Examen

Exercice 1 (*Modules sur les cdgas*)**.** Soit A une CDGA. On note $A-\mathbf{mod}$ la catégorie des A-modules différentiels gradués. Un objet est donc un complexe de cochaines M muni d'un morphisme de complexes $A\otimes_{\mathbb{Q}} M \to M$ vérifiant les axiomes d'un module ($(a\cdot b)\cdot m = a\cdot(b\cdot m)$, $1\cdot m = m$). On munit $Ch(\mathbb{Q})$ de la structure de modèle projective et on rappelle que la catégorie **CDGA** a une structure de modèle telle que l'oubli $\mathbf{CDGA} \to Ch(\mathbb{Q})$ est de Quillen à droite.

1. Démontrer que le foncteur oubli $U : A-\mathbf{mod} \to Ch(\mathbb{Q})$ est un adjoint à droite et construire son adjoint à gauche que l'on notera F.

2. Démontrer que $A-\mathbf{mod}$ admet une structure de modèle telle que

   - les équivalences faibles $\mathcal{W}_{A-\mathbf{mod}}$ sont les flèches f telles que $U(f)$ est un quasi-isomorphisme de complexes;
   - les fibrations $\mathcal{F}_{A-\mathbf{mod}}$ sont les flèches f telles que $U(f)$ est surjective.

   (Indication: utiliser le théorème de transfert de structures de modèles).

3. Démontrer que le foncteur $A-\mathbf{mod}\otimes A-\mathbf{mod} \overset{-\otimes_A -}{\longrightarrow} A-\mathbf{mod}$ admet un foncteur dérivé total à gauche $-\overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}}- : \mathbf{Ho}(A-\mathbf{mod}\times A-\mathbf{mod}) \cong \mathbf{Ho}(A-\mathbf{mod}\times \mathbf{Ho}(A-\mathbf{mod}) \to \mathbf{Ho}(A-\mathbf{mod})$.

4. Soit $f : A \to B$ un morphisme de cdgas. Montrer que le foncteur $f_* : B-\mathbf{mod} \to A-\mathbf{mod}$, donné par $A\otimes_{\mathbb{Q}} M \overset{f\otimes id}{\to} B\otimes_{\mathbb{Q}} M \to M$, est un adjoint de Quillen à droite.

5. Si $f : A \to B$ est un quasi-isomorphisme de cdgas, montrer que f_* est une équivalence de Quillen.

Exercice 2 (*Autour de* **Top**)**.** On note $I = [0,1]$ et on rappelle que deux applications continues $f_0, f_1 : X \to Y$ entre espaces topologiques sont homotopes (au sens usuel) si il existe une application continue $H : X\times I \to Y$ telle que $H(-,0) = f_0(-)$ et $H(-,1) = f_1$.

On munit **Top** de la structure de modèle de Quillen (les fibrations sont les fibrations de Serre et les équivalences faibles sont les équivalences d'homotopie faibles).

1. Démontrer que deux applications continues sont homotopes à gauche si et seulement si elles sont homotopes au sens usuel.

2. On note $[X,Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie (pour la définition usuelle) d'applications continues $X \to Y$ dans **Top**. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, on a une bijection naturelle
$$[S^n, X] \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho(Top)}}(S^n, X).$$

3. En déduire pour tout $x \in X$, une caractérisation de $\pi_n(X,x)$ en termes de morphismes dans la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$.

4. (*questions plus dures*) On rappelle que **Top** est propre à gauche: c'est à dire que le poussé-en-avant de toute équivalence faible par une cofibration est une équivalence faible.

   Soit $f : X \to Y$ une application continue et $X \overset{i}{\rightarrowtail} Z \overset{p}{\underset{\sim}{\twoheadrightarrow}} Y$ une factorisation donnée par la structure de modèle. On note $Cyl(X \overset{f}{\to} Y)$ et $Cyl(X \overset{i}{\rightarrowtail} Z)$ les cylindres de f et i.

(a) Démontrer que l'application canonique $Cyl(X \overset{i}{\rightarrowtail} Z) \to Cyl(X \xrightarrow{f} Y)$ induite par $z \mapsto p(z)$ et $(x,t) \mapsto (x,t)$ (pour $t \in [0,1[$, $x \in X$) est une équivalence d'homotopie faible.

(b) Démontrer que pour toute application continue $g : X \to W$, on a un isomorphisme naturel

$$\mathbb{L}\operatorname{colim}(W \overset{g}{\leftarrow} X \overset{f}{\rightarrow} Y) \cong W \coprod_{X\times\{0\}} Cyl(X \overset{f}{\rightarrow} Y)$$

dans $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$ (Indication: on pourra utiliser (a) pour se ramener au cas où $X \to Y$ est une cofibration).

Exercice 3 (*Le classifiant)***.** Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. On note $N\mathbf{C}_\bullet$ l'ensemble simplicial donné, en degré n, par $N\mathbf{C}_n$ est l'ensemble des suites de n-flèches composables dans $\mathbf{C}$; autrement dit

$$N\mathbf{C}_n := \{(X_n \overset{f_n}{\to} X_{n-1} \overset{f_{n-1}}{\to} X_{n-2} \to \dots x_1 \overset{f_1}{\to} X_0), X_i \in \mathbf{C}\}.$$

Les applications de bord sont données par l'opération de composition in $\mathbf{C}$: $d_i(f_1,\dots,f_n) = (f_1,\dots,f_i \circ f_{i+1},\dots,f_n)$ si $i \neq 0, n$ and d_0 est l'oubli de la dernière flèche et d_n celui de la première. Chaque dégénérescence $s_i(f_1,\dots,f_n) = (f_1,\dots,f_i,id,f_{i+1},\dots,f_n)$ ajoute l'identité à l'endroit i de la liste.

1. Démontrer que $\mathbf{C} \mapsto N\mathbf{C}_\bullet$ est un foncteur de la catégorie des petites catégories vers les ensembles simpliciaux.

2. On suppose que G est un groupe et on note $\tilde{G}$ la catégorie qui a un seul objet est dont les flèches sont les éléments de G avec la mutliplication comme composition. Démontrer que $\tilde{G}$ est bien une catégorie et décrire les n-simplexes de $N\tilde{G}_\bullet$.

3. Démontrer que $N\tilde{G}_\bullet$ est un ensemble simplicial fibrant.

4. Soit EG le nerf de la catégorie $\mathcal{E}_G$ où les objets sont les éléments de G et il y a un unique morphisme de g vers g' pour tout g, g'. Démontrer que EG est bine une catégorie et identifier les n-simplexes de $NEG_\bullet$.

5. Démontrer qu'il existe un foncteur $\phi : G \to \tilde{G}$ qui envoie un morphisme $g \to g'$ de EG vers $g'.g^{-1} \in \operatorname{Hom}_{\tilde{G}}(*,*)$.

6. Démontrer que le morphisme induit $N\phi : NEG_\bullet \to N\tilde{G}_\bullet$ est une fibration de Kan.

7. Montrer que $NEG_\bullet$ est contractile. En déduire le type d'homotopie de $N\tilde{G}_\bullet$.