Examen

Exercice 1 (*Objets en cylindre d'une structures de modèle)*. Soit $(\mathbf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ une catégorie de modèle. Soit X un objet de $\mathbf{C}$.

On notera $i_0, i_1 : X \to C$ les applications canoniques $X \to X \coprod X \to C$ associée à un cylindre de X.

1. Montrer que si $f \overset{r}{\sim} h$ alors f est une équivalence faible si et seulement si g l'est.

2. Soit $Y \overset{\sim}{\to} P \twoheadrightarrow Y \times Y$ un objet en chemin de Y. On note $proj_i : P \to Y$ les projections canoniques. On suppose que Y est fibrant. Démontrer que $proj_0$ et $proj_1$ sont des fibrations.

3. Soit $Y \overset{\sim}{\rightarrowtail} P_Y \twoheadrightarrow Y \times Y$ un objet en chemin de Y fixé tel que la première flèche soit une cofibration acyclique.

   (a) Démontrer qu'un tel objet en chemin existe toujours.

   (b) Montrer que si X est de plus cofibrant, alors deux morphismes $f, g : X \to Y$ sont homotopes à droite si et seulement si il existe une homotopie $h : X \to P_Y$ telle que $proj_0 \circ h = f$ et $proj_1 \circ h = g$.

Exercice 2 (**Complexes de chaines.**). Soit $\mathbf{C} = Ch(R)$ muni de la structure de modèle projective. Soit I le complexe concentré en degré 0 et 1 donné par $I_0 = R \oplus R$, $I_1 = R$ avec différentielle $\partial(r) = (r, -r)$. Rappelons que le produit tensoriel $A \otimes B$ de complexes de chaines est muni de la différentielle $d(a \otimes b) = d_A(a) \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes d_B(b)$ où $|a|$ est le degré de a et que deux morphismes de complexes de chaines $f, g : X \to Y$ sont *homotopes au sens des complexes de chaines* si il existe $h : X_* \to Y_{*+1}$ tel que $dh + hd = f - g$.

1. Construire, pour tout complexe X, une factorisation de $id \coprod id : X \coprod X \to X$ de la forme $\overset{i_0 \coprod i_1}{\hookrightarrow} X \otimes I \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ où $i_0(r) = (r, 0, 0)$ et $i_1(r) = (0, r, 0)$.

2. Montrer que deux morphismes de complexes de chaines $f, g : X \to Y$ sont homotopes au sens des complexes de chaines si et seulement si il existe un morphisme de complexe $H : I \otimes X \to Y$ tel que $H \circ i_0 = f$ et $H \circ i_1 = g$.

3. Donner une condition sur X pour que la factorisation de la question (1) soit un cylindre de X.

4. En déduire que si X est cofibrant, deux morphismes de complexes de chaines sont homotopes au sens des complexes de chaines si et seulement si ils sont homotopes à gauche au sens de la structure de modèle si et seulement si ils sont homotopes au sens de la structure de modèle.

5. Montrer que si X est cofibrant, deux morphismes de complexes de chaines $f, g : X \to Y$ sont homotopes au sens de la structure de modèle si et seulement si ils sont homotopes au sens des complexes de chaines. (Indic: on pourra utiliser l'exercice précédent).

6. On considère un diagramme commutatif $\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail, "i"', "\wr"] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "f"] & Y \end{tikzcd}$ où A est cofibrant. Montrer que le relèvement est unique à homotopie près.

Exercice 3 (*Le classifiant*)**.** Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. On note $N\mathbf{C}_\bullet$ l'ensemble simplicial donné, en degré n, par $N\mathbf{C}_n$ est l'ensemble des suites de n-flèches composables dans $\mathbf{C}$; autrement dit

$$N\mathbf{C}_n := \{(X_n \overset{f_n}{\to} X_{n-1} \overset{f_{n-1}}{\to} X_{n-2} \to \dots x_1 \overset{f_1}{\to} X_0), X_i \in \mathbf{C}\}.$$

Les applications de bord sont données par l'opération de composition in $\mathbf{C}$: $d_i(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_i \circ f_{i+1}, \dots, f_n)$ si $i \neq 0, n$ and d_0 est l'oubli de la dernière flèche et d_n celui de la première. Chaque dégénérescence $s_i(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_i, id, f_{i+1}, \dots, f_n)$ ajoute l'identité à l'endroit i de la liste.

1. Démontrer que $\mathbf{C} \mapsto N\mathbf{C}_\bullet$ est un foncteur de la catégorie des petites catégories vers les ensembles simpliciaux.

2. On suppose que G est un groupe et on note $\tilde{G}$ la catégorie qui a un seul objet est dont les flèches sont les éléments de G avec la mutliplication comme composition. Démontrer que $\tilde{G}$ est bien une catégorie et décrire les n-simplexes de $N\tilde{G}_\bullet$.

3. Démontrer que $N\tilde{G}_\bullet$ est un ensemble simplicial fibrant.

4. Soit EG le nerf de la catégorie $\mathcal{E}_G$ où les objets sont les éléments de G et il y a un unique morphisme de g vers g' pour tout g, g'. Démontrer que EG est bine une catégorie et identifier les n-simplexes de $NEG_\bullet$.

5. Démontrer qu'il existe un foncteur $\phi : G \to \tilde{G}$ qui envoie un morphisme $g \to g'$ de EG vers $g'.g^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\tilde{G}}(*, *)$.

6. Démontrer que le morphisme induit $N\phi : NEG_\bullet \to N\tilde{G}_\bullet$ est une fibration de Kan.

7. Montrer que $NEG_\bullet$ est contractile. En déduire le type d'homotopie de $N\tilde{G}_\bullet$.

Exercice 4 (*Modules sur les cdgas*)**.** Soit A une CDGA. On note $A-\mathbf{mod}$ la catégorie des A-modules différentiels gradués. Un objet est donc un complexe de cochaines M muni d'un morphisme de complexes $A \otimes_{\mathbb{Q}} M \to M$ vérifiant les axiomes d'un module ($(a \cdot b) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$, $1 \cdot m = m$). On munit $Ch(\mathbb{Q})$ de la structure de modèle projective et on rappelle que la catégorie $\mathbf{CDGA}$ a une structure de modèle telle que l'oubli $\mathbf{CDGA} \to Ch(\mathbb{Q})$ est de Quillen à droite.

1. Démontrer que le foncteur oubli $U : A-\mathbf{mod} \to Ch(\mathbb{Q})$ est un adjoint à droite et construire son adjoint à gauche que l'on notera F.

2. Démontrer que $A-\mathbf{mod}$ admet une structure de modèle telle que

   - les équivalences faibles $\mathcal{W}_{A-\mathbf{mod}}$ sont les flèches f telles que $U(f)$ est un quasi-isomorphisme de complexes;
   - les fibrations $\mathcal{F}_{A-\mathbf{mod}}$ sont les flèches f telles que $U(f)$ est surjective.

   (Indication: utiliser le théorème de transfert de structures de modèles).

3. Démontrer que le foncteur $A-\mathbf{mod} \otimes A-\mathbf{mod} \xrightarrow{- \otimes_A -} A-\mathbf{mod}$ admet un foncteur dérivé total à gauche $- \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} - : \mathbf{Ho}(A-\mathbf{mod} \times A-\mathbf{mod}) \cong \mathbf{Ho}(A-\mathbf{mod} \times \mathbf{Ho}(A-\mathbf{mod}) \to \mathbf{Ho}(A-\mathbf{mod})$.

4. Soit $f : A \to B$ un morphisme de cdgas. Montrer que le foncteur $f_* : B-\mathbf{mod} \to A-\mathbf{mod}$, donné par $A \otimes_{\mathbb{Q}} M \overset{f \otimes id}{\to} B \otimes_{\mathbb{Q}} M \to M$, est un adjoint de Quillen à droite.

5. Si $f : A \to B$ est un quasi-isomorphisme de cdgas, montrer que f_* est une équivalence de Quillen.