

HOMOTOPIE ET CONSTRUCTIONS D'ESPACES TOPOLOGIQUES

Exercice 1. (Quelques exemples, en vrac, d'espaces topologiques définis par leurs ouverts)

- (Topologie formée par les boules de même centre) Montrer que la famille des $B(0, r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r\}$ (pour $r \in [0, +\infty]$) forme une topologie sur \mathbb{R}^2 ? Est-elle séparée ? Se compare-t-elle à la topologie usuelle sur \mathbb{R}^2 ?
- (Droite réelle avec un point "double") On considère $E = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{0_A, 0_B\}$ où 0_A et 0_B sont deux points distincts n'appartenant pas à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Soit \mathcal{B} l'ensemble des parties de E de la forme :
 - soit $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $0 < \epsilon < |x|$,
 - soit $\{0_A\} \cup (] - \epsilon, \epsilon[\setminus \{0\})$ pour $\epsilon > 0$,
 - soit $\{0_B\} \cup (] - \epsilon, \epsilon[\setminus \{0\})$ pour $\epsilon > 0$.

Montrer que \mathcal{B} forme la base d'une topologie. Montrer que cette topologie n'est pas métrisable (on pourra supposer qu'elle l'est et regarder la distance entre 0_A et 0_B). Identifier la topologie induite sur $E - \{0_A, 0_B\}$.

- (Topologie de Zariski) Soit $X = k^n$ où k est un corps.
 - On regarde le cas $k = \mathbb{R}$, $n = 1$. Démontrer que les complémentaires des $\{X \in \mathbb{R}, P \in k[x] \text{ tel que } P(X) = 0\}$ (où P est un polynome quelconque) définissent les ouverts d'une topologie appelée topologie de Zariski sur \mathbb{R} . Cette topologie est-elle séparée ?
 - Dans le cas général, soit I un idéal de $k[x_1, \dots, x_n]$. On note $V(I) := \{X \in \mathbb{R}, \forall P \in I \text{ on a } P(X) = 0\}$. Montrer que les $V(I)$ forment définissent les ouverts d'une topologie appelée topologie de Zariski et vérifier qu'on retrouve la question précédente.

Solution 1. On rappelle qu'une topologie est plus fine qu'une autre si tout ouvert de la deuxième est un ouvert de la première.

- On vérifie que $\bigcup_{i \in I} B(0, r_i) = B(0, \text{Sup}(r_i))$ et $\bigcap_{j \in J} B(0, r_j) = B(0, \text{min}(r_j))$. De plus $\mathbb{R}^2 = B(0, \infty)$ et $\emptyset = B(0, 0)$. Donc la famille des $B(0, r)$ forme une topologie sur \mathbb{R}^2 . Elle n'est pas séparée car par exemple, tout ouvert non vide contient le point 0. Elle est clairement moins fine que la topologie usuelle¹ sur \mathbb{R}^2 puisque toute boule ouverte est ouverte pour la topologie usuelle.
- Il est conseillé de faire un dessin. Pour montrer que \mathcal{B} forme la base d'une topologie, il suffit de montrer que pour tous les ouverts $U, V \in \mathcal{B}$ et tout $x \in U \cap V$, il existe un ouvert W dans \mathcal{B} qui contient x et contenu dans $U \cap V$. Autrement dit, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $x \in W \subset U \cap V$. C'est très facile à vérifier dans le cas présent. On peut remarquer que cette topologie n'est pas séparée car tout voisinage de 0_A rencontre tout voisinage de 0_B . En particulier, cette topologie ne peut pas être métrique (si la topologie était métrique, la distance entre 0_A et 0_B devrait être nulle, ce qui serait absurde, puisque $0_A \neq 0_B$). Il est clair que la topologie engendrée sur $\mathbb{R} - \{0\}$ coïncide avec la topologie usuelle (donc métrisable) sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

Remarque. Cet exemple, qui peut sembler artificiel, ne l'est pas. En effet, des espaces topologiques du type de celui présenté dans l'exercice (très grossièrement, "des espaces qui ressemblent localement à la droite réelle, mais avec des points non séparés") apparaissent naturellement comme

¹c'est à dire celle donnée par toute norme sur \mathbb{R}^2

espace des feuilles d'un feuilletage. Très grossièrement, si on considère (par exemple) une famille de courbes qui rempli une surface, alors le quotient de la surface par la relation d'équivalence "être sur la même courbe" sera un espace "du type de celui de l'exercice" ; en particulier, il possèdera en général des points non-séparés.

3. *Remarque.* Les topologies de Zariski de \mathbb{R} sont une des topologie importante que l'on retrouve souvent en géométrie algébrique.

(a) Par définition des polynomes sur \mathbb{R} , les fermés de cette topologie sont soit \mathbb{R} entier (pour le polynôme nul) ou les ensembles finis (possiblement vide pour le polynôme 1). Il est facile de voir que ces ensembles sont stables par intersection quelconque et réunion finie. Cela forme donc bien les fermés d'une topologie. Elle n'est pas séparée car si x et y sont dans \mathbb{R} , tout voisinage de x rencontre tout voisinage de y . En revanche le complémentaire de x est un ouvert qui ne contient pas y et de même réciproquement. Cet espace est donc T_1 (au sens des axiomes de séparation de la feuille de TD sur la topologie générale).

(b) Remarquons d'abord que les idéaux de $\mathbb{R}[x]$ sont principaux, c'est à dire de la forme $(P) := \{P(x)Q(x) \text{ où } Q \in \mathbb{R}[x]\}$. Il suit immédiatement que la première question est donc un cas particulier. Il est clair que $V(0) = X$ et $V(1) = \emptyset$. On doit encore montrer que les $V(I)$ (où I parcourt les idéaux) sont stables par intersection quelconques et réunion finie. On a que $V(I_1) \cup \dots \cup V(I_k) = V(I_1 \cap \dots \cap I_k)$ où on rappelle du cours d'algèbre que l'intersection de deux idéaux est bien un idéal. Par ailleurs une somme quelconque d'idéaux est un idéal. Donc $\bigcap_{I \in \mathcal{J}} V(I) = V(\sum_{\mathcal{J}} I)$ implique que les $V(I)$ forment bien les fermés d'une topologie.

Exercice 2. (Espaces séparés) Un espace topologique X est séparé si pour tout $x \neq y \in X$, il existe deux ouverts $U_x, U_y \subset X$ *disjoints* contenant respectivement x et y .

1. Démontrer que si X est séparé alors les singletons $\{x\}$ sont des fermés
2. Démontrer que Y est séparé si et seulement si sa diagonale $\Delta : \{(y, y), y \in Y\}$ est fermée dans $Y \times Y$. Montrer que si $f : X \rightarrow Y$ est continue, son graphe est fermé dans $X \times Y$. Que pensez vous de la réciproque ? Que se passe-t-il si Y n'est pas séparé ?
3. Soit (P, \preceq) un ensemble (partiellement) ordonné. Pour $x \in P$, on introduit la partie :

$$D_x = \{y \in X / x \preceq y\}.$$

Montrer que les ensembles D_x forment la base d'une topologie, appelée topologie droite, sur P . Montrer qu'une intersection d'ouverts est ouverte. Déterminer l'adhérence du singleton $\{x\}$.

4. Montrer qu'un ensemble ordonné muni de la topologie droite vérifie que pour tout $x \neq y \in P$, il existe un ouvert contenant l'un des points mais pas l'autre. Est-il séparé en général ?

Solution 2. 1. Pour tout $y \neq x$, il existe un ouvert U_y contenant y mais pas x car X est séparé. Alors la réunion $\bigcup_{y \neq x} U_y$ est un ouvert de X qui contient tous les points sauf x . Son complémentaire est donc fermé et il s'agit du singleton $\{x\}$. (on peut remarquer que l'on a pas utilisé toute la force de l'hypothèse séparée pour démontrer ce résultat).

2. Si f est continue, l'application

$$g : X \times Y \rightarrow Y \times Y, \quad (x, y) \rightarrow (f(x), y)$$

l'est aussi. A présent, remarquons que le graphe de f est l'image réciproque par g de la diagonale $\Delta_Y = \{(y, y), y \in Y\} \subset Y \times Y$. Or un espace topologique Y est séparé si et seulement si sa diagonale est fermée (la preuve est similaire au **a**): si $x \neq y$, il existe des ouverts $x \in U_x, y \in V_y$ tels que $U_x \cap V_y = \emptyset$. Alors $U_x \times V_y$ est un ouvert de $Y \times Y$ qui contient (x, y) et est inclus dans le complémentaire de la diagonale; la réciproque découle du fait que les produits $U \times V$ d'ouverts

forment une base d'ouverts pour la topologie produit sur $Y \times Y$). Par conséquent le graphe de f est fermé.

La réciproque est fautive. Soit la fonction $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ qui à x associe $1/x$ si $x \neq 0$ et 0 sinon. Cette fonction n'est pas continue à l'origine. Pourtant, son graphe est la réunion d'une branche d'hyperbole et de $\{(0, 0)\}$, tout deux fermés.

Supposons maintenant que Y ne soit pas séparé. Alors la diagonale Δ_Y n'est pas fermée et cette diagonale est le graphe de la fonction identité $id : Y \rightarrow Y$.

3. Établissons que les D_x forment une base d'ouverts. On considère D_x et D_y tels que $D_x \cap D_y \neq \emptyset$. Soit $z \in D_x \cap D_y$, il est clair que $D_z \subset D_x \cap D_y$.

On considère une intersection d'ouverts $\bigcap_{i \in I} U_i$, que nous supposons non vide. Si z appartient à cette intersection, il est inclus dans l'intersection $\bigcap_{i \in I} D_{x_i}$ avec $D_{x_i} \subset U_i$. Alors $D_z \subset \bigcap_{i \in I} D_{x_i} \subset \bigcap_{i \in I} U_i$ et donc $\bigcap_{i \in I} U_i$ est voisinage de chacun de ses points.

Enfin, tout voisinage de y contient D_y , puisque D_y est inclus dans tout D_z contenant y . Donc l'adhérence de $\{x\}$, qui est l'ensemble des y dont tout voisinage contient x , est l'ensemble des y tels que $x \in D_y$, c'est à dire

$$\{y \in X \mid y \preceq x\}.$$

4. On considère maintenant x et y *distincts*. Soit ils sont comparables, mettons $x \preceq y$, alors $y \in D_y$ et $x \notin D_y$, soit ils ne le sont pas et $y \in D_y$ et $x \notin D_y$. Il n'est pas très dur de voir que ces espaces ne sont pas séparés non-plus en général. Si $x \preceq y$, alors tout ouvert contenant x contient D_x et donc y aussi.

Remarque: la même preuve montre que ces espaces ne sont pas T_1 non-plus en général. Si $x \preceq y$, alors tout ouvert contenant x contient D_x et donc y aussi.

Exercice 3 (Topologie quotient). Soit X un espace topologique et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X . On note $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ l'application qui à $x \in X$ associe sa classe d'équivalence $[x] \in X/\mathcal{R}$.

1. Démontrer la *propriété universelle* de la topologie quotient.
2. Montrer que si X est connexe alors X/\mathcal{R} est connexe. Même question avec connexe par arcs.
3. Montrer que si X/\mathcal{R} est séparé alors le graphe $\mathcal{R} = \{(x, y), x\mathcal{R}y\} \subset X \times X$ est fermé. Montrer que la réciproque est vraie si on suppose en plus que $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ est ouverte.
4. Si X est compact, alors X/\mathcal{R} est séparé si et seulement si le graphe de \mathcal{R} est fermé dans X .
5. Donner un exemple d'espace séparé X et de relation \mathcal{R} tels que X/\mathcal{R} soit muni de la topologie grossière. Donner un exemple d'espace non-séparé tel que X/\mathcal{R} soit séparé.

Solution 3. 1. On munit, évidemment, X/\mathcal{R} de sa topologie quotient (cf le cours de L3) définie par: $U \subset X/\mathcal{R}$ est ouvert si et seulement si $p^{-1}(U)$ est ouvert. Les propriétés de commutation de la pré-image avec les unions et intersection assurent que cela définit bien une topologie sur X/\mathcal{R} . Cette topologie rend p continue par définition² et est constante sur chaque classe d'équivalence. Enfin notons que p est surjective.

On montre facilement que muni le couple $(X/\mathcal{R}, p : X \rightarrow X/\mathcal{R})$ vérifie la propriété demandée pour (\tilde{X}, π) . En effet soit Y est un autre espace topologique, et $f : X \rightarrow Y$ une application continue constante sur chaque classe. Une factorisation de f , si elle existe, vérifie nécessairement que, pour toute classe $[x] \in X/\mathcal{R}$, $\tilde{f}([x]) = \tilde{f}(p(x)) = f(x)$ ce qui assure l'unicité (par surjectivité de $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$) de \tilde{f} , *mais pas* encore son existence. En effet, \tilde{f} doit être défini par la formule ci-dessus, mais il reste à voir que cette formule donne bien une application continue. C'est neufait

²c'est même la topologie la plus fine vérifiant cette propriété

très facile: Si $V \subset Y$ est ouvert alors, $\tilde{f}^{-1}(V)$ est ouvert dans X/\mathcal{R} si et seulement si, par définition, $p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$ est ouvert, ce qui est assuré par la continuité de f !

Passons à l'unicité. Soit (\tilde{X}, π) une autre paire vérifiant les conditions demandées. Comme $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$ est continue, constante sur chaque classe, il existe une unique application continue $\tilde{\pi} : X/\mathcal{R} \rightarrow \tilde{X}$ factorisant π : $\pi = \tilde{\pi} \circ p$. De même, il existe une unique application continue $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X/\mathcal{R}$ factorisant p : $p = \tilde{p} \circ \tilde{\pi}$. On en déduit que $\tilde{p} \circ \tilde{\pi} : X/\mathcal{R} \rightarrow X/\mathcal{R}$ est une application continue (nécessairement unique par hypothèse) factorisant $id_{X/\mathcal{R}}$, c'est donc l'identité. De même $\tilde{\pi} \circ \tilde{p}$ est l'identité de \tilde{X} et donc \tilde{X} est homéomorphe à X/\mathcal{R} .

Une application $g : \tilde{X} \rightarrow Z$ est continue si et seulement si $g \circ p$ est continue par unicité de la factorisation (et surjectivité de p). De plus si V est un ouvert de \tilde{X} , $\tilde{f}(V) = \tilde{f}(p(p^{-1}(V))) = f(p^{-1}(V))$ qui est ouvert si f est ouverte.

2. Comme p (et donc π) est surjective et continue, le résultat est immédiat.
3. Soit $[x] \neq [y]$. Alors $(x, y) \in X^2 - \mathcal{R}$ qui est ouvert et, il existe deux ouverts U_x, V_y voisinages disjoints de x, y inclus dans $X^2 - \mathcal{R}$ (car la topologie produit est engendrée par les produits d'ouverts). On en déduit que $p(U_x), p(V_y)$ sont ouverts disjoints et contiennent respectivement $[x]$ et $[y]$.³
4. On suppose maintenant que X est compact⁴. L'image par une application continue d'un espace compact dans un espace *séparé* est compact, donc il suffit de montrer que X/\mathcal{R} est séparé pour conclure.

Comme la relation (ou plus précisément son graphe $\mathcal{R} \subset X^2$ est fermé (dans X^2), la relation \mathcal{R} est *fermée*, c'est à dire que si F est fermé dans X , son saturé $p^{-1}(p(F))$ est fermé. En effet, le saturé de F est égal à l'image de $(F \times X) \cap \mathcal{R}$ par la projection de $p_X : F \times X$ sur X . Or $F \times X$ et \mathcal{R} sont fermés dans le compact $X \times X$, donc compact ainsi que leur intersection. De même, X compact implique que $p_X(F \times X) \cap \mathcal{R}$ est compact et donc fermé. On a bien montré que le saturé de tout fermé est fermé (notons que ceci est équivalent à dire que la projection $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ est fermée).

Montrons enfin que X/\mathcal{R} est séparé. Soit $p(x) = [x] \neq [y] = p(y)$ deux points distincts de X/\mathcal{R} . Alors $p^{-1}([x])$ et $p^{-1}([y])$ sont les saturés de $\{x\}$ et $\{y\}$ et sont donc fermés vu ci-dessus⁵. Ils sont de plus disjoints par hypothèse. On va utiliser qu'un espace compact est normal⁶, c'est à dire que pour tout fermés disjoints F_1, F_2 , il existe des ouverts disjoints U_1, U_2 qui contiennent respectivement F_1 et F_2 (autrement dit, on peut séparer les fermés par des ouverts).

On peut donc trouver des ouverts disjoints U_x, U_y contenant respectivement $p^{-1}([x])$ et $p^{-1}(y)$. La seule difficulté maintenant (pour passer au quotient) est que U_x et U_y ne sont pas nécessairement des ouverts saturés. Mais $X - U_x$ est un fermé disjoint de $p^{-1}([x])$, c'est donc aussi le cas de son saturé F_x et il suit que $X - F_x$ est un ouvert saturé contenant $p^{-1}([x])$ et inclus dans U_x . De même, on construit un ouvert saturé $X - F_y$ contenant $p^{-1}([y])$ et inclus dans U_y , en particulier disjoint de $X - F_x$. Il suit que $p(X - F_x)$ et $p(X - F_y)$ sont des ouverts disjoints qui sépare $p(x)$ et $p(y)$ dans X/\mathcal{R} . Il vaut mieux faire des dessins pour comprendre le paragraphe précédent !

On considère le quotient de \mathbb{R} par le sous-groupe \mathbb{Q} (c'est à dire $x\mathcal{R}y$ ssi $x - y \in \mathbb{Q}$). Alors l'espace quotient \mathbb{R}/\mathbb{Q} est un espace (non-dénombrable) muni de la topologie grossière . En effet,

³Attention, le fait que le graphe de $\mathcal{R} \subset X^2$ soit fermé ne suffit *pas* en général pour que le quotient soit séparé (mais est nécessaire). Par exemple, considérons un espace X séparé mais pas normal. Alors, il existe des fermés A et B qui ne peuvent être séparés par aucun ouvert. La relation $a\mathcal{R}a'$ pour tout $a; a' \in A$, $x\mathcal{R}x$ pour tout $x \in X$ et $b\mathcal{R}b'$ pour tout $b, b' \in B$ est clairement fermée mais le quotient n'est pas séparé. . .

⁴rappelons que cela veut dire qu'il vérifie que pour tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini et qu'il est *séparé*, point qu'on oublie trop souvent, mais qu'on peut oublier si on travaille dans des espaces métriques par exemple

⁵Rappelons que dans un espace séparé, les points sont fermés

⁶c'est un bon exercice, cf la partie sur la compacité dans le cours de L3

tout ouvert de \mathbb{R} contient un (et en fait une infinité) de points de la forme $x + \mathbb{Q}$ par densité de $x + \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} , et donc un représentant de chaque classe. Soit $(X_i)_{i \in I}$ des espaces non-séparés. Alors $\coprod X_i$ n'est pas séparé, mais le quotient X/\mathcal{R} de X par la relation $x\mathcal{R}y$ ssi $x, y \in X_i$ (pour un certain i) est l'ensemble I muni de la topologie discrète, donc séparé.

5. On quotiente donc \mathbb{R}^2 par le groupe (isomorphe à \mathbb{Z}) engendré par l'homothétie de centre 0 et de rapport 2. En particulier, les orbites de tout élément sont contenus dans la demi-droite vectorielle passant par ce point.

Soit U un voisinage ouvert de la classe $[0]$; alors $p^{-1}(U)$ est un voisinage de 0 et contient donc une boule ouverte $B(0, \varepsilon)$. Mais pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x \sim x/2^n$ et $x/2^n$ est dans $B(0, \varepsilon)$ pour n assez grand. Par conséquent, $B(0, \varepsilon)$ contient un représentant de chaque classe, donc $U = \mathbb{R}^2 / \sim$, et 0 ne peut être séparé d'aucun point !

Montrons que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \sim$ est séparé. Remarquons que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong S^1 \times \mathbb{R}_+^*$. Si $[z] \neq [z'] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \sim$ avec z, z' non-colinéaires, on peut trouver deux (demi-)cônes ouverts contenant les (demi-)droites vectorielles qui les contiennent et ne se rencontrent pas. Comme des (demi-)cônes sont saturés, leur image par p fournit des ouverts séparant $[z]$ et $[z']$ (faire un dessin).

Supposons z et z' alignés. A une rotation près, on peut les supposer dans $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. Or tout élément t de \mathbb{R}_+^* a une unique représentant dans $[1, 2[$. On peut donc identifier \mathbb{R}_+^* / \sim au quotient $[1, 2[/ (1 \sim 2)$ (le vérifier soigneusement) qui est séparé car homéomorphe à $[0, 1[/ (0 \sim 1) \cong S^1$.

Il suit que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est séparé. Au vu des arguments donnés ci-dessus, on a en fait montré que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est homéomorphe au tore $S^1 \times S^1$.

Exercice 4. (cônes, recollements ...) Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue.

1. Le **cône sur** X est l'espace topologique quotient $C(X) := (X \times [0, 1]) / ((x, 1) \sim (y, 1))$. Montrer que X s'identifie⁷ à un sous-espace fermé de $C(X)$ et que $X \mapsto C(X)$ est un foncteur dans la catégorie des espaces topologiques. Montrer que $C(X)$ est *contractile*.
2. Soit X, Y deux espaces topologiques, A une partie non-vide de X et $f : A \rightarrow Y$, une application continue. Le **recollement de X sur Y par f** est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y := (X \coprod Y) / (x \sim f(x), x \in A).$$

- (a) Donner un critère pour construire des applications continues $X \cup_f Y \rightarrow Z$ en fonctions d'applications continues $X \rightarrow Z$ et $Y \rightarrow Z$.
- (b) Montrer que si A est fermé, alors Y s'identifie à un sous-espace de $X \cup_f Y$. Si de plus X, Y sont compacts, montrer que $X \cup_f Y$ est compact.

Solution 4. 1. On note $\pi : X \times [0, 1] \rightarrow C(X)$ l'application de passage au quotient.

L'application $x \mapsto i_0(x) = (x, 0) \in X \times [0, 1]$ est évidemment continue d'où il suit que la composée $i_X : X \xrightarrow{i_0} X \times [0, 1] \xrightarrow{\pi} C(X)$ est continue. Elle est clairement injective et de plus son image $i_X(X)$ est fermée dans $C(X)$ puisque sa pré-image par π est le fermé $X \times \{0\}$. Il reste à montrer que i_X induit bien un homéomorphisme de X sur $[X \times \{0\}] \subset C(X)$. Mais si U est un ouvert de X , $U \times [0, 1/2[$ est un ouvert de $C(X)$ et $i_X(U) = i_X(X) \cap (U \times [0, 1/2[)$ est ouvert.

L'application composée $(x, t) \mapsto \pi_Y \circ (f(x), t)$ (où $\pi_Y : Y \times [0, 1] \rightarrow C(Y)$ est la projection canonique) induit une application continue $X \times [0, 1] \rightarrow C(Y)$ qui est constante sur chaque classe d'équivalence (pour la relation d'équivalence définissant $C(X)$). Il suit de la propriété universelle du quotient qu'elle se factorise en une unique application $C(f) : C(X) \rightarrow C(Y)$. Un calcul immédiat (ou l'utilisation de l'unicité dans la propriété universelle) assure que $C(f \circ g) = C(f) \circ C(g)$ et $C(id_X) = id_{C(X)}$.

⁷c'est à dire qu'il existe un homéomorphisme entre X et un sous-espace de $C(X)$.

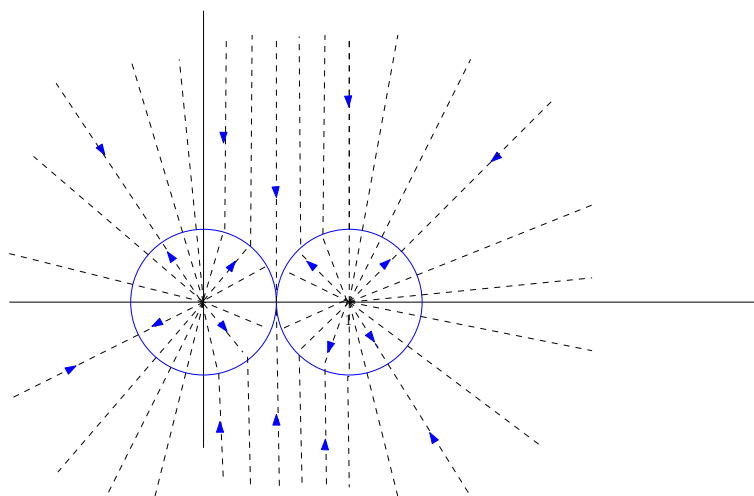


Figure 1: La rétraction de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ sur la figure 8.

2. (a) C'est essentiellement la même démonstration que pour \mathbb{R}^n . On contracte uniformément $X \times I$ sur $X \times \{1\}$ dont l'image dans le quotient est un point (on se convaincra en regardant un dessin). Plus précisément on vérifie que l'application $\pi \circ H : X \times I \rightarrow C(X)$, où $H((x, t), u) = (x, 1 - u(1 - t))$, est continue, constante sur les classes et que l'application induite $\pi \circ H$ est une homotopie entre l'identité de $C(X)$ et l'application constante $[(x, t)] \mapsto [(x, 1)]$.
- (b) Notons que $\pi^{-1}([(x, 1)]) = X \times \{1\}$ est fermé, donc le point $\{[(x, 1)]\}$ est toujours fermé dans $C(X)$. Il est clair que l'ouvert $C(X) \setminus \{[(x, 1)]\}$ est homéomorphe à $X \times [0, 1[$ qui est séparé si X l'est. Il reste à voir qu'on peut séparer le point $[(x, 1)]$ de tout point de la forme $[(x, t)]$ si $t < 1$ ce qui équivaut en considérant les ouverts (saturés) $X \times [0, 1 + t/2[$ et $X \times]1 + t/2, 1]$.

Un peu d'homotopie

Exercice 5. (Configurations de points dans \mathbb{C})

1. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ se rétracte par déformation sur l'ensemble X formé de la réunion des cercles de centre 0 et 1 et de rayon $1/2$ (ne pas oublier de faire un dessin !).
2. Montrer que $C_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 \neq z_2\}$ se rétracte par déformation sur S^1 identifié à l'ensemble des couples $(0, u)$ pour $u \in S^1$.
3. Montrer que $C_3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, \text{distincts}\}$ se rétracte par déformation sur $S^1 \times X$ identifié à l'ensemble des triplets $(0, u, uv)$ pour $u \in S^1$ et $v \in X$.

Solution 5. 1. L'ensemble X , réunion des des cercles de centre 0 et 1 et de rayon $1/2$ est souvent appelé "figure 8". La rétraction est décrite sur le dessin ci-contre. Plus précisément, dans l'intérieur de chaque disque épointé, r_1 est la projection radiale sur le cercle (c'est à dire $r_1(z) = z/2|z|$ dans le premier disque et $r_1(z) = (z - 1)/2|z - 1| + 1$ pour le deuxième). Sur le demi plan $Re(z) < 0$, on prend encore la projection radiale sur le cercle de centre 0 (c'est bien compatible avec la règle précédente à l'intérieur du disque !) et de même sur le demi-plan $Re(z) > 1$ en projetant radialement sur le cercle de centre 1. Sur la partie $B := \{z \in \mathbb{C}, 0 \leq Re(z) \leq 1, |z| > 1/2 \text{ et } |z - 1| > 1/2\}$ (c'est à dire sur la partie où on a pas encore défini la rétraction), on définit r_1 comme la projection verticale sur la figure 8, c'est à dire que $r_1(z)$ est envoyé sur le point de X de même abscisse que z (et dont l'ordonnée a le même signe). Comme les projections radiales et verticales sont continues, la seule à montrer est la continuité de r_1 sur les axes $Re(z) = 0, 1/2$. Mais sur ces axes, la projection radiale coincide

avec la projection verticale. Par conséquent, $r_1 : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow X$ est bien définie et continue. De plus $r_1 \circ i = id$ où $i : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ est l'inclusion.

Il reste à montrer que $i \circ r$ est homotope à l'identité. Pour cela on définit $H_1 : [0, 1] \times \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ par la formule $H_1(t, z) = tr_1(z) + (1 - t)z$. Il est clair que $H_1(t, z)$ est continue et à valeur dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ car pour tout z , le segment $[z, r_1(z)]$ est inclus dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ par construction. Comme $H_1(0, z) = z$ et $H_1(1, z) = r_1(z)$ on a obtenu l'homotopie souhaitée !

2. On identifie encore S^1 avec le sous-espace de \mathbb{C} des éléments de norme 1. On définit $r_2 : C_2 \rightarrow S^1$ par la formule $r_2(z_1, z_2) = \frac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|}$ qui est bien définie puisque $z_2 \neq z_1$ et continue. Soit $i : S^1 \rightarrow C_2$ l'injection $i(u) = (0, u)$. Alors $r_2 \circ i = id$ et il reste à montrer que $i \circ r_2$ est homotope à l'identité

de C_2 . Soit $H_2(t, (z_1, z_2)) = \frac{1}{1 - t + t|z_2 - z_1|} ((1 - t)z_1, z_2 - tz_1)$. Il est clair que H_2 est bien définie, continue et à valeur dans C_2 si $z_2 \neq z_1$. Comme $H_2(1, -) = i \circ r_2$ et $H_2(0, -) = id_{C_2}$; on a montré que S^1 est un rétracte par déformation de C_2 .

3. On va combiner les deux constructions précédentes. Si $(z_1, z_2, z_3) \in C_3$, alors $z_2 - z_1 \neq 0$, $z_3 - z_1 \neq 0$ et $z_3 - z_1 / (z_2 - z_1) \neq 1$. On en conclut que

$$r_3(z_1, z_2, z_3) = \left(\frac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|}, r_1 \left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right) \right) = \left(r_2(z_1, z_2), r_1 \left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right) \right)$$

est dans $S^1 \times X$ et que r_3 est continue sur C_3 . Soit $j : S^1 \times X \rightarrow C_3$ l'inclusion continue $i(u, v) = (0, u, uv)$; on vérifie sans peine que j identifie bien $S^1 \times X$ à un sous-espace de C_3 . De plus $r_3 \circ j$ est l'identité de $S^1 \times X$. Il reste à voir que $j \circ r_3$ est homotope à l'identité. Pour cela on définit l'application $H_3 : [0, 1] \times C_3 \rightarrow C_3$ par

$$H_3(t, (z_1, z_2, z_3)) = \frac{1}{1 - t + t|z_2 - z_1|} \left((1 - t)z_1, z_2 - tz_1, (z_2 - z_1)H_1 \left(t, \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} + (1 - t)z_1 \right) \right).$$

On vérifie que H_3 prend ses valeurs dans C_3 car, pour tout t , $H_1(t, -) \neq 0, 1$. La continuité est immédiate (au vu des questions précédentes). Enfin $H_3(0, (z_1, z_2, z_3)) = (z_1, z_2, z_3)$ et $H_3(1, -) = r_3$.

Exercice 6. 1. Démontrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est homotope à $O_n(\mathbb{R})$ et n'est pas contractile (indiquez la décomposition polaire).

2. Démontrer que la *bande de Mobius*, c'est à dire l'espace topologique quotient $[-1, 1] \times [0, 1] / (x, 1) \sim (-x, 0)$, est homotope à un cercle.

3. Soit T un triangle dans \mathbb{R}^2 (avec son intérieur) et notons p, q, r ses sommets. On appelle *bonnet d'âne* le triangle dont on a identifié les arêtes de la façon suivante: $[p, q]$ avec $[q, r]$ et $[p, q]$ avec $[p, r]$. Montrer que le bonnet d'âne est un espace contractile (en l'identifiant au cône d'une application du cercle dans lui-même, cf exercice suivant).

Solution 6. 1. La décomposition polaire dit que $GL_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $O_n(\mathbb{R}) \times Sym^+$ où Sym^+ est le sous-espace des matrices symétriques définies positives. On a que l'exponentielle de matrice est un homéomorphisme entre Sym et Sym^+ (comme on le voit en diagonalisant les matrices). Or $Sym \cong \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ est contractile. Il suit que $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R})$.

2. Rappelons que $M \cong [0, 1]^2 / (0, y) \sim (1, 1 - y)$. On note $r : (x, y) \mapsto (x, 1/2)$. Cette application passe au quotient par propriété universelle du quotient. L'image de $\{(t, 1/2)\}$ par le quotient est homéomorphe à $[0, 1] / (0, 1)$ donc est un cercle. Il reste à construire une homotopie entre r et l'identité. Il suffit de définir une application continue $[0, 1]^2 \times [0, 1] \rightarrow M$ qui passe au quotient. On remarque que $H(x, y, t) = (x, ty + (1 - t)/2)$ convient.

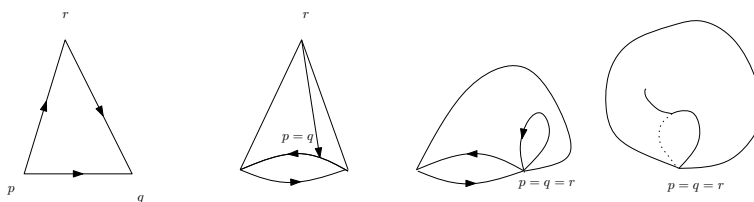


Figure 2: Le bonnet d'âne

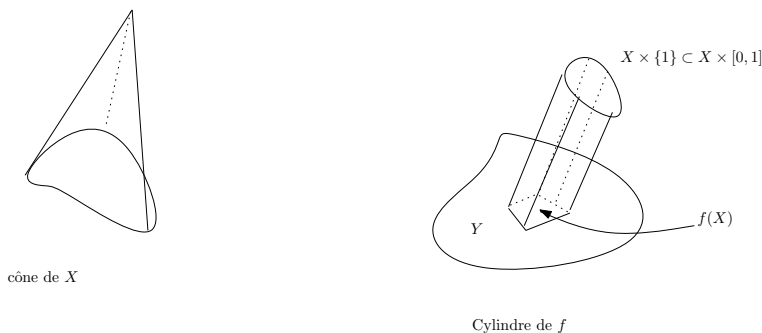


Figure 3: Le cône de X et le cylindre de $f : Y \rightarrow X$

3. On conseille de faire un dessin pour mieux comprendre ! Le bord ∂T du triangle est homéomorphe à un cercle. De plus le cône $C(S^1)$ d'un cercle est homéomorphe à un disque (fermé) et donc à T . On définit une application $f : S^1 \cong \partial T \rightarrow S^1$ qui, envoie chaque segment sur un cercle S^1 en suivant les identifications données dans l'énoncé (en particulier les 3 points p, q, r sont identifiés). En termes de formules mathématiques (pour ceux qui ont besoin d'être rassurés), cela donne: une application $f : \partial T \rightarrow [0, 1](0 \sim 1) \cong S^1$ donnée par

- $f(t(q - p) + p) = [t] \in [0, 1](0 \sim 1)$ sur le segment $[p, q]$;
- $f(t(r - p) + p) = [t] \in [0, 1](0 \sim 1)$ sur le segment $[p, r]$;
- $f(t(r - q) + q) = [t] \in [0, 1](0 \sim 1)$ sur le segment $[q, r]$.

On vérifie que cela définit bien une application continue du bord du triangle dans le cercle. Il est clair, par construction que le bonnet d'âne est bien $C(f)$. En parcourant le bord du cercle en suivant d'abord le segment $[p, q]$, puis $[q, r]$ puis en revenant à p en suivant le segment $[r, q]$ (attention, on va dans le sens contraire du segment $[p, q]$), on obtient facilement que le degré de f est donné par $\deg(f) = 1 + 1 - 1 = 1$. Donc f est homotope à l'identité et, d'après l'exercice 2, $C(f)$ est homotope à $C(id) = C(S^1) \cong D^2$ qui est contractile !

Remarque : il convient de remarquer que si on avait identifié d'une autre façon les bords du triangle, on aurait pu obtenir des espaces non-contractiles (par exemple une sphère en identifiant tout le bord à un point).

Exercice 7 (Cylindre et cône d'une application). Le **cylindre de f** est le recollement $Cyl(f) := X \times [0, 1] \cup_{f \times \{0\}} Y$ où $f \times \{0\}$ est donné par $f \times \{0\} : X \times \{0\} \cong X \xrightarrow{f} Y$. Le **cône de f** est le recollement $C(f) := C(X) \cup_{f \times \{0\}} Y$.

1. Montrer que X et Y s'identifient à des sous-espaces fermés de $Cyl(f)$. À quoi est homotope $Cyl(f)$?

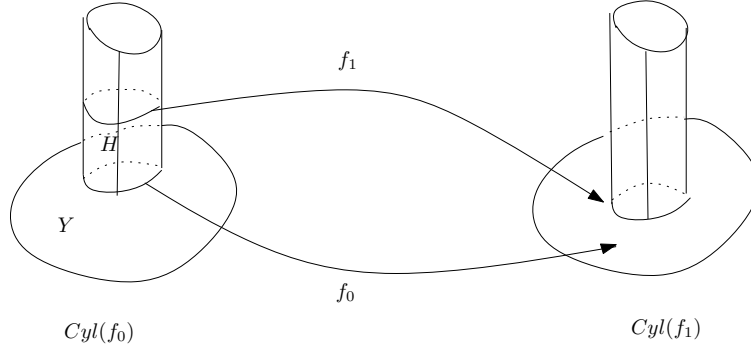


Figure 4: L'application $Cyl(f_0) \rightarrow Cyl(f_1)$ déduite de l'homotopie H .

2. Montrer que si $f_0 : X \rightarrow Y$ et $f_1 : X \rightarrow Y$ sont homotopes, alors $Cyl(f_0)$ est homotope à $Cyl(f_1)$ et $C(f_0)$ est homotope à $C(f_1)$. En déduire que si $\psi : Y \rightarrow Y'$ est une équivalence d'homotopie alors $Cyl(f)$ et $C(f)$ sont respectivement homotopes à $Cyl(\psi \circ f)$ et $C(\psi \circ f)$.

Solution 7. 1. Il est assez facile de voir que $Cyl(f)$ est homotope à Y . Voir la remarque ci dessous. La question 2 pour le cymindre en découle facilement. C'est plus compliqué pour le cône. On va donner maintenant une preuve qui marche à la fois pour le cylindre et pour le cône de la même façon.

On commence par montrer l'utile lemme suivant, qui dit que le type d'homotopie du cylindre ou cône d'une application continue ne dépend que du type d'homotopie de l'application:

Lemme : si $f_0 : X \rightarrow Y$ et $f_1 : X \rightarrow Y$ sont homotopes, alors $Cyl(f_0)$ est homotope à $Cyl(f_1)$ et $C(f_0)$ est homotope à $C(f_1)$.

Démontrons ce lemme. On note $H : I \times X \rightarrow Y$ une homotopie entre $f_0 = H(0, -)$ et $f_1 = H(1, -)$. On construit une application $\Phi_H : X \times [0, 1] \amalg Y \rightarrow Cyl(f_1)$ définie par $\Phi_H(y) = [y]$, $\Phi_H(x, t) = [(x, 2t - 1)]$ si $t \geq 1/2$ et $\Phi_H(x, t) = [H(x, 2t)]$ si $t \leq 1/2$ (autrement dit $\Phi_H(x, t) = H \star id_{X \times I}(x, t)$). Il est clair que Φ_H est continue et constante sur les classes d'équivalence du quotient $Cyl(f_0) = X \times [0, 1] \amalg Y / (y \sim f_0(x, 0))$. On en déduit une application continue $\widetilde{\Phi}_H : Cyl(f_0) \rightarrow Cyl(f_1)$ (cf figure 2). On obtient de même (en considérant H^{-1} , l'inverse "homotopique" de H , défini par $H^{-1}(x, t) = H(x, 1 - t)$) une application continue $\widetilde{\Psi}_H : Cyl(f_1) \rightarrow Cyl(f_0)$ dont on va montrer qu'elles sont des équivalence d'homotopie inverses l'une de l'autre. On note $K = \widetilde{\Psi}_H \circ \widetilde{\Phi}_H : Cyl(f_0) \rightarrow Cyl(f_0)$ et on veut montrer que K est homotope à l'identité. Il est clair que $K([y]) = [y]$ pour tout $y \in Y$. Mais $K([x, t]) = [H \star (H^{-1} \star id)(x, t)]$; c'est à dire $K([x, t]) = [H(x, 2t)]$ si $t \leq 1/2$, $K([x, t]) = [H^{-1}(x, 4t - 2)]$ si $1/2 \leq t \leq 3/4$, $K([x, t]) = [(x, 4t - 3)]$ si $t \geq 3/4$ (la figure 3 est peut être plus claire que ces formules). Or H et H^{-1} étant des homotopies inverses l'une de l'autre, on en déduit qu'il existe une homotopie (laissant fixe $X \times \{0\}$) entre K et l'identité (qui "applatit" la partie du cylindre où on a composé H et H^{-1} jusqu'à la confondre avec $X \times \{0\}$). Plus précisément l'homotopie en question $\Xi : [0, 1] \times Cyl(f_0) \rightarrow Cyl(f_0)$ est donnée par la formule suivante:

$$\begin{aligned} \Xi(u, (x, t)) &= \begin{cases} (x, \frac{4t-3u}{4-3u}) & \text{pour } t \geq \frac{3u}{4} \\ \theta(u, (x, \frac{4t}{3u})) & \text{pour } t < \frac{3u}{4} \end{cases} \\ \Xi(u, y) &= y \quad \text{pour } y \in Y \end{aligned}$$

où θ est l'homotopie⁸ entre $H \star H^{-1}$ et l'application $(x, t) \mapsto f_0(x, t)$. On vérifie que Ξ est bien continue et que $\Xi(1, -) = K$ et $\Xi(0, -)$ est l'identité de $Cyl(f_0)$.

⁸voir les préliminaires; et tenir compte de la reparamétrisation de H et H^{-1} .

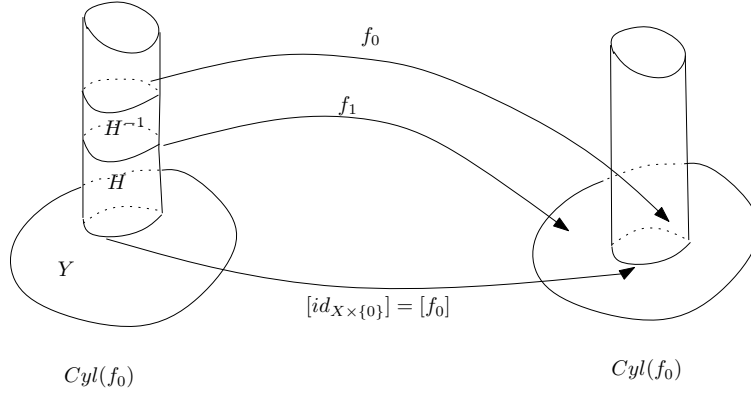


Figure 5: L'équivalence d'homotopie $K : Cyl(f_0) \rightarrow Cyl(f_0)$ déduite de l'homotopie H .

De même la composée $\widetilde{\Phi}_H \circ \widetilde{\Psi}_H$ est homotope à l'identité ce qui termine de prouver le lemme: $Cyl(f_1)$ est homotope à $Cyl(f_0)$ (la preuve pour les cônes est la même; il suffit de passer au quotient en haut du cylindre à chaque étape).

Passons à la question proprement dite ! Déjà pour tout $g : Y \rightarrow Y'$ continue, Par la question 2. (induite par l'identité sur $X \times [0, 1]$ et g sur Y) on obtient une application continue $Cyl(f) \rightarrow Cyl(g \circ f)$. Soit $\psi : Y \rightarrow Y'$ une équivalence d'homotopie. Il existe donc $\gamma : Y' \rightarrow Y$ tel que $\gamma \circ \psi$ et $\psi \circ \gamma$ soient homotopes à l'identité. On obtient alors une application continue $A : Cyl(f) \xrightarrow{B_\psi} Cyl(\psi \circ f) \xrightarrow{B_\gamma} Cyl(\gamma \circ \psi \circ f)$. Comme f est homotope à $\gamma \circ \psi \circ f$, la preuve du lemme ci-dessus nous assure que A est une équivalence d'homotopie (il suffit de vérifier que l'homotopie construite dans la preuve du lemme est homotope à l'application A). De même, la composée $Cyl(\psi \circ f) \xrightarrow{B_\gamma} Cyl(\gamma \circ \psi \circ f) \xrightarrow{C_\psi} Cyl(\psi \circ \gamma \circ \psi \circ f)$ est une équivalence d'homotopie. On a donc des équivalence d'homotopies $C_\psi \simeq C_\psi \circ (B_\gamma \circ B_\psi) \simeq (C_\psi \circ B_\gamma) \circ B_\psi \simeq B_\psi$ et on en déduit que $B_\psi \circ B_\gamma \simeq C_\psi \circ B_\gamma \simeq id$, et comme $B_\gamma \circ B_\psi \simeq id$, on a que B_ψ (et B_γ) sont des équivalences d'homotopie (inverses l'une de l'autre) !

La preuve pour les cônes est similaire.

Remarque : par construction du cylindre de $f : X \rightarrow Y$, Y s'identifie canoniquement à un sous-espace fermé de $Cyl(f)$. De plus la projection $X \times [0, 1] \rightarrow X \times \{0\}$ induit une rétraction $r : Cyl(f) \rightarrow Y$ (c'est à dire que $Y \hookrightarrow Cyl(f) \xrightarrow{r} Y$ est l'identité de Y). De plus l'application $Cyl(f) \xrightarrow{r} Y \hookrightarrow Cyl(f)$ est évidemment homotope à l'identité (car $X \times \{0\}$ est homotope à $X \times [0, 1]$). On a donc montré que $Cyl(f)$ est un rétracte par déformation de Y . De plus on a une injection continue de $i : X \cong X \times \{1\} \hookrightarrow Cyl(f)$ (dont l'image est fermée) et une factorisation $f = r \circ i$. Par conséquent, toute application $f : X \rightarrow Y$ continue peut se factoriser sous la forme d'une injection fermée et d'une équivalence d'homotopie (qui est même un rétracte par déformation).