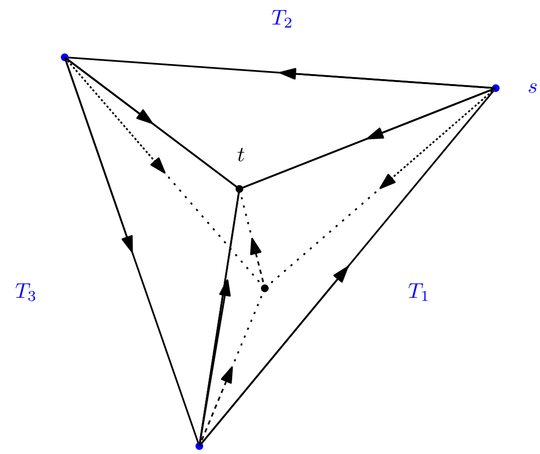

Figure 1:

G. Ginot — MAT 557 - Topologie Algébrique — 3A - Polytechnique

Devoir Noté.

Exercice 1. On considère l'espace topologique L obtenu comme quotient du complexe simplicial K obtenu en recollant 3 tétraèdres pleins T_1, T_2, T_3 deux à deux comme sur la figure 1 et en identifiant la face inférieur de T_1 avec la face supérieure de T_2, la face inférieure de T_2 avec la face supérieure de T_3 et la face inférieure de T_3 avec la face supérieure de T_1 (en suivant les orientations indiquées).

1. Vérifier que le complexe quasi-simplicial L a exactement deux sommets correspondant à s et t sur la figure 1, puis montrer que la caractéristique d'Euler de L est 0.

2. Calculer l'homologie à coefficient dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ de L.

Exercice 2 (Autour du Théorème de Borsuk-Ulam). On note encore S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ (on suppose $n \geq 1$). L'application *antipodale* $a : S^n \to S^n$ est l'application $x \mapsto -x$ (c'est bien sur la symétrie par rapport au centre de la sphère). Cette application induit donc une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur S^n. L'espace quotient $S^n/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est (par définition) l'espace projectif réel de dimension n, noté $\mathbb{R}P^n$. On note $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ la projection canonique.

1. Pour $n = 0$, calculer $a_* : \tilde{H}_0(S^0) \to \tilde{H}_0(S^0)$.

2. On considère les ouverts D^+, D^- de S^n obtenus en retirant respectivement le pole sud et le pole nord de S^n et on considère les suites exactes de Mayer-Vietoris associées à $\mathcal{U}_1 = (D^+, D^-)$ et $\mathcal{U}_2 = (D^-, D^+)$ (dans cet ordre !). On notera i^+, i^- les inclusions respectives de l'équateur S^{n-1} dans D^+ et D^- et $j^\pm$ celles de $D^\pm$ dans S^n. On notera $\delta_1 : \tilde{H}_*(S^n) \to \tilde{H}_{*-1}(S^{n-1})$ le morphisme de connexion associé à la première suite de Mayer-Vietoris. Démontrer que l'on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "i_*^+ - i_*^-"] & \tilde{H}_i(D^+) \oplus \tilde{H}_i(D^-) \arrow[r, "j_*^+ + j_*^-"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & a_* \\ a_* & 0 \end{pmatrix}"] & \tilde{H}_i(S^n) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "a_*"] & \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "i_*^+ - i_*^-"] \arrow[d, "a_*"'] & \tilde{H}_{i-1}(D^+) \oplus \tilde{H}_{i-1}(D^-) \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & a_* \\ a_* & 0 \end{pmatrix}"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "-i_*^+ + i_*^-"] & \tilde{H}_i(D^+) \oplus \tilde{H}_i(D^-) \arrow[r, "j_*^- + j_*^+"'] & \tilde{H}_i(S^n) \arrow[r, "-\delta_1"] & \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "-i_*^+ + i_*^-"] & \tilde{H}_{i-1}(D^+) \oplus \tilde{H}_{i-1}(D^-) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

3. Démontrer que le degré de $a : S^n \to S^n$ est $(-1)^{n+1}$.

4. Montrer que pour tout point x de $\mathbb{R}P^2$, il existe un voisinage ouvert U de S^n tel que $p(U)$ est un voisinage ouvert de x, $U \cap a(U) = \emptyset$ et en déduire un homéomorphisme $p^{-1}(p(U)) \cong p(U) \times \{1, -1\}$ tel que, en notant $proj(x, y) = x$ la projection, le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(p(U)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "p"'] & p(U) \times \times\{1,-1\} \arrow[dl, "proj"] \\ p(U) & \end{tikzcd}.$$

5. Montrer que pour tout chemin $f : [0, 1] \to \mathbb{R}P^n$ et élément $x_0 \in p^{-1}(f(0))$, il existe un unique chemin $\tilde{f} : [0, 1] \to S^n$ tel que $p \circ \tilde{f} = f$ et $\tilde{f}(0) = x_0$ (indic: utiliser la compacité de $[0, 1]$).

6. Montrer que pour toute application continue $g : [0, 1]^k \to \mathbb{R}P^n$ et élément $x_0 \in p^{-1}(g(0, \dots, 0))$, il existe une unique application continue $\tilde{g} : [0, 1]^k \to S^n$ telle que $p \circ \tilde{g} = g$ et $\tilde{g}(0, \dots, 0) = x_0$.

7. En déduire que tout simplexe singulier $\tilde{\sigma} : \Delta^k \to \mathbb{R}P^n$ peut être relevé[1] en exactement 2 simplexes singuliers $\sigma : \Delta^k \to S^n$ et $\tau \cdot \sigma : \Delta^k \to S^n$.

8. On note $t : C_\bullet(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to C_\bullet(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ l'application linéaire $\tilde{\sigma} \mapsto \sigma + \tau \cdot \sigma$. Montrer que t est un morphisme de complexes de chaines et en déduire une suite exacte courte de complexes

$$0 \to C_\bullet(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{t} C_\bullet(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p_*} C_\bullet(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0.$$

9. En déduire une suite exacte longue en homologie

$$\cdots \leftarrow H_{n-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xleftarrow{\delta} H_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xleftarrow{p_*} H_n(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xleftarrow{t} H_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xleftarrow{\delta} H_{n+1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \leftarrow \dots$$

10. Montrer que $t \circ p_* : H_n(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_n(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est l'application nulle. En déduire que dans la suite exacte de la question **(3)**, les flèches sont alternativement un isomorphisme et 0.

11. Montrer que si $f : S^n \to S^m$ vérifie $f \circ a = a \circ f$, alors $n \leq m$

12. **(Borsuk-Ulam** :) En déduire que pour tout $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

Exercice 3 (**Foncteurs Dérivés).** Soit R un anneau commutatif $x \in R$ non diviseur de zéro

1. Soit $R/(x)$ le module quotient de R par xR. Trouver une résolution projective de $R/(x)$.
2. En déduire $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.
3. Soient M, L, K des R-modules. Montrer que $N \mapsto F(N) := \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, L), K)$ induit un foncteur F de la catégorie R-**Mod** vers elle-même.
4. Donner des conditions sur L, M pour que F soit exact à gauche puis sur K, M pour que F soit exact à droite. Peut on en déduire des conditions sur K, L, M pour que F soit exact ?
5. On suppose désormais que $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$ et $K = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
   (a) Vérifier que F est exact à droite puis donner une expression de son foncteur dérivé $\mathbb{L}F_*(R/(x))$.
   (b) En déduire $H^i(\mathbb{L}(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ pour $L = \mathbb{Z}$ puis $L = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[1] on appelle relèvement de $f : x \to \mathbb{R}P^n$ une application continue $\tilde{f} : X \to S^n$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$