

Homotopie II - TD 1 : révisions

Nicolas Guès

January 6, 2025

Exercices empruntés à Grégory Ginot.

1 Algèbre homologique

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif et M, L, K des A -modules. On note $\mathbb{C}$ la catégorie des A -modules.

- (1) Montrer que $\mathbb{C} \ni N \mapsto \text{Hom}_A(M \otimes_A \text{Hom}_A(N, L), K)$ induit un foncteur (covariant) $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
- (2) i) Donner des conditions sur L, M pour que F soit exact à gauche.
ii) Donner des conditions sur K, M pour que F soit exact à droite.
iii) Donner des conditions sur K, L, M pour que F soit exact.
- (3) On suppose $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$ et $K = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
i) Montrer que F est exact à droite.
ii) Soit $m \geq 1$ et $L = \mathbb{Z}$. Calculer $L^i(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
iii) Soit $m, n \geq 1$ et $L = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Calculer $L^i(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{C}$ une catégorie abélienne qui admet des produits indexés par un ensemble I . On suppose de plus que $\mathbb{C}$ admet assez d'objets injectifs.

- 1) Montrer que $\prod_{i \in I} X_i$ est injectif si chaque X_i est un objet injectif.
- 2) Soit $\mathbb{C}'$ une autre catégorie abélienne admetant des produits indexés par I . On suppose de plus que les foncteurs $\prod : \mathbb{C}^I \rightarrow \mathbb{C}$ et $\prod : \mathbb{C}'^I \rightarrow \mathbb{C}'$ sont exacts. Soit enfin $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}'$ un foncteur *additif exact à gauche et commutant aux produits indexés par I* . Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, le j -ème foncteur dérivé $R^j F$ commute aux produits indexés par I , c'est à dire :

$$R^j F \left(\prod_{i \in I} X_i \right) \cong \prod_{i \in I} R^j F(X_i).$$

Exercice 3 (Lemme de Baer). (1) Soit E un A -module injectif. Montrer que E vérifie la condition suivante :

pour tout idéal I de A , l'application $\text{Hom}_A(A, E) \longrightarrow \text{Hom}_A(I, E)$ est surjective. (1.1)

- (2) Soit E un A -module vérifiant la condition (1.1). On se donne un diagramme $0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N$. On $\begin{matrix} g \downarrow \\ E \end{matrix}$ note X l'ensemble des couples (P, h_P) où P est un sous-module de N vérifiant $f(N) \subset P \subset N$ et $h_P : P \rightarrow E$ est une extension de g , c'est à dire $g = h_P \circ f$. On dit que $(P, h_P) \leq (Q, h_Q)$ si $P \subset Q$ et $h_Q/P = h_P$. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre partiel.

- (3) Montrer qu'un A -module E est injectif si et seulement si il satisfait à la condition (1.1) (on pourra utiliser le (2) et appliquer le lemme de Zorn).

Exercice 4 (cône d'un morphisme). Soit $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathbb{C}(\mathbb{C})$ deux complexes et $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ un morphisme de complexes. On définit le cône de f par $M^n(f) = X^{n+1} \oplus Y^n$. Soit $d_f : M^\bullet(f) \rightarrow M^{\bullet+1}(f)$ définie par la matrice $\begin{bmatrix} -d_X & 0 \\ f^\bullet & d_Y \end{bmatrix}$.

- (1) Montrer que $(M(f), d_f)$ est un objet de $\mathbb{C}(\mathbb{C})$, c'est à dire un complexe.
- (2) Montrer que $M(f)$ ne dépend (à isomorphisme près) que de la classe de f dans $K(\mathbb{C})$, la catégorie homotopique de $\mathbb{C}$.
- (3) Construire une suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow Y^\bullet \rightarrow M^\bullet(f) \rightarrow X^\bullet[1] \rightarrow 0.$$

- (4) Identifier les morphismes $H^\bullet(X) \rightarrow H^\bullet(Y)$ dans la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de la question (3). En déduire que f est un quasi-isomorphisme si et seulement si $H^\bullet(M(f)) = 0$.

2 Homotopie : CW complexes, (co)fibrations

Exercice 5 (Une cofibration est une inclusion). 1. Démontrer que si $A \subset X$ est un rétracte de X et que X est Hausdorff, alors A est fermé.

2. Démontrer que si $A \rightarrow X$ est une cofibration, alors A est l'inclusion d'un sous-espace dans X , qui est fermé si X est Hausdorff. (utiliser le cylindre de $A \rightarrow X$ et la première question).

Exercice 6 (Théorème de Whitehead). Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces cellulaires. On veut démontrer que f est une équivalence d'homotopie faible, alors f est une équivalence d'homotopie

1. Soit L un CW-complexe et $K \subset L$ un sous-complexe cellulaire. Soit $\emptyset \neq A \subset B$ une paire d'espaces topologiques. On suppose que, pour tout entier $n \geq 0$, si $L^{(n)} - K^{(n)} \neq \emptyset$, alors, quelque soit $a_0 \in A$, $\pi_n(B, A, a_0) = 0^1$. Démontrer que toute application continue $g : (L, K) \rightarrow (B, A)$ est homotope relativement à K à une application à valeur dans A .
2. On suppose que $f : X \rightarrow Y$ est l'inclusion d'un sous-CW complexe. En déduire qu'alors $f : X \rightarrow Y$ est un rétracte par déformation de Y et conclure.
3. Démontrer que l'application de paire naturelle $(X \cup Y, X) \hookrightarrow (Cyl(f), X)$ est homotope à une application à valeur dans X (utiliser la première question). Ici $Cyl(f) = X \times [0, 1] \cup_f Y$ est le cylindre de f .
4. Démontrer que l'homotopie de la question précédente s'étend en une homotopie définie sur tout le cylindre (et pas seulement $X \cup Y$).
5. En déduire qu'il existe une application $f : Cyl(f) \rightarrow Cyl(f)$ à valeur dans X , qui vaut l'identité sur X , et est homotope à l'identité.
6. Conclure (on pourra utiliser la première question).

¹pour $n = 0$, on définit cette condition comme le fait que l'application naturelle $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(B)$ est une bijection