Quelques exercices sur fibrations, cofibrations et CW-complexes

mais indiquant également les bâtiments de cours

Exercice 1 (localité des notions de fibrations)**.** Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant. Si $p : E \to B$ est une application telle que tout point b admet un voisinage ouvert U tel que $p : p^{-1}(U) \to U$ est une fibration de Serre, alors $p : E \to B$ est une fibration de Serre.

1. Démontrer que le tiré en arrière d'une fibration de Serre (resp. Hurewicz) est une fibration de Serre (resp. Hurewicz).

2. Soit $X \to Y$ une fibration de Serre. Montrer que pour tout $0 \leq a < b \leq 1$, on a un relèvement du diagramme suivant:
$$\begin{tikzcd} \partial I^n \times [a,b] \cup I^n \times \{a\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d] \\ I^n \times [a,b] \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y \end{tikzcd}$$

3. En déduire le résultat (on pourra prendre une triangulation du cube I^{m+1} suffisamment fine).

Exercice 2 (Théorème de Whitehead)**.** Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces cellulaires. On veut démontrer que f est une équivalence d'homotopie faible, alors f est une équivalence d'homotopie.

1. Soit L un CW-complexe et $K \subset L$ un sous-complexe cellulaire. Soit $\emptyset \neq A \subset B$ une paire d'espaces topologiques. On suppose que, pour tout entier $n \geq 0$, si $L^{(n)} - K^{(n)} \neq \emptyset$, alors, quelque soit $a_0 \in A$, $\pi_n(B, A, a_0) = 0$[1]. Démontrer que toute application continue $g : (L, K) \to (B, A)$ est homotope relativement à K à une application à valeur dans A.

2. On suppose que $f : X \to Y$ est l'inclusion d'un sous-CW complexe. En déduire qu'alors $f : X \to Y$ est un rétracte par déformation de Y et conclure.

3. Démontrer que l'application de paire naturelle $(X \cup Y, X) \hookrightarrow (Cyl(f), X)$ est homotope à une application à valeur dans X (utiliser la première question). Ici $Cyl(f) = X \times [0, 1] \cup_f Y$ est le cylindre de f.

4. Démontrer que l'homotopie de la question précédente s'étend en une homotopie définie sur tout le cylindre (et pas seulement $X \cup Y$).

5. En déduire qu'il existe une application $Cyl(f) \to Cyl(f)$ à valeur dans X, qui vaut l'identité sur X, et est homotope à l'identité.

6. Conclure (on pourra utiliser la première question).

Exercice 3. Soit X un espace connexe par arcs non-vide. Démontrer que pour tout $x \in X$, $n \geq 1$, on a
$$\pi_n(X, x) \cong \pi_{n-1}(\Omega_x X, c_x)$$
où $\Omega_x X$ désigne l'espace des lacets de X d'origine x, pointé par le lacet constant.

Exercice 4 (Une cofibration est une inclusion)**.**
1. Démontrer que si $A \subset X$ est un rétracte de X et que X est Hausdorff, alors A est fermé.

[1] pour $n = 0$, on définit cette condition comme le fait que l'application naturelle $\pi_0(A) \to \pi_0(B)$ est une bijection

2. Démontrer que si $A \to X$ est une cofibration, alors A est l'inclusion d'un sous-espace dans X, qui est fermé si X est Hausdorff. (utiliser le cylindre de $A \to X$ et la première question).

Exercice 5 (Quotients par une cofibration)**.**

1. Soit $A \subset X$ une cofibration. Démontrer que l'espace quotient X/A est homotope au cône $C(i) := A \times [0,1] \cup_f X/(a,1) \sim (a',1)$ de i.
2. Que vaut l'homologie réduite du quotient X/A quand $A \subset X$ est une cofibration ?
3. Est-ce que le type d'homotopie du quotient par une cofibration est invariant par homotopie ?
4. On dit qu'un espace (X, x_0) est bien pointé si l'inclusion $x_0 \subset X$ est une cofibration. Donner des exemples et contre exemples d'espaces bien pointés.
5. Démontrer que si (X, x_0) est bien pointé, alors l'application quotient $\Sigma^{nr} X \to \Sigma X$ de la suspension non-réduite vers la suspension réduite est une équivalence d'homotopie.