Quelques exemples d'espaces topologiques et de propriétés topologiques

Exercice 1 (bouquets de cercles). On considère les espaces topologiques suivants :

1. A est l'espace topologique obtenu comme quotient de $\mathbb{R}$ (muni de la topologie usuelle) par le sous-*ensemble* $\mathbb{Z}$.
2. B est l'espace quotient du cercle unité S^1 par son sous-ensemble $\{1\} \cup \{\exp(2i\pi/n),\, n \in \mathbb{N}^*\}\big)$;
3. R_1 est le sous-espaces du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ donné par la réunion des cercles de rayon $n \in \mathbb{N}$ et tangents en $(0,0)$ à l'axe $y = 0$;
4. R_2 est le sous-espaces du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ donné par la réunion des cercles de rayon $1/n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et tangents en $(0,0)$ à l'axe $x = 0$;
5. $\bigvee_{\mathbb{Z}} S^1$ est l'espace topologique donné par le recollement de $X = \coprod_{\mathbb{Z}} S^1$ sur le point $Y = \{pt\}$ par l'unique application $f : F \to \{pt\}$ où $F = \coprod_{n\in\mathbb{Z}}\{x_n\}$ est une réunion de points (on choisit exactement un point par cercle).

Dire lesquels de ces espaces sont homéomorphes entre eux.

Solution 1. Il faut bien faire attention que l'espace est le quotient de $\mathbb{R}$ par le sous-espace $\mathbb{Z}$ (et non pas par la relation d'équivalence donnée par le sous-groupe $\mathbb{Z}$!) On a que A et X sont homéomorphes entre eux (ils forment ce qu'on on appelle un bouquet dénombrables de cercles) et que B et R_2 sont homéomorphes entre eux (ce sont les "boucles hawaïennes"). Enfin R_1 n'est homéomorphe à aucun autre espace et de plus les boucles hawaïennes ne sont pas homéomorphes à un bouquet de cercles. Pour voir cela, commençons par montrer que R_1 et R_2 ne sont pas homéomorphes (c'est assez évident intuitivement puisque un voisinage de $(0,0)$ dans R_2 contient une infinité de cercles alors que ce n'est pas le cas pour R_1). Comme R_1 est non-borné dans R^2, il n'est pas compact et il suffit de montrer que R_2 est compact pour. C'est évident si on a déjà montré que R_2 est homéomorphe à B puisque B est le quotient d'un compact par le fermé $\{1\} \cup \{\exp(2i\pi/n),\, n \in \mathbb{N}^*\}$ qui ets la réunion d'une suite convergente et de sa limite. Bien-sur on peut aussi facilement vérifier que toute suite (x_n) de R_2 (qui est métrisable car inclus dans $\mathbb{R}^2$) admet une valeur d'adhérence, car soit une telle suite est incluse dans un nombre fini de cercles (dont la réunion est un compact de $\mathbb{R}^2$, donc admet une valeur d'adhérence) soit elle admet une sous suite qui converge vers $(0,0)$.

Montrons que R_1 n'est pas homéomorphe à A. L'idée est que $R_1 \subset \mathbb{R}^2$, donc est métrisable. Il suffit donc de montrer que A ne l'est pas. Rappelons que si un espace est métrisable il vérifie que tout point admet une base dénombrable de voisinages ouverts[1] (par exemple donnée par les boules centrée en ce point de rayon $1/n$). Montrons que la classe du point $[0] \in A = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ n'admet pas de telle base de voisinage. On note $\pi : \mathbb{R} \to A$ l'application quotient. Par définition de la topologie quotient, une base d'ouverts de $[0]$ est donnée par les $\pi(\coprod_{n\in\mathbb{Z}}]n-\epsilon_n, n+\epsilon_n[)$ où les $0 < \epsilon_n < 1/2$ forment une suite quelconque (en particulier les intervalles $]n-\epsilon_n, n+\epsilon_n[$ sont disjoints). Soit maintenant une famille dénombrable $(V_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de voisinages ouverts de $[0]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\pi^{-1}(V_n)$ est un voisinage ouvert saturé de $\mathbb{R}$ qui contient n, donc, il existe $\delta_n > 0$ tel que l'intervalle ouvert $I_n =]n-\delta_n, n+\delta_n[$ soit *strictement* inclus dans $(\pi^{-1}(V_n)) \cap]n-1/2, n+1/2[$. Mais alors l'ouvert $\coprod_{n\in\mathbb{Z}} I_n$ est un ouvert saturé de $\mathbb{R}$ et donc $\pi(\coprod_{n\in\mathbb{Z}} I_n)$ est un ouvert de A qui ne contient aucun V_n par construction (puisque $V_n \cap]n-1/2, n+1/2[$ n'est pas inclus dans I_n). Par conséquent la classe de $[0] \in A$ n'admet pas de base de voisinages dénombrables et donc A n'est pas métrisable.

[1] dasn les ouvrages anglophones, un espace vérifiant cette propriété est appelé first countable

Il reste à montrer[2] les homéomorphismes évoqués ci-dessus. L'homéomorphisme ϕ entre A et $X = \coprod_{\mathbb{Z}} S^1$ découle de l'homéomorphisme entre $[0,1]/(0 \sim 1)$ et S^1 (donné par l'exponentielle comme dans l'exercice **4)** sur les tores) en envoyant par exemple un élément $x \in [n, n+1]$ sur l'élément correspondant à $x - n \in [0,1]$ du cercle indicé par n dans X. Pour vérifier que cette application est bien un homéomorphisme, la seule (toute petite) difficulté réside alors dans les voisinages de la classe de $0 \in X$. On vérifie comme ci-dessus qu'une base de tels voisinages est donnée par une réunion (disjointe) d'arcs de cercles de longueur θ_n quelconques contenant pt (avec exactement un arc pour chaque cercle). Comme une base de voisinage de $[0]$ dans A est donnée par $\pi(\coprod]n - \tau_n, n + \tau_n[)$ (pour $0 < \tau_n < 1/2$) on obtient facilement que l'application ϕ est bien un homéomorphisme.

Enfin pour montrer que R_2 et B sont homéomorphes, on procède comme entre A et R_1. Et on veŕifie cette fois qu'une base de voisinages de $\pi(1) \in B$ est donnée par l'image d'une famille d'intervalles contenant tous les points $\{1/n\}$ dés que n est assez grand et de petits arcs de cercles centrés en les autres points de la forme $1/n$. Similairement une, base de voisinages de $(0,0)$ dans R_2 est donnée par la réunion d'une famille d'arcs de cercles appartenant à un nombre finis de cercles de rayon $1/n$ et tous les cercles de rayon $1/n$ n'appartenant pas à cette famille.

Exercice 2. (fonctions continues à valeur dans un espace séparé) Soient f et g deux fonctions continues sur un espace topologique X et à valeurs dans un espace topologique *séparé* Y.

1. Vérifier que l'ensemble $\{x \in X/\ f(x) = g(x)\}$ est un fermé de X.

2. Montrer que si $D \subset X$ est une partie dense et $f_{|D} = g_{|D}$, alors $f = g$. Exhiber un contre-exemple élémentaire (avec Y non-séparé bien sur).

3. On suppose que f est en plus injective. Montrer que X est séparé.

Solution 2.

1. On montre que le complémentaire de
$$A = \{x \in X/\ f(x) = g(x)\}$$
est ouvert. En effet, si $a \notin A$, alors $f(a) \neq g(a)$, donc $A^c = \{x \in X/\ f(x) \neq g(x)\}$. Comme Y est séparé, il existe un voisinage ouvert $U_{f(a)}$ de $f(a)$ et un voisinage ouvert $V_{g(a)}$ de $g(a)$ tels que $U_{f(a)} \cap V_{g(a)} = \emptyset$. Par continuité de f et g, $W := f^{-1}(U_{f(a)}) \cap g^{-1}(V_{g(a)})$ est un voisinage ouvert de a et pour tout $y \in W$, on a $f(y) \neq g(y)$ puisque $U_{f(a)}$ et $V_{g(a)}$ sont disjoints. Donc W est un voisinage ouvert de a inclus dans le complémentaire de A. Pour comprendre cette construction, il est utile de faire un dessin !

2. Par la question précédente, l'ensemble $\{x \in X/\ f(x) = g(x)\}$ est fermé et contient une partie dense D. Il est donc égal à $\overline{D} = X$. Il suffit de prendre $X = \mathbb{R}$ avec sa topologie usuelle et $Y = \mathbb{R}$ avec la topologie grossière. Comme toute fonction $X \to Y$ est alors continue, $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ et $g = 1$ convienent.

3. Si f est injective, elle induit une bijection $X \to f(X)$ encore notée f. $f(X)$, muni de la topologie induite par Y est encore séparé. Comme f est continue, $f^{-1} : f(X) \to X$ est de plus une bijection fermée et ouverte. On conlut en utilisant le lemme suivant: *si $g : Y \to Z$ est une application ouverte injective avec Y séparé, alors $g(Y)$ est séparé.* En effet, si $f(x) \neq f(y)$, il existe des ouverts $U_x \ni x$, $V_y \ni y$ disjoints dans Y. Par injectivité $f(U_x)$ et $f(U_y)$ sont disjoints et ouverts puisque f est ouverte.

Exercice 3. (**Le tore**) Soit T_2 l'espace topologique quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (attention on quotiente par le groupe $\mathbb{Z}^2$, pas juste l'ensemble). On note $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ la projection canonique.

1. Montrer que T_2 se plonge dans $\mathbb{R}^3$ et est homéomorphe à $S^1 \times S^1$.

[2] on se contente de donner une ébauche de preuve et de laisser les détails au lecteur

2. En utilisant les résultats du premier cours sur l'homologie, démontrer que T_2 n'est pas contractile.

3. Soit D_α une droite de pente $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, $\pi(D_\alpha)$ est homéomorphe à un espace topologique bien connu. Montrer que dans le cas contraire $\pi(D_\alpha)$ est dense dans T^2 et que $\pi_{|D_\alpha} : D_\alpha \to \pi(D_\alpha)$ est une bijection continue. Est-ce un homéomorphisme ?

4. On fixe maintenant $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et on munit T^2 de la relation $[x]\mathcal{R}'[y]$ ssi il existe une droite de pente α dans $\mathbb{R}^2$ telle que $[x]$ et $[y]$ sont dans $\pi(D)$. Montrer que $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence. Est-ce que $T^2/\mathcal{R}'$ est séparé ? Identifier la topologie du quotient $T^2/\mathcal{R}'$.

Solution 3. Il est indispensable de faire des dessins pour comprendre cet exercice.

1. On a vu en cours que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$. De manière générale, $X \times X'/G \times G' \cong X/G \times X'/G'$ lorsque G et G' sont des groupes. En effet les projections canoniques $X \times X'$ sur X/G et X'/G' sont constantes sur les classes et donc induisent des applications continues canoniques. Par propriété du produit d'un espace topologique, on obtient donc une application continue sur $X/G \times X'/G'$. Il reste à voir que ce dernier muni des projections canoniques vérifie la propriété universelle. Or si $f : X \times X' \to Y$ est continue et constante sur les classes, par surjectivité de $X \times X' \to X/G \times X'/G'$, la valeur d'un relèvement $\tilde{f}$ est imposée par le choix de relevé de $[x] \times [x']$. Il reste à voir que cette opération est continue. Pour voir que cette application est continue il faut montrer que $\tilde{f}^{-1}(U)$ est ouvert si U est ouvert dans Y. Or pour tout point (x, x') de $f^{-1}(U)$, ce dernier contient donc un produit $V \times W$ d'ouverts de X, X' contenant (x, x'). Leurs projetés par l'application quotient (qui est ouverte pour un groupe) est un ouvert pour la topologie produit de $X/G \times X'/G'$ au voisinage des points $([x], [x'])$ et est inclus dans $\tilde{f}^{-1}(U)$.

   Il suit que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong S^1 \times S^1$. On peut le paramétrer facilement par
$$((2 + \cos(t)) \cos(u), (2 + \cos(t)) \sin(u), \sin(t)).$$

2. On a la factorisation $z \mapsto (z, 1) \mapsto z$ de l'identité de S^1 au travers de $S^1 \times S^1$. Si le trore était contractile, cette application seraint nulle sur $H_1(S^1)$. Or par définition d'un foncteur $H_1(id_{S^1}) = id_{H_1(S^1)} := id : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ qui n'est pas nulle.

3. Il suffit de considérer le cas d'une droite passant par l'origine $(0, 0)$ (quitte à changer l'origine justement). Alors la droite sécrit sous la forme $y = \alpha x$ et deux points distincts (x, y), (x', y) de la droite sont identifiés dans le quotient si et seulement si il existe des entiers (p, q) tels que
$$q = (y - y') = \alpha(x - x') = \alpha p \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = q/p.$$

   Il suit que $\pi_{|D_\alpha} : D_\alpha \to \pi(D_\alpha)$ est une bijection continue si $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ (ou $\alpha = \infty$), $\pi(D_\alpha)$ est clairement homéomorphe à un quotient de $\mathbb{R}$ par un sous-groupe de la forme $x\mathbb{Z}$ pour un certain réel β. Mais alors, $\pi(D_\alpha) \cong \mathbb{R}/\beta\mathbb{Z}$ est homéomorphe au cercle S^1. En effet, cet homéomorphisme est induit par le relévement $f : \mathbb{R}/\beta\mathbb{Z} \to S^1$ de l'application continue $x \mapsto \exp(\dfrac{2i\pi}{\beta} x)$. La bijectivité de f est immédiate et pour vérifier que f^{-1} est continue, soit on la factorise au travers du compact $[0, \beta]$ soit on remarque que la préimage d'un arc de cercle suffisament petit est une réunion d'intervalles disjoints de la forme $]a, b[+\mathbb{Z}$. Remarquons qu'en appliquant ce raisonnement à l'axe réel et l'axe imaginaire, on obtient facilement que $(x, y) \mapsto (\exp(2i\pi x), \exp(2i\pi y))$ induit, par passage au quotient, un homéomorphisme de T^2 sur la surface de révolution $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^3$.

   Il reste à montrer que si α est irrationnel, $\pi(D_\alpha)$ est dense. Il suffit de montrer que pour tout $(x, y) \in T^2$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|(y - q) - \alpha(x - p)| < \epsilon$ ce qui découle immédiatement de la densité de $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$. L'image $\pi(D_\alpha)$ est donc dense. On a déjà vu que la restriction $\pi_{|D_\alpha} : D_\alpha \to \pi(D_\alpha)$ est une bijection continue[3]. En revanche ce n'est pas un

[3] ici $\pi(D_\alpha)$ est bien entendu muni de sa topologie de sous-ensemble de T^2.

homéomorphisme, sinon l'image de D_α serait localement fermée, en particulier, l'image de tout segment de longueur finie non-nulle contiendrait l'intersection d'une boule ouverte de T^2 et de $\pi(D_\alpha)$ (puisque un tel segment est d'intérieur non-vide). Mais ceci-n'est pas possible par densité.

4. Il est facile de voir que $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence. Remarquons que toute droite de pente α coupe l'axe réel en un unique point (sauf si $\alpha = 0$, auquel cas on considére l'axe imaginaire dans la suite de l'argument). Il suit que $T^2/\mathcal{R}'$ s'identifie à un quotient de $\mathbb{R}$ obtenue en considérant la relation $\mathcal{R}$ (engendrant T) et la relation $\mathcal{R}'$. C'est à dire que deux points de l'axe réel x, x' sont identifiés si et seulement si il existe des points sur les droites D_x, $D_{x'}$ de pentes α passant par $(x, 0)$, $(x', 0)$ qui différent par un élément du réseau $\mathbb{Z}^2$ ce qui se traduit aisément par $x - x' \in \frac{1}{\alpha}\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. on en conclut que si $\alpha \in \mathbb{Q}$, $T^2/\mathcal{R}'$ est homéomorphe à $\mathbb{R}/(\beta\mathbb{Z})$ (pour un certain réel β) c'est à dire à un cercle S^1 (comme en 1)), en particulier séparé. Par contre, si α est irrationnel, le groupe $\frac{1}{\alpha}\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et on en conclut facilement que $T^2/\mathcal{R}'$ est muni de la topologie grossière.

Exercice 4 (Espaces projectifs réels et complexes). L'espace projectif réel de dimension n est l'espace topologique des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui est, *par définition*, l'espace topologique quotient

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{R}^*$$

où le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ agit par multiplication scalaire. On définit de même *l'espace projectif complexe* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$. On note $[x_1 : \cdots : x_{n+1}]$ la classe d'équivalence dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ du point $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ (et de même dans $\mathbb{C}$). On définit aussi $\widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})} = S^n/\{\pm 1\}$, où $\{\pm 1\}$ agit sur la sphère comme précédemment. Enfin, on notera D^n la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.

1. On identifie dans cette question $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, et S^1 au cercle unité de $\mathbb{C}$.

   a) On considère la fonction $f(z) = z^2$ ($z \in S^1$). Montrer que f définit par passage au quotient un homéomorphisme $\bar{f}$ de $\widetilde{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$ sur S^1.

   b) À quel espace topologique bien connu $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est-il homéomorphe ?

2. Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

3. Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})}$ sont homéomorphes et qu'ils sont aussi homéomorphe à l'espace quotient $D^n/\!\sim$, où $x \sim x$ pour tout $x \in D^n$ et $x \sim -x$ pour tout $x \in S^{n-1} = \partial D^n$. Quel résultat analogue peut-on énoncer pour $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$?

4. Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont compacts[4].

5. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que l'image de H dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. Est-ce encore vrai pour $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$?

6. Soit $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $x \in X$ et D une droite ne passant pas par x. Démontrer que $X \setminus \{x\}$ est un rétracte par déformation de D.

7. Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ s'écrit comme une suite finie de recollements d'espaces topologiques simples.

Solution 4. L'espace projectif réel de dimension n est l'espace topologique des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui est, *par définition*, l'espace topologique quotient

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{R}^*$$

[4] on prendra garde de bien vérifier la définition de compact

où le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ agit par multiplication scalaire. On définit de même *l'espace projectif complexe* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$. On note $[x_1 : \cdots : x_{n+1}]$ la classe d'équivalence dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ du point $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ (et de même dans $\mathbb{C}$). On définit aussi $\widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})} = S^n/\{\pm 1\}$, où $\{\pm 1\}$ agit sur la sphère comme précédemment. Enfin, on notera B^n la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.

Gémétriquement, on peut identifier cet espace avec la réunion de l'hyperplan $z_{n+1} = 1$ et du plan $z_{n+1} = 0$. Le premier est obtenu par l'unique intersection entre une droite (non parallèle à ce plan) et ce plan. Le dernier plan correspond à celui des droites parallèles à $z_{n+1} = cste$, souvent appelé plan à l'infini.

1. On identifie dans cette question $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, et S^1 au cercle unité de $\mathbb{C}$.

   a) Pour $z, z' \in S^1$, on a $z \sim z'$ si et seulement si $z = \pm z'$, ce qui équivaut à $f(z) = f(z')$. Notons $\dot{z}$ la classe d'équivalence de z dans $\widetilde{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$; l'application $\bar{f}(\dot{z}) = z^2$ est donc bien définie de $\widetilde{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$ dans S^1, et continue car f l'est. L'application $\bar{f}$ est de plus surjective surjective car f l'est. Elle est aussi injective ($\bar{f}(\dot{z}) = \bar{f}(\dot{w}) \Rightarrow z^2 = w^2 \Rightarrow z = \pm w$, c'est-à-dire $\dot{z} = \dot{w}$). Enfin $\bar{f}$ est ouverte : soit U un ouvert de $\widetilde{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$. Soit V son image réciproque par la projection canonique $S^1 \to \widetilde{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$, V est un ouvert de S^1, donc $\bar{f}(U) = f(V)$ est ouvert dans S^1, car f est trivialement ouverte.

   b) L'espace $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à la sphère S^2. Pour le prouver, on introduit tout d'abord l'ensemble $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (espace appelé *sphère de Riemann*), que l'on munit de la topologie dont les ouverts sont les ouverts de $\mathbb{C}$ d'une part, et les complémentaires dans $\hat{\mathbb{C}}$ des compacts de $\mathbb{C}$ d'autre part. Alors $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\hat{\mathbb{C}}$, grâce à l'homéomorphisme $[z : z'] \mapsto z'/z$ si $z \neq 0$, $[0 : z'] \mapsto \infty$ (comme d'habitude, on part de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ puis en passant au quotient on a une bijection continue, qui est un homéomorphisme car il admet comme réciproque l'application $z \mapsto [1 : z]$ si $z \neq \infty$, $[0, 1]$ sinon, donc on peut montrer qu'elle est continue).

   Il reste donc à prouver que $\hat{\mathbb{C}}$ est homéomorphe à S^2. Intuitivement, on a ajouté à $\mathbb{C}$ un (seul) point à l'infini, et z s'approche de ∞ dès que $|z|$ tend vers l'infini. Pour le voir, on identifie $\mathbb{C}$ au plan $x_3 = 0$ de $\mathbb{R}^3$, on utilise la sphère $\mathbb{S}$ de centre $(0, 0, 1)$ et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$, on note $N = (0, 0, 2)$ son pôle nord et on définit l'application $s : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}^3$ comme suit: $s(x_1 + ix_2)$ est le point M d'intersection de $\mathbb{S} \setminus \{N\}$ avec le segment $[NZ]$ où $Z = (x_1, x_2, 0)$, et $s(\infty) = \infty$ (comme d'habitude, faites un dessin !). Alors s est un homéomorphisme[5] (on vérifie que $s(x_1 + ix_2) = (x_1, x_2, 2x_1^2 + 2x_2^2)/(4 + x_1^2 + x_2^2)$)...

   (L'inverse, projetant la sphère sur le plan “compactifié” est appelé *projection stéréographique*.)

2. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs car quotients d'espaces connexes par arcs (on notera qu'on utilise $n \geq 1$) !.

3. On considère d'une part l'application $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})}$, $x \mapsto [x/|x|]$. Cette application est continue (composée d'applications continues), elle est surjective, et $\phi(x) = \phi(y) \Leftrightarrow x/|x| = \pm y/|y| \Leftrightarrow x \sim y$, donc par passage au quotient on obtient une bijection continue $\bar{\phi} : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})}$. D'autre part, l'application $\psi : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $\psi(x) = [x]$, est elle aussi continue, surjective, et telle que $\psi(x) = \psi(y) \Leftrightarrow x \sim y$. Par passage au quotient, elle définit une bijection continue $\bar{\psi} : \widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. De plus les bijections $\bar{\phi}$ et $\bar{\psi}$ sont inverses l'une de l'autre, ce sont donc des des homéomorphismes.

   On va maintenant montrer que $\widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})}$ est homéomorphe à $B^n/\sim$. On considère l'application $F : B^n \to \widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})}$, définie par $F(x) = [x_1 : \cdots : x_n : \sqrt{1 - |x|^2}]$. Elle est continue, surjective (toute droite vectorielle de $\mathbb{R}^{n+1}$ coupe la sphère en deux points, l'un ayant sa $(n+1)^{\text{ième}}$

[5] c'est même un difféomorphisme...

coordonnée positive), et $F(x) = F(y) \Leftrightarrow (x, \sqrt{1-|x|^2}) = (y, \sqrt{1-|y|2}) \Leftrightarrow (x = y)$ ou $(|x| = |y| = 1$ et $x = -y) \Leftrightarrow x \sim y$. Par passage au quotient, on obtient une bijection continue $\bar{F} : B^n/\sim \to \widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})}$. Pour montrer que $\bar{F}$ est fermée, il y a deux possibilités. La première méthode (classique) est la suivante : on montre en utilisant la compacité que $\bar{F}$ est une application fermée : soit A un fermé de $B^n/\sim$, son image réciproque A_1 dans B^n est fermée dans un compact, donc compacte ; par suite, $\bar{F}(A) = F(A_1)$ est compact (l'espace d'arrivée est bien séparé comme quotient d'un compact par un fermé, cf le cours), donc fermé. Ainsi $\bar{F}$ est un homéomorphisme. L'autre méthode consiste à expliciter la réciproque et à montrer qu'elle est continue : ici, appelons g l'application qui à un point $(x_1, \dots, x_{n+1})$ de la sphère S^n, on associe la classe dans $B^n/\sim$ de $\mathrm{sgn}(x_{n+1})(x_1, \dots, x_n)$ où $\mathrm{sgn}(x_{n+1}) = 1$ si $x_{n+1} \geq 0$ et $\mathrm{sgn}(x_{n+1}) = -1$ si $x_{n+1} < 0$. On vérifie que g est invariante par antipodie sur S^n, on peut donc en déduire une application $\overline{g}$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ dans $B^n/\sim$. On vérifie alors qu'elle est bien la réciproque de $\bar{F}$, et qu'elle est continue. Pour ce dernier point, la continuité de g en un point qui n'est pas sur l'équateur est facile, reste à voir le cas d'un point $(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n, 0)$ sur l'équateur. On se convainc de la continuité en ce point en trouvant un voisinage de $(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n, 0)$ dans l'hémisphère nord et un voisinage de $(-\overline{x}_1, \dots, -\overline{x}_n, 0)$ dans l'hémisphère sud où les images par g sont arbitrairement proches de $g(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n, 0)$.

La preuve de l'homéomorphisme entre $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})}$ s'adapte sans aucune difficulté pour montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et $\widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}$ sont homéomorphes. De même, on adapte facilement l'argument donnant l'homéomorphisme entre $\widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})}$ et $B^n/\sim$ pour montrer qu'il y a un homéomorphisme entre $\widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}$ et le quotient de $B^{2n}/\mathcal{R}$ de B^{2n} par la relation $x\mathcal{R}x$ (pour tout $x \in B^{2n}$) et $x \sim z.x$ pour tout $x \in S^{2n-1} = \partial B^{2n}$ et $z \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, |z|^2 = 1\}$.

4. D'après la question précédente et le cours sur les recollements de compacts, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont des quotients d'un compact, il suffit donc de vérifier que la relation définissant le quotient est fermée. Pour $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ c'est très facile puisque le graphe de $\sim$ est la réunion de $\{(x, -x), x \in S^n\}$ et $\{(x, x), x \in S^n\}$ (on peut aussi bien sur vérifier "à la main", et c'est instructif, que le quotient est séparé en choisissant des ouverts saturés convenables). Dans le cas de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, le graphe de $\mathcal{R}$ est donné par $\{(x, zx), x \in S^{2n+1}, z \in S^1\} \in S^{2n+1} \times S^{2n+1}$ qui est compact (on peut le voir facilement en prenant des suites ou en remarquant que c'est l'image de $S^{2n+1} \times S^1$ par une certaine application continue).

5. Soit θ un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ sur H. On note p_k la projection $\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^k(\mathbb{R})$. Comme dans les questions précédentes, l'application $f = p_n \circ \theta$ donne par passage au quotient une bijection continue $\bar{f} : \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \to p_n(H \setminus \{0\})$. Montrons que $\bar{f}$ est ouverte. Soit donc U un ouvert de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. On a $\bar{f}(U) = f(V)$, où $V = p_{n-1}^{-1}(U)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; $f(V) = p_n(W)$, où $W = \theta(V)$ est ouvert dans $H \setminus \{0\}$. Soit Δ une droite vectorielle supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^{n+1}$. On pose $\Omega = W + \Delta$ (faites un dessin). Alors $W = H \cap \Omega$, et $p_n(W) = p_n(H \setminus \{0\}) \cap p_n(\Omega)$, c'est donc un ouvert de $p_n(H \setminus \{0\})$ (pour la topologie induite par $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$) en effet $p_n(\Omega)$ est ouvert dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (car $p_n^{-1}(p_n(\Omega)) = \Omega$ est ouvert dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$). Ainsi $\bar{f}(U)$ est ouvert, et $\bar{f}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ sur $p_n(H \setminus \{0\})$.

   Bien entendu, l'argument ci-dessus[6] s'applique *mutatis mutandis* au cas de $\mathbb{C}^{n+1}$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

6. Soit $y \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{x\}$, alors la droite (xy) interecte D en un unique point. On note $r(y)$ ce point et l'application $y \mapsto r(y)$ est continue. Par ailleurs, pour $z \in D$, $r^{-1}(\{z\}) = (xz) \setminus \{x\} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}$. On peut contracter inéairement les fibres de r sur z ce qui démontre le résulat.

   Concrétement, quitte à faire un changement de coordonnées on peut supposer que $x = [0, 0, 1]$ et $D := \{[x, y, z = 0]\}$. On a alors $r([1, y, z]) = [0, y, z]$ et $r([0, y, z)] = [0, y, z]$ aussi (faire

[6] qui est essentiellement de l'algèbre linéaire

un dessin). Et on peut prendre $H(t,[x,y,z]) = [tx,y,z]$ définit une homotopire entre $i\circ r$ et l'identtité.

7. Soit $f_{n-1} : \partial B^{2n} = S^{2n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ l'application continue définie par le passage au quotient (via l'homéomorphisme entre $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ et $\widetilde{\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})}$). On définit le recollement $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \cup_f B^{2n}$. Par surjectivité de f, on en déduit que $B^{2n}/\mathcal{R}$ est homéomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \cup_f B^{2n}$, d'où un homéomorphisme $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \cup_f B^{2n} \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ d'après les questions précédentes. En itérant on obtient que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (S^2 \cup_{f_1} B^4) \cup_{f_2} \cdots \cup_{f_{n-1}} B^{2n})$, c'est à dire que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ s'obtient comme une succession de recollement de boules de dimension $2n$ par leur bord à partir de S^2. c'est un exemple typique de ce qu'on appelle des CW-complexes comme on l'a vu en cours.

   Remarque. On peut remarquer que l'image de $B^{2n} - \partial B^{2n}$ dans $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \cup_f B^{2n} \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est le complémentaire d'un hyperplan de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (c'est à dire de l'image d'un hyperplan de $\mathbb{C}^{n+1}$). Autrement dit, le complémentaire d'un hyperplan de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathbb{C}^n$.

Exercice 5. (La sphère S^3 obtenue par un "collage" classique) Montrer que S^3 est obtenue en recollant deux "tores pleins" $D^2 \times S^1$ au moyen de l'application identique

$$D^2 \times S^1 \supset S^1 \times S^1 \to^{\mathrm{Id}} S^1 \times S^1 \subset S^1 \times D^2.$$

Indication: On identifiera S^3 au sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ défini par l'équation $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ et les tores pleins aux sous-ensembles définis par $|z_1| \le |z_2|$ et $|z_1| \ge |z_2|$.

Solution 5. Il est bon d'essayer d'imaginer cette construction fondamentale en géométrie de dimension 3.

On identifie D^2 avec le disque unité de $\mathbb{C}$ et S^1 avec son bord. Soit $T_1 := \{(z_1,z_2) \in S^3,\ \text{ tel que } |z_1| \le |z_2|\}$. Alors de l'équation $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, on déduit que pour tout $(z_1,z_2) \in T_1$, on a $|z_1|^2 \le 1/2$. De plus, z_2 sécrit sous la forme $z_2 = \sqrt{1 - \|z_1\|}\exp(i\theta)$ pour un certain complexe de module 1 $\exp(i\theta)$. Soit alors $f_1 : D^2 \times S^1 \to \mathbb{C}^2$ l'application définie par

$$f_1(z, \exp(i\theta)) = \left(\frac{z}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2-|z|^2}{2}}\,\exp(i\theta)\right).$$

Il est clair que f_1 est continue et que son image est $f_1(D^2 \times S^1) = T_1$. On vérifie sans mal que f_1 est injectif. Comme $D^2 \times S^1$ est compact (et $\mathbb{C}^2$ séparé), il suit que f_1 est un homéomorphisme. De même, on a un homéomorphisme $f_2 : D^2 \times S^1 \to T_2$, où $T_2 = \{(z_1,z_2) \in S^3,\ \text{ tel que } |z_2| \le |z_1|\}$ défini par

$$f_2(z, \exp(i\phi)) = \left(\sqrt{\frac{2-|z|^2}{2}}\,\exp(i\phi), \frac{z}{\sqrt{2}}\right).$$

Le bord de T_1 s'identifie à $S^1 \times S^1$ via l'application $(\exp(i\phi), \exp(i\theta)) \mapsto (\frac{\exp(i\phi)}{\sqrt{2}}, \frac{\exp(i\theta)}{\sqrt{2}})$ qui est la restriction de f_1 au bord de $D^2 \times S^1$. De même pour le bord de T_2. On peut donc effectuer le recollement $T_1 \cup_{id} T_2$ de T_1 sur T_2 par l'application $\partial T_1 \cong S^1 \times S^1 \xrightarrow{id} S^1 \times S^1 \cong \partial T_2 \subset T_2$.

On a déjà applications $f_1 : D^2 \times S^1 \to S^3$ et $f_2 : D^2 \times S^1 \to S^3$ qui sont continues. Mais les restrictions à $S^1 \times S^1$ de f_1 et f_2 coincident. D'après l'exercice 2, question 2, on en déduit une application continue F du recollement $D^2 \times S^1 \cup_{id_{S^1 \times S^1}} D^2 \times S^1$ dans S^3, qui est surjective, puisque par définition, tout élément de S^3 est soit dans T_1, soit dans T_2 (ou même les deux). Par compacité de $D^2 \times S^1 \cup_{id_{S^1 \times S^1}} D^2 \times S^1$ (ce qui découle encore de l'exercice 2 car $S^1 \times S^1$ est fermé et $D^2 \times S^1$ compact), il suffit maintenant de montrer que F est injective pour conclure. Mais si $F(u) = F(y)$ alors ou bien u, y sont tous deux dans le même facteur $D^2 \times S^1$ et alors F est soit f_1, soit f_2 en tout cas injectif, ou bien ils sont dans deux facteurs distincts. Auquel cas, ils ne peuvent coincider que si ils sont dans l'image de $S^1 \times S^1$ et $F_{S^1 \times S^1}$ est encore injectif.

Exercice 6. (**Topologie compacte-ouverte**) Soit X, Y deux espaces topologiques. On note Y^X l'espace des fonctions continues $Y^X := \{f : X \to Y,\ f \text{ continue }\}$. La topologie compacte-ouverte est la topologie usuelle sur l'espace des fonctions. Ses ouverts sont engendrés par les ensembles $\widetilde{U^K} = \{f : X \to Y\ ,\ f(K) \subset U\}$ pour tous $U \subset Y$ ouvert et $K \subset X$ compact.

1. Montrer que la topologie compacte-ouverte est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et montrer que si Y est séparé, Y^X est séparé.

2. On suppose maintenant X localement compact.

   (a) (*évaluation*) Montrer que l'application d'évaluation $ev : X \times Y^X \to Y$ définie par $ev(x, f) = f(x)$ est continue.

   (b) (*adjonction*) A toute application continue $f : X \times Y \to Z$, on associe l'application $\tilde{f} : Y \to Z^X$ définie, pour tout $y \in Y$, par $\tilde{f}_y = f(-, y)$. Vérifier que $\tilde{f}_y$ est bien dans Z^X.

   (c) (*loi exponentielle et composition*) On suppose que Y est localement compact et Z est séparé. Montrer que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ induit un homéomorphisme $Z^{X\times Y} \cong (Z^X)^Y$. Montre que la composition $(f, g) \mapsto g \circ f$ induit une application continue $c : Y^X \times Z^Y \to Z^X$.

   (d) Si Y, Z sont séparés, montrer que l'appplication qui à $(f, g) \in Y^X \times Z^X$ associe l'application $x \mapsto (f(x), g(x))$ induit un homéomorphisme $Y^X \times Z^X \cong (Y \times Z)^X$.

   (e) Donner des contre-exemples lorsque X n'est pas localement compact ou Y séparé.

3. Soit $x \in X$ un point de X. On note $P_*X = \{f : [0, 1] \to X, f(0) = x\}$ l'**espace des chemins** (issus de x) muni de la topologie compacte-ouverte. Montrer que P_*X est contractile.

Solution 6. Rappelons qu'un singleton est toujours compact.

1. Supposons que Y est métrique. Notons, pour tout compact K,

$$d_K(f, g) = \sup_{x\in K} d(f(x), g(x))$$

   la distance induite sur les fonctions restreinte à K. Tout d'abord, si $f : X \to Y$ est une fonction, alors la boule $\{X \xrightarrow{g} Y,\ d_K(f, g) < \varepsilon\}$ est un ouvert pour la topologie compacte-ouverte. En effet $U_{K,f} := \bigcup_{x\in K} B(f(x), \varepsilon)$ est un ouvert de Y (c'est uen réunion de boules ouvertes de Y) et on a, par définition,

$$\{X \xrightarrow{g} Y,\ d_K(f, g) < \varepsilon\} = \widetilde{U^K_{k,f}}.$$

   Réciproquement, Soit $f \in \widetilde{U^K}$ pour un ouvert U et un compact K. On a que $f(K)$ est un compact inclus dans U (rappelons que Y est forcément séparé car métrique). On peut donc recouvrir $f(K)$ par un nombre *fini* de boules ouvertes $B(f(y), \varepsilon_y) \subset U$ (où y est dans K). Soit ε le minimum des ε_y. On a alors que la boule $\{X \xrightarrow{g} Y,\ d_K(f, g) < \varepsilon\}$ est incluse dans $\widetilde{U^K}$. Ceci termine de montrer que la topologie compacte-ouverte est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact lorque Y est métrisable.

   Supposons Y séparé. Soit $f \neq g$ deux fonctions. Il existe donc x tel que $f(x) =\neq g(x)$. par séparation on a des ouverts disjoints U_1 et U_2 contenant respectivement $f(x)$ et $g(x)$. Les ouverts[7] $\widetilde{U_1^{\{x\}}}$ et $\widetilde{U_2^{\{x\}}}$ sont disjoints (pusique U_1 et U_2 le sont). Le premier contient f et le second g pqr construction ce qui donne que la topologie compacte-ouverte est séparée.

2. On suppose maintenant X localement compact.

[7] on rappelle qu'une singleton est toujours compact

(a) (*évaluation*) L'application d'évaluation $ev : X \times Y^X \to Y$ est définie par $ev(x, f) = f(x)$. Soit $(x, f) \in X \times Y^X$ et V un voisinage ouvert de $f(x)$ dans Y. Il faut montrer que $ev^{-1}(V)$ est un voisinage de (x, f). Comme f est continue, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x; par compacité locale de X, il existe donc un compact K dans X vérifiant $x \in \overset{\circ}{K} \subset K \subset f^{-1}(V)$. Il suit que le produit $\overset{\circ}{K} \times \widetilde{V^K}$ est un voisinage ouvert de (x, f) inclus dans $ev^{-1}(V)$.

(b) (*adjonction*) Si $f : X \times Y \to Z$ est continue, il est évident que pour tout y fixé, l'application $x \mapsto f(x, y)$ est continue. Il est aussi évident que la formule $\tilde{f}_y = f(-, y)$ définit une bijection entre l'ensemble des applications de $X \times Y$ dans Z, d'une part, et, d'autre part, l'ensemble des applications de Y dans l'ensemble des applications de X dans Z.

(c) (*loi exponentielle et composition*) Vu la question précédente, il reste à montrer deux choses :

 (i) que si $\tilde{f} : Y \to Z^X$ est continue, alors l'application $f : X \times Y \to Z$ est continue pour établir une bijection entre $Z^{X \times Y}$ et $(Z^X)^Y$,

 (ii) que la bijection donnée par (i) est un homéomorphisme.

 On remarque que f est la composition des fonctions $X \times Y \overset{id \times \tilde{f}}{\longrightarrow} X \times Z^X$ et de l'évaluation $X \times Z^X \overset{ev}{\to} Z$ qui sont continues (d'après **(a)**). D'où la continuité de f et l'assertion (i) suit de la question précédente. Montrons que $tilde : f \mapsto \tilde{f}$ est un homéomorphisme. Soit $C_X \subset X$ et $C_Y \subset Y$ deux compacts et W un ouvert de Z. Alors

$$tilde^{-1}\left(\widetilde{(\widetilde{W^{C_X}})^{C_Y}}\right) = \widetilde{W^{(C_X \times C_Y)}}$$

 ce qui prouve que $tilde : Z^{X \times Y} \to (Z^X)^Y$ est continue. Soit maintenant K un compact de $X \times Y$ et $f \in \widetilde{W^K}$. On doit trouver un voisinage de $\tilde{f}$ dans $(Z^X)^Y$. Comme f est continue, $f^{-1}(W)$ est un ouvert contenant K. Comme X et Y sont séparés, les projections $p_X(K) \subset X$ et $p_Y(K) \subset Y$ de K sont compactes et K est un sous-espace fermé du compact $p_X(K) \times p_Y(K)$. Comme tout compact est régulier, il suit que pour tout point $(x, y) \in K$, il existe un voisinage compact $C_x \times C_y \subset (p_X(K) \times p_Y(K)) \cap f^{-1}(W)$. Par compacité de K, on peut recouvrir K par une famille finie $\overset{\circ}{(C_{x_i})} \times \overset{\circ}{(C_{y_i})}$. On conclut alors en remarquant que l'intersection des $\left(\widetilde{(\widetilde{W^{C_{x_i}}})^{C_{y_i}}}\right)$ est un voisinage de $\tilde{f}$ dans $tilde(\widetilde{W^K})$

 Comme la composée de deux fonctions continues est continue, l'application $c : X^Y \times Z^X \to Z^Y$ est bien définie. Montrons sa continuité. Soit $f \in X^Y$ et $g \in Z^X$, et $\widetilde{W^C}$ un voisinage de $c(f, g) = g \circ f$ dans Z^Y (avec $C \subset Y$ compact, $W \subset Z$ ouvert et $g \circ f(C) \subset W$). Alors $g^{-1}(W)$ est un ouvert contenant le compact $f(C)$ (rappelons que X est necéssairement séparé). Comme X est localement compact et $f(C)$ est compact, il existe un ouvert relativement compact V (c'est à dire que $\overline{V}$ est compact) de X vérifiant $f(C) \subset V \subset \overline{V} \subset g^{-1}(W)$. Il est alors clair que le produit $(\widetilde{V^C}) \times (\widetilde{W^{\overline{V}}})$ est un voisinage ouvert de (f, g) dans $c^{-1}(\widetilde{W^C})$ ce qui prouve la continuité de c.

(d) L'appplication qui à $(f, g) \in Y^X \times Z^X$ associe l'application $x \mapsto (f(x), g(x))$ est évidemmment une bijection au niveau ensembliste (rappelons qu'une application $(f, g) : X \to Y \times Z$ est continue si et seulement si f et g sont continues). Soient C_1, C_2 deux compacts de X et V, W deux ouverts de Y, Z. Un couple (f, g) est dans $(\widetilde{V^{C_1}}) \times (\widetilde{W^{C_2}})$ si et seulement si (f, g) est dans l'intersection

$$\widetilde{(V \times Z)^{C_1}} \ \cap \ \widetilde{(Y \times W)^{C_2}}.$$

 induit un homéomorphisme $Y^X \times Z^X \cong (Y \times Z)^X$. Il suit que la bijection $Y^X \times Z^X \cong (Y \times Z)^X$ est ouverte. Elle est continue car $\widetilde{(V \times W)^C} \cong \widetilde{V^C} \times \widetilde{W^C}$.

(e) Prenons $X = \mathbb{Q}$ (qui n'est pas localement compact) et $Y = [0,1]$. Montrons que l'application ev de la question (a) n'est pas continue. Soit f la fonction nulle. Alors $W = [0,1[$ est un voisinage de $ev(\mathbb{Q} \times \{f\}) = \{0\}$. Montrons que $ev^{-1}(W)$ n'est pas ouvert. Soit $(q,g) \in ev^{-1}(W)$. Il existe alors un voisinage ouvert U de q dans $\mathbb{Q}$ et un voisinage $\bigcap_{i=1}^n \widetilde{V_i^{K_i}}$ de g dans $[0,1]^{\mathbb{Q}}$ (avec V_i ouverts et K_i compacts) tels que $q \in \left(U \times \bigcap_{i=1}^n \widetilde{V_i^{K_i}}\right) \subset ev^{-1}([0,1[)$. Clairement il existe $x \in U - (\bigcup_{i=1}^n K_i)$ (sinon $\overline{U}$ serait un compact d'intérieur non vide dans $\mathbb{Q}$). Soit alors g une fonction qui vaut 1 en x et 0 sur K_i. Il est clair que (x,g) est dans $\left(U \times \bigcap_{i=1}^n \widetilde{V_i^{K_i}}\right)$, mais $ev(x,g) = g(x) = 1$ n'est pas dans $[0,1[$ ce qui contredit que $ev^{-1}([0,1[)$ est ouvert.

3. On définit $H : [0,1] \times PX \to PX$, pour $t \in [0,1]$ et $f \in PX$, par $H(t,f)(u) = f(tu)$. Il est clair que $H(0,f)$ est le chemin constant $u \mapsto x$ et que $H(1,f) = f$ (encore une fois, faire un dessin ne peut pas nuire). Il reste à voir que H est continue. Une application $F : Z \to PX$ est continue dés que l'application adjointe $\tilde{F} : Z \times [0,1] \to X$, définie par $\tilde{F}(z,u) = H(z)(u)$, est continue. En effet, soit $z \in Z$ tel que $F(z)(K) \subset U$ pour un certain ouvert U de X et compact K de I. Alors, $\tilde{F}^{-1}(U) \supset \{z\} \times K$ est un ouvert, donc pour tout $k \in K$, il existe des voisinages $V_k \times I_k$ de (z,k) inclus dans $\tilde{F}^{-1}(U)$. On extrait un recouvrement fini $I_{k_1} \cup \cdots \cup I_{k_n}$ de K et on a alors $\bigcap_{i=1}^n V_{k_i}$ qui est un ouvert de Z inclus dans $F^{-1}(W(K,U))$.

   L'application $PX \times I \times I \mapsto X$, définie par $(f,t,u) \to f(tu)$, est continue, car la mutliplication $(t,u) \mapsto tu$ est continue ainsi que l'évaluation $PX \times I \to I$. Ce dernier point provient de la compacité[8] de $[0,1]$. En effet, soit U un ouvert de X contenant $f(t)$ pour $f \in PX$ et $t \in [0,1]$. On doit montrer qu'il existe un compact $K \subset [0,1]$, un ouvert $V \subset X$ (avec $f \in W(K,V)$) et un voisinage $V_t \subset [0,1]$ de $\{t\}$ tels que pour tout $(g,s) \in W(K,V) \times V_t$, on a $g(s) \in U$. Comme f est continue, $f^{-1}(U)$ est un ouvert qui contient t. Il existe donc un voisinage compact[9] $C_t \subset f^{-1}(U)$ de t inclus dans $f^{-1}(U)$. On a alors que $W(C_t,U) \times \overset{\circ}{C} - t$ est un voisinage ouvert de (f,t) tel que pour tout $(g,s) \in W(C_t,U) \times C_t$, on ait $g(s) \in U$!

Remarque : si X est métrisable, alors la topologie compacte ouverte correspond à la topologie de la convergence uniforme sur tout compact d'après la question 1. Il est alors bien plus facile de montrer les continuités requises en appliquant le critère séquentiel de continuité et l'uniforme continuité de toute fonction continue sur un compact.

Exercice 7 (Sur la topologie produit). Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. On rappelle que la topologie produit est la topologie sur $\prod_{i\in I} X_i$ dont une base d'ouverts est donnée par les pavés élémentaires $\prod_{i\in I} W_i$ où W_i est un ouvert de X_i et $W_i = X_i$ sauf pour un nombre *fini* de $i \in I$. On notera $p_i : \prod_{j\in I} X_j \to X_i$ les applications canoniques $(x_j)_{j\in I} \mapsto x_i$.

1. Montrer que la topologie produit est la topologie la moins fine rendant les applications p_i continues et rappeler pourquoi cette topologie est bien l'espace topologique produit des X_i dans la catégorie **Top**.

2. Montrer que les p_i sont des applications ouvertes. Sont-elles fermées en général?

3. Montrer que si les A_i sont des parties non vides des espaces topologiques X_i, on a que ΠA_i est dense dans ΠX_i si et seulement si chaque A_i est dense dans X_i.

4. Montrer qu'un produit d'espaces connexes est connexe pour la topologie produit. Quelle réciproque peut-on énoncer de ce fait ?

[8] ce ne serait pas forcément vrai si on remplaçait $[0,1]$ par n'importe quel espace topologique...

[9] par voisinage compact on entend un compact d'intérieur non-vide; en particulier le singleton $\{t\}$ ne convient bien-sûr pas

5. (**Une fausse topologie produit**) Soient T_i $(i \in I)$ une famille d'espaces topologiques.

   (a) Montrer que l'ensemble des pavés du type ΠU_i avec chaque $U_i \in \mathcal{T}_i$ non vide, forme la base d'une topologie. A quelle condition cette topologie coïncide-t-elle avec *la topologie produit* ?

   (b) Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas connexe lorsqu'il est muni de cette topologie.

   (c) On suppose maintenant que chaque X_i est métrique, de distance d_i, et que I est infini. Soit (Y, d) un autre espace métrique. À quelle condition une fonction f de Y dans le produit des X_i est-elle continue (pour la fausse topologie produit) ? Comparer avec le cas de la topologie produit usuelle.

6. (**Métrisabilité de la topologie produit**) Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques; on munit $\prod_{i\in I} X_i$ de la topologie produit. On suppose que les espaces X_i ont au moins deux points. Démontrer que $\prod_{i\in I} X_i$ est métrisable si et seulement si I est fini ou dénombrable et chaque X_i est métrisable.

Solution 7. Attention, la définition de la topologie produit donnée dans cet exercice n'est pas celle du cours. Elle lui est équivalente en vertu de la question 1 ou du lemme consécutif à sa définition dans le cours. Par ailleurs, la démonstration qu'il s'agit bien du produit dans la catégorie des espaces topologiques découle immédiatement de la propriété universelle que nous avons vérifié dans le cours.

1. La topologie la moins fine rendant les p_i continue est la topologie engendrée par les ouverts $p_i^{-1}(U_i)$ où U_i est un ouvert de X_i et i est quelconque. Une intersection finie d'ouverts de cette forme est précisément un pavé élémentaire comme défini dans l'énoncé.

2. Il suffit de montrer que l'image de tout pavé élémentaire est ouverte (car tout ouvert est une réunion de pavés élémentaires). Or l'image par p_i d'un tel pavé W est W_i qui est ouvert par définition. En revanche p_i n'est pas fermée en général. Il suffit de considérer une hyperbole dans $\mathbb{R}^2$ dont la projection sur l'axe des abscisses est $\mathbb{R} - \{0\}$ et n'est pas fermé.

3. Il est simple en utilisant la définition de la topologie produit de voir que si chaque A_i est dense dans X_i, alors ΠA_i est dense dans ΠX_i, car ΠA_i rencontre tout ouvert élémentaire de cette topologie (ou bien on peut utiliser que les projections sont continues). Réciproquement, si ΠA_i est dense dans ΠX_i, alors il rencontre l'ouvert ΠB_i où $B_i = X_i$ sauf pour $i = k$ où A_k est un ouvert quelconque non vide de X_k. Il suit immédiatement que A_k est dense dans X_k.

4. Si un des X_i est vide, alors ΠX_i est vide et connexe. Dans le cas contraire, considérons une application continue de ΠX_i dans $\{0, 1\}$. Considérons un point a dans le produit (supposé non vide, sinon on a pas besoin de continuer !). L'application partielle $f_k : X_k \to \{0, 1\}$ définie par $f_k(x_k) = f(x)$, les composantes de x étant celles de a sauf pour l'indice k où l'on met x_k. Comme X_k est connexe, f_k est constante. On voit alors facilement que deux points du produit ne différant que d'un nombre fini de coordonnées ont la même valeur par f. Or l'ensemble des points différant de a d'un nombre fini de coordonnées est dense dans le produit, donc f est constante. Réciproquement, à condition que le produit soit non vide, chaque facteur est connexe, comme image d'un connexe par une application continue.

5. (a) Pour vérifier que ces ouverts forme la base d'une topologie, il suffit de vérifier que toute intersection finie de tels ouverts contient un ouvert de cette forme ce qui découle du fait qu'une intersection finie d'ouverts dans chaque X_i l'est. Elle ne coïncide avec la topologie produit que lorsque seuls un nombre fini de X_i ont une topologie non grossière : sinon il est facile de construire des ouverts pour la fausse topologie produit qui ont un nombre infini de composantes non égales à X_i tout entier, et qui donc ne peuvent pas être ouverts pour la topologie produit.

(b) On considère ℓ^∞ l'ensemble des suites bornées. Cet ensemble est la réunion croissante des $]-n,n[^{\mathbb{N}}$, et comme tel est ouvert dans notre topologie étrange. Prenons maintenant une suite (u_n) non bornée. Les éléments du pavé $\Pi]u_n-1,u_n+1[$ est également composé de suites non bornées, donc ne rencontre pas ℓ^∞. Donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\setminus\ell^\infty$ est donc ouvert. Donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas connexe.

En revanche, un produit d'espaces connexes est connexe pour la topologie produit comme prouvé précédemment.

(c) En utilisant les projections, on voit qu'il est nécessaire pour que f soit continue que chacune des composantes f_i soit continue. Mais cela n'est pas suffisant : il faut en fait que, localement, f soit constante sauf pour un nombre fini d'indices. Soit en effet y un point de continuité pour f. Si f n'était pas constante (sauf un nombre fini de composantes) au voisinage de x, alors pour tout n, il existerait une suite $x_n\in B(0,1/n)$, $\varepsilon_n>0$ où i_n est une suite d'indices tous distincts tels que $d_{i_n}(f_{i_n}(x),f_{i_n}(x_n))\geq\varepsilon_n$. On introduit alors le faux voisinage produit par le produit des boules dans X_{i_n} centrées en x de rayon $\varepsilon_n/2$ (et le produit des X_i pour tous les indices i non atteints par la suite (i_n)). On contredit alors facilement la continuité de f en remarquant que la suite (x_n) converge vers x mais que le faux voisinage précédent de $f(x)$ ne contient aucun point de la suite $(f(x_n))$. La réciproque est élémentaire.

Enfin, pour la topologie produit, seule la continuité des f_i est requise, bien sûr.

Pour cette fausse topologie produit, il y a donc peu de fonctions continues à valeur dans le produit.

6. Si chaque X_i est métrisable et I fini ou dénombrable alors $\pi_{i\in I}X_i$ est métrisable; en effet il suffit, par exemple prendre la distance $d(x,y)=\sum 2^{-n}\max(1,d_n(x_n,y_n))$. On vérifie aisément que c'est bien une distance et à peine plus difficilement qu'elle induit bien la topologie produit.

   De plus comme chaque X_i est homéomorphe à un sous-espace de $\Pi_{i\in I}X_i$, si le produit $\Pi_{i\in I}X_i$ est métrisable, alors chaque X_i est métrisable.

   Il reste donc à montrer que si chaque X_i est métrisable et I n'est ni fini ni dénombrable, le produit $X=\Pi_{i\in I}X_i$ n'est pas métrisable. Soit $x=(x_i)_{i\in I}\in\Pi_{i\in I}X_i$ un point de $\Pi_{i\in I}X_i$. Il suffit de montrer que x n'admet pas de base dénombrable de voisinages ouverts. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts contenant x. On va construire un ouvert qui contient x mais ne contient aucun U_n. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, comme U_n est un voisinage ouvert de x, il existe un ouvert élémentaire $U_{i_1^n}\times\cdots\times U_{i^n_{c(n)}}\times\Pi_{j\notin\{i^n_{c(1)},\ldots,i^n_{c(n)}\}}X_j$ inclus dans U_n ($c(n)$ est un entier fini). La réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{i^n_{c(1)},\ldots,i^n_{c(n)}\}\subset I$ est (fini ou) dénombrable. Soit alors $i\in I\setminus\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{i^n_{c(1)},\ldots,i^n_{c(n)}\}\right)$ (un tel i existe nécessairement). Et soit V_i un voisinage ouvert de x_i dans X_i qu'on suppose différent de X_i (ceci est possible car X_i a au moins deux points et est métrisable donc sépare les points). Alors il est clair que $V_i\times\Pi_{j\neq i}X_j$ est un ouvert contenant x mais aucun U_n par construction.

Exercice 8. (Axiomes de séparation[10]) Soit X un espace topologique.

(T_0) X est T_0 (ou de Kolmogoroff) si pour tout point $x\neq y$, il existe un ouvert contenant l'un des points et pas l'autre.

(T_1) X est dit[11] T_1 si pour tout points $x\neq y$, il existe un ouvert U_x contenant x et pas y et un ouvert U_y contenant y et pas x.

(T_2) X est T_2 si il est séparé (on dit aussi que X est Hausdorff).

[10] il convient de faire attention à la terminologie introduite qui, parfois, peut être légèrement différente suivant les auteurs

[11] parfois appelé de Fréchet, mais c'est une terminologie ambigue et non-univoque qu'il vaut mieux proscrire

(T_3) X est T_3 ou **régulier** s'il est T_0 et vérifie en plus la propriété ($\widetilde{T}_3$): pour tout fermé F et point $x \notin F$, il existe des ouverts O_x, O_F disjoints contenant respectivement x et F.

(T_4) X est T_4 ou **normal** s'il est T_1 et vérifie en plus la propriété ($\widetilde{T}_4$): si A, B sont des fermés disjoints dans X, il existe des ouverts O_A, O_B disjoints contenant respectivement A et B.

1. Étudier les différentes relations d'implication entre les axiomes T_0, T_1, T_2,($\widetilde{T}_3$) et ($\widetilde{T}_4$) (donner des contrexemples s'il n'y a pas de relation d'implication; ne pas comparer ($\widetilde{T}_3$) et ($\widetilde{T}_4$)). Montrer qu'il existe des espaces qui ne satisfont aucun de ces axiomes et des espaces les satisfaisant.

2. Montrer qu'un espace X est (T_1) si et seulement si les points de X sont fermés. Montrer que si X est régulier, alors X est séparé. Montrer qu'un espace normal (*i.e.* (T_4)) est régulier (*i.e.* (T_3)).

3. Montrer qu'un produit ΠX_i d'espaces non-vides est *régulier* si et seulement si chaque X_i est régulier et qu'un sous-espace d'un espace régulier est régulier.

4. Montrer qu'un espace compact est normal.

5. Montrer que si X contient un sous-ensemble dénombrable dense (*i.e.* est séparable) et un sous-ensemble discret fermé non-dénombrable, alors X n'est pas normal. En déduire que $(\mathbb{R}, \tau_{\text{lim sup}}) \times (\mathbb{R}, \tau_{\text{lim sup}})$ est régulier mais pas normal, où $(\mathbb{R}, \tau_{\text{lim sup}})$ est $\mathbb{R}$ de la topologie $\mathcal{T}_{\limsup}$ engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ et $]b, +\infty[$.

6. Montrer qu'un espace topologique X est $\widetilde{T}_4$ si et seulement si pour tout fermé A, B, il existe existe des ouverts $U_A \supset A$, $U_B \supset B$ tels que $\overline{U_A} \cap \overline{U_B} = \emptyset$

7. On munit le demi-plan $\overline{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, y \geq 0\}$ de la topologie engendrée par les ouverts euclidiens usuels sur $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, y > 0\}$ et pour tout z sur l'axe $y = 0$ et $\epsilon > 0$ par les ensembles $\{z\} \cup D_{z,\epsilon}$ où $D_{z,\epsilon}$ est le disque dans H de rayon ϵ, tangent en z à l'axe $y = 0$. Montrer que $\overline{H}$ muni de cette topologie est régulier, non-normal (on pourra considérer les ensembles $A = \{(x, 0), x \in \mathbb{Q}\}$ et $B = \{(x, 0),\, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$.)

8. Terminer la comparaison entre les différents axiomes de séparation.

Solution 8. 1. Il est évident que $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$. D'après le cours, un espace métrique est régulier et normal. L'ensemble $\{0, 1\}$ muni de la topologie grossière n'est pas T_0. Les topolgoie droites associés à des ensembles (partielleent) ordonné donnent des exemples d'espaces (T_0) non (T_1); mais il y a plus simple: on peut simplement regarder $X = \{1, 2\}$ avec la topologie donnée par les ouverts $\emptyset, X, \{1\}$.

Un ensemble infini X muni de la topologie des cofinis (*i.e.* les fermés sont finis ou X entier) est T_1 mais pas T_2 (ni $\widetilde{T}_3$, $\widetilde{T}_4$) puisque deux ouverts non-vides ne sont jamais disjoints. Soit X, Y deux ensembles de cardinal au moins 2, muni de la topologie grossière. Et soit $Z = X \cup Y$ muni de la topologie de l'union. Alors Z n'est pas (T_0) mais est ($\widetilde{T}_3$) et ($\widetilde{T}_4$). Exhibons un exemple d'espace séparé (*i.e.* (T_2)) qui ne soit pas $\widetilde{T}_3$. Prenons $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie dont les ouverts sont de la forme $U - B$ où U est un ouvert usuel de $\mathbb{R}$ et B est une partie (éventuellement vide) de $D = \{1/n\,,\, n \in \mathbb{N}^*\}$. On vérifie sans peine que cela définit bien une topologie plus fine que la topologie usuelle, en particulier elle vérifie (T_2). En revanche, l'ensemble $D = \{1/n\,,\, n \in \mathbb{N}^*\}$ est fermé dans cette topologie tout comme le singleton $\{0\}$, mais ils ne peuvent pas être séparé par des ouverts (un ouvert contenant D est un ouvert usuel). De même, cet espace ne vérifie pas $\widetilde{T}_4$.

Remarque: En particulier, l'axiome ($\widetilde{T}_3$) n'est pas conservé en passant à une topologie plus fine (car on crée plus de fermés) contrairement à (T_2).

2. Si $\{x\}$ et $\{y\}$ sont fermés et distincts, leurs complémentaires fournissent bien sur des ouverts satisfaisant l'axiome (T_1). Réciproquement, si X est (T_1) et $x \in X$, alors, $\{x\} = \bigcap_{F \ni x,\, F \text{ fermé}} F$ puisque pour tout $y \neq x$, il existe un fermé contenant x et pas y (par exemple $X - U_y$). Donc $\{x\}$ est fermé.

   Supposons que X est régulier et soit $x \neq y$ deux points de X. par l'axiome (T_0) il existe un ouvert U_x contenant x mais pas y (quitte à inverser les rôles de x et y). Par l'axiome $(\widetilde{T}_3)$, il existe des ouverts disjoints O_x, O_{X-U_x} avec $x \in O_x$ et $y \in X - U_x \subset O_{X-U_x}$. D'où X est séparé. alors X est séparé.

   Si X est normal, les points sont des fermés et l'axiome $(\widetilde{T}_4)$ implique alors trivialement l'axiome $(\widetilde{T}_3)$. Vu ci-dessus, un espace normal est donc séparé ce qui redonne la définition du cours.

3. Les propriétés demandées sont clairement vraies pour des espaces séparés. Soit $A \subset X$. Il est immédiat que A vérifie aussi l'axiome $(\widetilde{T}_3)$. Remarquons que chaque X_i est homéomorphe à un sous-espace du produit ΠX_i. Donc si, ce produit est régulier, chaque X_i l'est aussi.

   Remarquons que pour X séparé, X est régulier si et seulement si pour tout $x \in X$ et voisinage ouvert $U_x \ni x$, il existe un ouvert V_x tel que $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_x$. En effet, le sens direct découle de l'axiome $(\widetilde{T}_3)$ appliqué à x et au fermé $X - U_x$. Dans l'autre sens, si F est fermé et ne contient pas x, alors on applique l'hypothèse à x et à l'ouvert $X - F$ ce qui donne les ouverts V_x et $X - \overline{V_x}$ satisfaisant à $(\widetilde{T}_3)$.

   Si chaque X_i est régulier, il suffit de montrer que pour tout $x \in \Pi X_i$ et tout ouvert de base $U_x = \prod_{j \in J fini} U_j \times \prod_{i \notin J} X_i \in \Pi X_i$, il existe V_x vérifiant $x \in V_x \in \overline{V_x} \subset U_x$. En remarquant que $\overline{\Pi A_i} = \Pi \overline{A_i}$, il suffit de considérer $V_x = \prod_{j \in J} V_j \times \prod_{i \notin J} X_i$ où les V_j sont donnés par la régularité de chaque X_j.

4. Supposons que X est compact. On conseille de faire des petits dessins pour comprendre les différentes étapes du raisonnement suivant. Soit F_1 et F_2 deux fermés disjoints de X. Quel que soit $x \in F_1$ et $y \in F_2$ on peut trouver des ouverts disjoints $U_{x,y} \ni x$, $V_{y,x} \ni y$ car X est nécessairement séparé. Les $V_{y,x}$ recouvrent F_2 qui est fermé dans un compact donc compact. Par suite il existe il existe un nombre fini $V_{y_1,x}, \ldots V_{y_k,x}$ de tels ouverts recouvrant F_2. Mais alors $\mathbb{U}_x := \bigcap_{i=1}^k U_{x,y_i}$ est un ouvert contenant x et disjoint de de chaque $V_{y_i,x}$ donc de $\mathbb{V}_x := \bigcup_{i=1}^k U_{y_i,x}$. Ce dernier est un ouvert contenant F_2 par construction. Enfin, la réunion des $\mathbb{U}_x$ ercouvre F_1 qui est compact. Soit alors $\mathbb{U}_{x_1}, \ldots, \mathbb{U}_{x_m}$ un sous recouvrement fini et $\mathbb{U} := \bigcup_{j=1}^m \mathbb{U}_{x_j}$ qui est un ouvert contenant F_1. L'intersection finie $\bigcap_{j=1}^m \mathbb{V}_{x_j}$ est un ouvert qui contient F_2. Il est par construction disjoint de $\mathbb{U}$.

5. Soit D dénombrable dense dans X et F un sous-ensemble discret fermé non-dénombrable. Alors toute partie $S \subset F$ est fermée dans F et donc dans X. Par conséquent il existe des ouverts disjoints U_S et V_S dans X tels que $S \subset U_S$ et $F - S \subset V_S$. Par densité $D \cap U_S$ est non-vide. Si $S \neq T$ alors, par exemple $S \cap F - T \neq \emptyset$, d'où $V_T \cap U_S \neq \emptyset$ d'où par densité, $D \cap V_T \cap U_S \neq \emptyset$ et il suit que $D \cap U_T \neq D \cap U_S$. Par consśquent, l'application $S \mapsto U_S \cap D$ est une injection de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(D)$ ce qui est absurde pour des raisons de cardinalité.

   On peut munir $\mathbb{R}$ de la topologie dite de la limite sup: c'est à dire la topologie $\mathcal{T}_{\limsup}$ engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ et $]b, +\infty[$. On a que $(\mathbb{R}, \tau_{\text{lim sup}})$ est séparé. En effet, cette topologie est plus fine[12] que la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ car elle contient tout intervalle:

$$]a, b[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left( ]-\infty, b - \frac{1}{n}] \cap]a, +\infty[\right) \in \mathcal{T}_{\limsup}.$$

[12] on peut aussi montrer que cette topologie n'est pas métrisable

Montrons que cet espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\limsup})$ satisfait l'axiome $(\widetilde{T}_3)$. Soit F fermé et $x \notin F$. Soit $f = \limsup\{y \in F \,/\, y < x\}$. Comme F est fermé, $f \in F$ donc $f < x$. Il suit que $]f, x]$ est un ouvert contenant x et disjoint de $]-\infty, f]\cup]x, +\infty[$ qui est un ouvert qui contient F. Donc $(\mathbb{R}, \tau_{\text{lim sup}})$ est régulier. De la question **3**, on déduit que $(\mathbb{R}, \tau_{\text{lim sup}}) \times (\mathbb{R}, \tau_{\text{lim sup}})$ est également régulier. Montrons qu'il n'est pas normal. On applique bien entendu le critère ci-dessus. L'ensemble $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (pour la topologie $\tau_{\text{lim sup}} \times \tau_{\text{lim sup}}$ puisque $\mathbb{Q}$ rencontre tout intervalle $]a, b]$ et que ces derniers engendrent la topologie de la limite sup). Prenons alors $F = \{(x, -x),\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$. Il est clair que F n'est pas dénombrable et est fermé. De plus $]-\infty, x]\times]-\infty, -x]$ est un ouvert qui contient $(x, -x)$ et aucun autre point de la forme $(y, -y)$. Donc F est bien discret et vu ci-dessus, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ n'est pas normal pour la topologie $\tau_{\text{lim sup}} \times \tau_{\text{lim sup}}$.

Remarque: l'argument prouvant que $\mathbb{R}, \tau_{\text{lim sup}}$ est régulier, s'adapte facilement pour montrer que cet espace est en fait normal. L'exemple ci-dessus montre alors que le produit d'esapces normaux n'est pas nécéssairement normal. De même un sous-espace d'un espace normal n'est pas nécéssairement normal (sauf s'il est aussi fermé).

6. La réciproque est triviale. Soient des fermés disjoints A et B. X normal implique qu'il existe des ouverts disjoints $U_A \supset A$, $U_B \supset B$. Or pour tout ouvert U contenant A, A et $X - U$ sont des fermés disjoints donc il existe V, W ouverts disjoints avec $V \supset A$ et $W \supset X - U$. En particulier V est inclus dans le fermé $X - W$ donc $\overline{V}$ aussi. On vietn de montrer que pour tout ouvert $U \supset A$ (A fermé), il existe un ouvert V tel que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Il suffit maintenant d'appliquer ce résultat aux ouverts disjoints U_A et U_B ci-dessus.

7. Il est clair que $\overline{H}$ est séparé (donc (T_0)). De plus tout disque fermé (au sens usuel) est un fermé pour cette topologie. Il suit facilement que, $\overline{H}$ muni de cette topologie satisfait à la propriété suivante: pour tout ouvert 0 et tout $x \in O$, il existe un ouvert U_x tel que $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset O$. Cette dernière propriété entraine l'axiome $(\widetilde{T}_3)$, en prenant, pour tout fermé F et $x \notin F$, l'ouvert $O = \overline{H} - F$ (de même que dans la question **3)**). Il suit que $\overline{H}$ muni de cette topologie est régulier.

   Les ensembles $A = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{Q}\}$ et $B = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$ sont fermés (il est en fait clair que toute partie de l'axe $y = 0$ a son complémentaire ouvert, donc est fermée). Soit O_A et O_B deux ouverts contenant respectivement A et B. On va montrer que $O_A \cap O_B \neq \emptyset$ ce qui montrera que $\overline{H}$ n'est pas normal. Quel que soit x dans B, il existe un disque ouvert D_{x,ϵ_x} inclus dans O_B. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B_n := \{x \in B \,/\, \epsilon_x \geq 1/n\}$. Supposons avoir montré qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et un intervalle ouvert I tel,que tout sous-intervalle ouvert de I intersecte B_n. Alors tout point de I est limite d'éléments de B_n (au sens de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$). Soit r un rationnel dans I et D_{r,ϵ_r} un disque ouvert inclus dans O_A. Alors pour $x \in B_n$ suffisament proche de r, tout disque D_{x,ϵ_x} coupe D_{r,ϵ_r} puisque $\epsilon_x > 1/n$. En particulier $O_A \cap O_B \neq \emptyset$.

   Il ne reste plus qu'à montrer En particulier il existe un rationnel $r \in I$ qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et un intervalle ouvert I tel,que tout sous-intervalle ouvert de I intersecte B_n. Raisonons par l'absurde, et supposons avoir ordonné les rationnels sous la forme $a_0, a_1, \ldots$.... On peut alors contruire par récurence une suite décroissante d'intervalles fermés d'intérieur non vide I_n vérifiant, $a_n \notin I_n$ et $B_n \cap I_n = \emptyset$. Par le théorème des fermés emboités, il existe un réel $b \in \bigcap I_n$, qui par construction n'est pas dans $\mathbb{Q}$. Mais alors, $(b, 0) \in B$ et donc appartient à B_n pour un certain n ce qui est absurde !

8. On a montré aux questions **1)** et **4)** (ou**6)** au choix) que l'axiome $(\widetilde{T}_3)$ n'implique pas $(\widetilde{T}_4)$ et que ces axiomes sont indépendants des axiomes $(T_{i\leq 2})$. On a en revanche vu que $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$, les réciproques étant fausses. Il reste à montrer que $(\widetilde{T}_4)$ n'implique pas $(\widetilde{T}_3)$ pour montrer que ces deux derniers axiomes sont indépendants.

   Par exemple soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ muni de la topologie dont les ouverts sont

$$X, \emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3\}, \{2\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}, \{4\}.$$

On vérifie sans mal que les ouverts ci-dessus forment bien une topologie satisfaisaint l'axiome $(\widetilde{T}_4)$. En revanche le seul ouvert contenant le fermé $\{1,4,5\}$ est X ce qui contredit l'axiome $(\widetilde{T}_3)$. On peut remarquer que X est T_0 (mais évidemment pas T_1).

Exercice 9 (Un exemple de limite d'espaces discrets). Soit p un nombre premier et $\pi_{n\leqslant m} : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ la projection canonique obtenue en prenant les classes modulo p^n (n, m sont des entiers). Chaque $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est muni de la topologie discrète. On note $\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ l'espace topologique limite des $\pi_{n\leq m}$.

Démontrer que $\mathbb{Z}_p$ s'identifie au sous-ensemble

$$\varprojlim \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} := \{(x_m)_{m\geq 0} \text{ tels que } \pi_{n,m}(x_m) = x_n\} \subset \prod_{m\geq 0} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$$

muni de la topologie la *moins fine* qui rende les applications canoniques[13] $\varprojlim \mathbb{Z}/p^m \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ continues.

1. Montrer que $\varprojlim \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ s'identifie avec un sous-espace fermé du sous-espace topologique $\prod_{m\geq 0} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$. Déterminer la propriété universelle de $\varprojlim \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$[14]. Un produit d'espaces discret est-il discret ?

2. Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est un espace normal.

Solution 9. Par construction on a $\pi_{n\leq m} \circ \pi_{m\leq p} = \pi_{n\leq p}$ ce qui assure que le système est bien équivalent à celui de la tour $\cdots \to \mathbb{Z}/p^m Z \to \mathbb{Z}/p^{m-1}\mathbb{Z} \to \ldots \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Il suit aussi que $\mathbb{Z}_p \subset \Pi_{n\geq 1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est le sous-espace topologique des suites $(x_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{n\geq 1}$ vérifiant $\pi_{n-1\leq n}(x_n) = x_{n-1}$ pour tout $n > 1$. Pour vérifier que ce sous-espace est fermé, il suffit de vérifier le critère séquentiel puisque le produit dénombrable d'espaces métriques (ici les discrets $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$) est métrisable. Cette dernière vérification est triviale. On pourra consulter le poly ou reprendre les raisonnements des exercices 1 et 2 pour vérifier que $\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ est l'unique espace topologique Y muni d'applications $f_n : Y \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ tel que pour tout espace Z muni d'applications $\rho_n : Z \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ vérifiant $\pi_{n\leq m} \circ \rho_m = \rho_n$, il existe une unique application $\theta : Z \to Y$ vérifiant $f_n \circ \theta = \rho_n$. Il est clair qu'un produit non-fini d'espaces discret de cardinal au moins 2 n'est pas discret (il suffit de regarder un ouvert élémentaire pour se convaincre que les singletons ne sont pas ouverts dans un tel produit).

   Un produit d'espaces discrets n'est pas discret en général, sauf si c'est un produit fini. Sinon prenons $\prod_{\mathbb{N}}\{1,2\}$. Alors le sous ensemble $\prod_{n\in\mathbb{N}}\{1\}$ (qui est u point) n'est pas ouvert pour la topologie produit. Ce n'est donc pas une topologie discrète.

2. Précisons qu'un produit d'espaces normaux n'est pas normal en général (pas plus qu'un sous-espace d'un espace normal sauf s'il est fermé ce qui est le cas de $\mathbb{Z}_p$). En revanche on sait que tout espace métrisable est normal. Il suffit donc de montrer que $\Pi_{n\geq 1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est métrisable (ce sera alors le cas de tout sous-espace de ce produit). Mais chaque $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est discret, donc métrisable, et un produit dénombrables d'espaces métrisables est toujours métrisable d'après le cours (rappelons que, si d_n est une distance sur X_n induisant la topologie, alors $d(x,y) = \sum_{n\geq 0} 2^{-n} \max\big(1, d_n(x_n, y_n)\big)$ est une distance sur $\Pi_{n\geq 0}X_n$ qui induit la topologie produit).

[13] données, pour tout m, par $(x_i) \mapsto x_m$

[14] c'est à dire une propriété décrivant cet espace comme l'unique espace topologique associé à des diagrammes similaires à ceux des exercices 1 et 2

Exercice 10 (Un exemple de limite d'espaces discrets). Soit p un nombre premier et $\pi_{n\leqslant m} : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ la projection canonique obtenue en prenant les classes modulo p^n (n, m sont des entiers). Chaque $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est muni de la topologie discrète. On note $\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ l'espace topologique limite des $\pi_{n\leq m}$.

Démontrer que $\mathbb{Z}_p$ s'identifie au sous-ensemble

$$\varprojlim \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} := \{(x_m)_{m\geq 0} \text{ tels que } \pi_{n,m}(x_m) = x_n\} \subset \prod_{m\geq 0} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$$

muni de la topologie la *moins fine* qui rende les applications canoniques[15] $\varprojlim \mathbb{Z}/p^m \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ continues.

1. Montrer que $\varprojlim \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ s'identifie avec un sous-espace fermé du sous-espace topologique $\prod_{m\geq 0} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$. Déterminer la propriété universelle de $\varprojlim \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$[16]. Un produit d'espaces discret est-il discret ?

2. Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est un espace normal.

[15] données, pour tout m, par $(x_i) \mapsto x_m$

[16] c'est à dire une propriété décrivant cet espace comme l'unique espace topologique associé à des diagrammes similaires à ceux des exercices 1 et 2