G. Ginot, H. Pourcelot - Intro. à l'homotopie M2- Paris 13 - Paris 6 2018-2019

Quelques exercices sur (co)fibrations, CW-complexes et d'algèbre homologique

Exercice 1 (localité des notions de fibrations)**.** Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant. Si $p : E \to B$ est une application telle que tout point b admet un voisinage ouvert U tel que $p : p^{-1}(U) \to U$ est une fibration de Serre, alors $p : E \to B$ est une fibration de Serre.

1. Démontrer que le tiré en arrière d'une fibration de Serre (resp. Hurewicz) est une fibration de Serre (resp. Hurewicz).

2. Soit $X \to Y$ une fibration de Serre. Montrer que pour tout $0 \leq a < b \leq 1$, on a un relèvement du diagramme suivant:
$$\begin{tikzcd}
\partial I^n \times [a,b] \cup I^n \times \{a\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d] \\
I^n \times [a,b] \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y
\end{tikzcd}$$

3. En déduire le résultat (on pourra prendre une triangulation du cube I^{m+1} suffisamment fine).

Exercice 2. Soit X un espace connexe par arcs non-vide. Démontrer que pour tout $x \in X$, $n \geq 1$, on a $\pi_n(X, x) \cong \pi_{n-1}(\Omega_x X, c_x)$ où $\Omega_x X$ désigne l'espace des lacets de X d'origine x, pointé par le lacet constant.

Exercice 3 (Une cofibration est une inclusion)**.** 1. Démontrer que si $A \subset X$ est un rétracte de X et que X est Hausdorff, alors A est fermé.

2. Démontrer que si $A \to X$ est une cofibration, alors A est l'inclusion d'un sous-espace dans X, qui est fermé si X est Hausdorff. (utiliser le cylindre de $A \to X$ et la première question).

Exercice 4 (Quotients par une cofibration)**.** 1. Soit $A \subset X$ une cofibration. Démontrer que l'espace quotient X/A est homotope au cône $C(i) := A \times [0,1] \cup_f X/(a,1) \sim (a',1)$ de i.

2. Que vaut l'homologie réduite du quotient X/A quand $A \subset X$ est une cofibration ?

3. Est-ce que le type d'homotopie du quotient par une cofibration est invariant par homotopie ?

4. On dit qu'un espace (X, x_0) est bien pointé si l'inclusion $x_0 \subset X$ est une cofibration. Donner des exemples et contre exemples d'espaces bien pointés.

5. Démontrer que si (X, x_0) est bien pointé, alors l'application quotient $\Sigma^{nr} X \to \Sigma X$ de la suspension non-réduite vers la suspension réduite est une équivalence d'homotopie.

Exercice 5 (Théorème de Whitehead)**.** Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces cellulaires. On veut démontrer que f est une équivalence d'homotopie faible, alors f est une équivalence d'homotopie.

1. Soit L un CW-complexe et $K \subset L$ un sous-complexe cellulaire. Soit $\emptyset \neq A \subset B$ une paire d'espaces topologiques. On suppose que, pour tout entier $n \geq 0$, si $L^{(n)} - K^{(n)} \neq \emptyset$, alors, quelque soit $a_0 \in A$, $\pi_n(B, A, a_0) = 0$[1]. Démontrer que toute application continue $g : (L, K) \to (B, A)$ est homotope relativement à K à une application à valeur dans A.

2. On suppose que $f : X \to Y$ est l'inclusion d'un sous-CW complexe. En déduire qu'alors $f : X \to Y$ est un rétracte par déformation de Y et conclure.

[1] pour $n = 0$, on définit cette condition comme le fait que l'application naturelle $\pi_0(A) \to \pi_0(B)$ est une bijection

3. Démontrer que l'application de paire naturelle $(X \cup Y, X) \hookrightarrow (Cyl(f), X)$ est homotope à une application à valeur dans X (utiliser la première question). Ici $Cyl(f) = X \times [0,1] \cup_f Y$ est le cylindre de f.

4. Démontrer que l'homotopie de la question précédente s'étend en une homotopie définie sur tout le cylindre (et pas seulement $X \cup Y$).

5. En déduire qu'il existe une application $Cyl(f) \to Cyl(f)$ à valeur dans X, qui vaut l'identité sur X, et est homotope à l'identité.

6. Conclure (on pourra utiliser la première question).

Exercice 6 (Une propriètè de relévement dans le cas des complexes).
Soit $f : X_* \to Y_*$ un quasi-isomorphisme de complexes de chaines concentrés en degrés positifs. On suppose que $f_i : X_i \to Y_i$ est surjectif en tout degré.

1. Démontrer que les groupes d'homologie du complexe $\mathrm{Ker}(f : X \to Y)$ sont tous nuls.

2. Soit $\psi : P_* \to Y_*$ un morphisme de complexes de chaines tels que les P_n soient des modules projectifs. Le but de la question est de montrer qu'il existe un relèvement h qui rende commutatif le diagramme de complexe de chaines

$$\begin{tikzcd} & X_* \arrow[d, "f"] \\ P_* \arrow[ur, dotted, "h"] \arrow[r, "\psi"'] & Y_*. \end{tikzcd}$$

   (a) On suppose avoir construit $h_i : P_i \to X_i$ pour $i = 0 \dots n$ tel que $f_i \circ h_i = \psi_i$ et les h_i commute avec les différentielles. Démontrer qu'il existe un morphisme linéaire $\tilde{h}_{n+1} : P_{n+1} \to X_{n+1}$ relevant ψ_{n+1} de sorte que pour tout $p \in P_n$, $d \circ \tilde{h}_{n+1}(p) - \tilde{h_n}(dp)$ est un bord.

   (b) Conclure à l'existence de h.

Exercice 7 (Foncteurs additifs)**.** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathrm{D}$ un foncteur entre catégories additives.

1. Montrer que pour tout $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, la somme $f+g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est égale à la composée

$$X \xrightarrow{\delta} X \times X \xrightarrow{(f,g)} Y \times Y \xrightarrow{\sim} Y \oplus Y = Y \coprod Y \xrightarrow{\sigma} Y$$

   où δ et σ sont les applications naturelles induites par $\mathrm{Id}_X : X \to X$ et $\mathrm{Id}_Y : Y \to Y$.

2. En déduire que F est additif si et seulement si, l'application canonique $F(X) \oplus F(Y) \to F(X \oplus Y)$ est un isomorphisme pour tout X, Y objets de $\mathcal{C}$.

Exercice 8 (**Un foncteur dérivé**)**.** Soit R un anneau commutatif $x \in R$ non diviseur de zéro

1. Soit $R/(x)$ le module quotient de R par xR. Trouver une résolution projective de $R/(x)$.
2. En déduire $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.
3. Soient M, L, K des R-modules. Montrer que $N \mapsto F(N) := \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, L), K)$ induit un foncteur F de la catégorie R-**Mod** vers elle-même.
4. Donner des conditions sur L, M pour que F soit exact à gauche puis sur K, M pour que F soit exact à droite. Peut on en déduire des conditions sur K, L, M pour que F soit exact ?
5. On suppose désormais que $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$ et $K = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
   (a) Vérifier que F est exact à droite puis donner une expression de son foncteur dérivé $\mathbb{L}F_*(R/(x))$.
   (b) En déduire $H^i(\mathbb{L}(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ pour $L = \mathbb{Z}$ puis $L = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.