that p is a retract of a weak equivalence and then conclude.

Exercice 3 (*Objets en cylindre d'une structures de modèle (exam 2018)*)**.** Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{W}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ une catégorie de modèle. Soit X un objet de $\mathcal{C}$. On notera $i_0, i_1 : X \to C$ les applications canoniques $X \to X \coprod X \to C$ associée à un cylindre de X.

1. Montrer que si $f \overset{r}{\sim} h$ alors f est une équivalence faible si et seulement si g l'est.

2. Soit $Y \overset{\sim}{\to} P \twoheadrightarrow Y \times Y$ un objet en chemin de Y. On note $proj_i : P \to Y$ les projections canoniques. On suppose que Y est fibrant. Démontrer que $proj_0$ et $proj_1$ sont des fibrations.

3. Soit $Y \overset{\sim}{\rightarrowtail} P_Y \twoheadrightarrow Y \times Y$ un objet en chemin de Y fixé tel que la première flèche soit une cofibration acyclique.

   (a) Démontrer qu'un tel objet en chemin existe toujours.

   (b) Montrer que si X est de plus cofibrant, alors deux morphismes $f, g : X \to Y$ sont homotopes à droite si et seulement si il existe une homotopie $h : X \to P_Y$ telle que $proj_0 \circ h = f$ et $proj_1 \circ h = g$.

Exercice 4 (Complexes de chaines. (exam 2018)). Soit $\mathcal{C} = Ch(R)$ muni de la structure de modèle projective. Soit I le complexe concentré en degré 0 et 1 donné par $I_0 = R \oplus R$, $I_1 = R$ avec différentielle $\partial(r) = (r, -r)$. Rappelons que le produit tensoriel $A \otimes B$ de complexes de chaines est muni de la différentielle $d(a \otimes b) = d_A(a) \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes d_B(b)$ où $|a|$ est le degré de a et que deux morphismes de complexes de chaines $f, g : X \to Y$ sont *homotopes au sens des complexes de chaines* si il existe $h : X_* \to Y_{*+1}$ tel que $dh + hd = f - g$.

1. Construire, pour tout complexe X, une factorisation de $id \coprod id : X \coprod X \to X$ de la forme $\overset{i_0 \coprod i_1}{\hookrightarrow} X \otimes I \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ où $i_0(r) = (r, 0, 0)$ et $i_1(r) = (0, r, 0)$.

2. Montrer que deux morphismes de complexes de chaines $f, g : X \to Y$ sont homotopes au sens des complexes de chaines si et seulement si il existe un morphisme de complexe $H : I \otimes X \to Y$ tel que $H \circ i_0 = f$ et $H \circ i_1 = g$.

3. Donner une condition sur X pour que la factorisation de la question (1) soit un cylindre de X.

4. En déduire que si X est cofibrant, deux morphismes de complexes de chaines sont homotopes au sens des complexes de chaines si et seulement si ils sont homotopes à gauche au sens de la structure de modèle si et seulement si ils sont homotopes au sens de la structure de modèle.

5. Montrer que si X est cofibrant, deux morphismes de complexes de chaines $f, g : X \to Y$ sont homotopes au sens de la structure de modèle si et seulement si ils sont homotopes au sens des complexes de chaines. (Indic: on pourra utiliser l'exercice précédent).

6. On considère un diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail, "i"', "\wr"] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "f"] & Y \end{tikzcd}$$
où A est cofibrant. Montrer que le relèvement est unique à homotopie près.