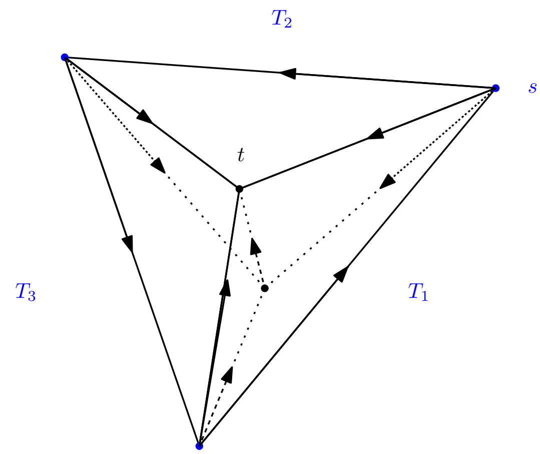

Figure 1:

G. Ginot — MAT 557 - Topologie Algébrique — 3A - Polytechnique

Devoir Noté.

Exercice 1. On considère l'espace topologique L obtenu comme quotient du complexe simplicial K obtenu en recollant 3 tétraèdres pleins T_1, T_2, T_3 deux à deux comme sur la figure 1 et en identifiant la face inférieur de T_1 avec la face supérieure de T_2, la face inférieure de T_2 avec la face supérieure de T_3 et la face inférieure de T_3 avec la face supérieure de T_1 (en suivant les orientations indiquées).

1. Vérifier que le complexe quasi-simplicial L a exactement deux sommets correspondant à s et t sur la figure 1, puis montrer que la caractéristique d'Euler de L est 0.

2. Calculer l'homologie à coefficient dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ de L. Que remarquez-vous ?

Exercice 2 (Application antipodale). On note encore S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$. L'application *antipodale* $a : S^n \to S^n$ est l'application $x \mapsto -x$ (c'est bien sur la symétrie par rapport au centre de la sphère).

1. Pour $n = 0$, calculer $a_* : \tilde{H}_0(S^0) \to \tilde{H}_0(S^0)$.

2. On considère les ouverts D^+, D^- de S^n obtenus en retirant respectivement le pole sud et le pole nord de S^n et on considère les suites exactes de Mayer-Vietoris associées à $\mathcal{U}_1 = (D^+, D^-)$ et $\mathcal{U}_2 = (D^-, D^+)$ (dans cet ordre !). On notera i^+, i^- les inclusions respectives de l'équateur S^{n-1} dans D^+ et D^- et $j^\pm$ celles de $D^\pm$ dans S^n. On notera $\delta_1 : \tilde{H}_*(S^n) \to \tilde{H}_{*-1}(S^{n-1})$ le morphisme de connexion associé à la première suite de Mayer-Vietoris. Démontrer que l'on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "i^+_* - i^-_*"] & \tilde{H}_i(D^+) \oplus \tilde{H}_i(D^-) \arrow[r, "j^+_* + j^-_*"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & a_* \\ a_* & 0 \end{pmatrix}"] & \tilde{H}_i(S^n) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "a_*"] & \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "i^+_* - i^-_*"] \arrow[d, "-a_*"'] & \tilde{H}_{i-1}(D^+) \oplus \tilde{H}_{i-1}(D^-) \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & a_* \\ a_* & 0 \end{pmatrix}"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "i^+_* - i^-_*"] & \tilde{H}_i(D^+) \oplus \tilde{H}_i(D^-) \arrow[r, "j^-_* + j^+_*"'] & \tilde{H}_i(S^n) \arrow[r, "\delta_1"] & \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "i^+_* - i^-_*"] & \tilde{H}_{i-1}(D^+) \oplus \tilde{H}_{i-1}(D^-) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

3. Démontrer que le degré de $a : S^n \to S^n$ est $(-1)^{n+1}$.

Exercice 3 (Action libre de groupes sur des sphères). Soit G un groupe agissant librement sur une sphère S^n, c'est à dire que pour tout $g \neq e$ et $x \in S^n$, $g \cdot x \neq x$.

1. Démontrer que si $g \neq e$, alors l'application $\rho_g : x \mapsto g \cdot x$ est homotope à l'application antipodale $a : S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$ et en déduire que $\deg(\rho_g) = (-1)^{n+1}$.

2. On suppose que n est pair. Montrer que G est trivial ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 4 (Homologie de $\mathbb{R}P^n$ et Borsuk-Ulam). L'application *antipodale* $a : S^n \to S^n$ induit une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur S^n. L'espace quotient $S^n/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est (par définition) l'espace projectif réel de dimension n, noté $\mathbb{R}P^n$. On note $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ la projection canonique.

1. Démontrer que, pour tout $m \geq 0$, $\mathbb{R}P^{m+1}$ est un recollement

$$\mathbb{R}P^{m+1} \cong D^{m+1} \bigcup_{S^m \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^m} \mathbb{R}P^m$$

et que $\mathbb{R}P^m$ est compact. Y-a-t'il un complexe quasi-simplicial dont la réalisation est $\mathbb{R}P^n$?

2. Calculer l'homologie de $\mathbb{R}P^n$ à coefficient dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ (utiliser Mayer-Vietoris par exemple).

3. On admet[1] que tout simplexe singulier $\tilde{\sigma} : \Delta^k \to \mathbb{R}P^n$ peut être relevé[2] en exactement 2 simplexes singuliers $\sigma : \Delta^k \to S^n$ et $\tau \cdot \sigma : \Delta^k \to S^n$. On note $t : C_\bullet(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to C_\bullet(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ l'application linéaire $\tilde{\sigma} \mapsto \sigma + \tau \cdot \sigma$.

   (a) Montrer que t est un morphisme de complexes de chaines injectif en tout degré.

   (b) En déduire une suite exacte longue en homologie

$$\cdots \leftarrow H_{n-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \stackrel{\delta}{\leftarrow} H_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \stackrel{p_*}{\leftarrow} H_n(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \stackrel{t}{\leftarrow} H_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \stackrel{\delta}{\leftarrow} H_{n+1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \leftarrow \dots$$

   (c) Montrer que $t \circ p_* : H_n(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_n(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est nulle. En déduire que dans la suite exacte précédente, les flèches sont alternativement un isomorphisme et 0.

   (d) Montrer que si $f : S^n \to S^m$ vérifie $f \circ a = a \circ f$, alors $n \leq m$.

   (e) **(Théorème de Borsuk-Ulam** :) En déduire que pour tout $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

   (f) Soient $A_1, \dots A_m$ des sous-ensembles mesurables (au sens de Lebesgue) de $\mathbb{R}^m$. Montrer qu'il existe un hyperplan affine de $\mathbb{R}^m$ qui divise chaque A_i en deux parties égales (identifier S^m avec la sphère unité euclidienne de $\mathbb{R}^{m+1}$ et, pour tout $x \in S^m$, considérer les hyperplans affines $H_x := (\mathbb{R}x)^\perp$ et leurs intersections avec chaque A_i).

Exercice 5. (Foncteurs Dérivés)

1. Calculer $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

2. Déterminer des conditions sur des R-modules L, K pour que l'endofoncteur $N \mapsto F(N) := \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, L), K)$ soit respectivement, exact à gauche, exact à droite, exact.

3. On suppose désormais que $R = \mathbb{Z}$ et $K = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Calculer $H^i(\mathbb{L}(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ pour $L = \mathbb{Z}$ puis $L = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

4. Soit $\mathbb{F}$ un corps et $R = \mathbb{F}[x, y]$. On munit $\mathbb{F}$ de sa structure de R-module induite par l'application quotient $\mathbb{F}[x, y] \twoheadrightarrow \mathbb{F}$.

   (a) Démontrer qu'il existe une résolution projective de F de la forme

$$\dots 0 \to R \stackrel{\varphi}{\to} R \oplus R \stackrel{\psi}{\to} R$$

   où on déterminera φ et ψ (indication: utiliser les multiplications par x et y).

   (b) Calculer les groupes $\mathrm{Tor}_i^R(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

[1] cela découle de la théorie des revêtements, ou bien voir le DM de 2018

[2] on appelle relèvement de $f : x \to \mathbb{R}P^n$ une application continue $\tilde{f} : X \to S^n$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$