Équivalences d'homotopie et exemples de catégories

Exercice 1 (Graphes et arbres). On appelle graphe un espace topologique non-vide obtenu en recollant[1] un ensemble G^1 d'intervalles $[0,1]$ sur un ensemble G^0 de points vu comme un space discret, les recollements se faisant en identifiant les extrémités des intervalles à des points de G^0. et arbre un graphe connexe qui n'admet pas de lacets.

1. Montrer qu'un arbre T est contractile et est un rétracte par déformation de n'importe quel sommet (indication: commencer par le faire pour un arbre fini. Puis, si T' est un sous-graphe contractile de T et $\gamma : [0,1] \to T$ est une arête telle que $\gamma(0) \in T'$ et $\gamma(1) \in T - T'$, montrer que l'on peut étendre l'homotopie entre T et un de ses sommets à $T \cup_{\gamma(0)} \gamma$.)

2. Montrer que tout graphe admet des sous-arbres maximaux (indication: utiliser le lemme de Zorn). Combien y-a-t-il de chemins entre 2 sommets d'un arbre ?

3. Soit G un graphe *connexe* et T un sous-arbre maximal. On note $q : G \to G/T$ la projection sur le quotient. Montrer que G/T est homéomorphe à un bouquet de cercles: c'est à dire l'espace quotient $\left(\coprod S^1\right)\Big/ \sim$ où $\sim$ est la relation déquivalence qui identifie tous les points base des différents cercles (on choisit, arbitrairement, un point base sur chaque cercle).

4. Construire une section $r : G/T \to G$ de q (Indication: fixer un sommet v_0 dans T et pour toute arete γ dans $G \setminus T$, considérer l'application $t \mapsto c_{\gamma(1)}^{-1} \circ \gamma \circ c_{\gamma(0)}$ où, pour tout sommet $v \in G$, $c_v : [0, 1/3] \to T$ est une paramétrisation d'un chemin de v_0 à v, c_v^{-1} est le chemin paramétré dans l'autre sens et $\gamma : [1/3, 2/3] \to G$ une paramétrisation de l'arête γ).

5. Montrer que $G \to G/T$ est une équivalence d'homotopie. En déduire qu'un graphe est contractile si et seulement si c'est un arbre.

Solution 1. Notons G^1 l'ensemble des arètes du graphe et pour $e \in G^1$, notons $f_e : \{0,1\} \to G$ l'application identifiant les origines du segment avec des points de G_0 (on notera aussi $s(e) = f_e(0) \in G^0$, $t(e) = f_e(1)$ les sources et but de e). On a alors que

$$G = \coprod_{e \in G^1} I \bigcup_{\coprod_{G^1}\{0,1\}} G^0.$$

Par définition f_e s'étend en une application de $[0,1]$ G qui envoie $[0,1]$ sur l'arète e; notons que la restriction de cette extension f_e à $]0,1[$ est un homéomorphisme.

On commence par la remarque suivante: soit a une arète de G. Alors l'espace quotient G/a obtenu en identifiant tous les points de a avec le sommet source de a est encore un graphe (i.e. la relation d'équivalence est engendrée par $(t \sim s(a))$ pour tout $t \in a$ où $s(a)$ est l'image de 0 par l'application envoyant $[0,1]$ sur son image dans le graphe (c'est en particulier un sommet de G). Pour voir que c'est un graphe il suffit de remarquer que

$$G' = \big(\big(\coprod_{e \in G^1 \setminus \{a\}} I\big) \coprod I\big) \bigcup_{\coprod_{G^1}\{0,1\}} G^0/(f_a(t) \sim s(a)) \cong \big(\coprod_{e \in G^1 \setminus \{a\}} I\big) \bigcup_{\coprod_{G^1 \setminus \{a\}}\{0,1\}} (G_0/(s(a) \sim t(a))). \tag{0.1}$$

[1] c'est à dire par la topologie quotient donc

1. Soit s un sommet. Supposons pour commencer que l'arbe est fini (ce n'est pas nécessaire pour le reste de la preuve mais seulement à but pédagogique). Soit a un arète à distance (en termes de nombres de sommets à traverser avant d'atteindre cette arète) maximale du sommet. On peut alors contracter cette arète pour avoir un rétracte par déformation entre G et G/a. En effet on a l'application quotient $r : G \to G/a$ d'un côté et de l'autre de l'inclusion i des arètes de G/a dabs G donné par l'application induite par $\coprod_{e\in G^1\setminus\{a\}} I \xrightarrow{\coprod f_e} G$ qui passe effectivement au pushforward définissant G en envoyant la classe correspondant $[s(a)] = [t(a)]$ sur $s(a) \in G$ via l'identification (0.1). Essentiellement cette application prend le graphe G/a et l'inclus dans G en évitant l'arète a qui a été totalement identifiée à sa source. Cette application est bien définie car a est à distance maximale. En particulier son sommet de fin $t(a)$ n'est relié à aucune autre arète (sinon, il y aurait 2 chemins de longueur maximum distinct reliant cette extrémité à s et on aurait donc un lacet). On a $r \circ i = id_{G/a}$ et soit $H : G \times [0,1] \to G$ l'application qui est l'identité sur l'image de $\coprod_{e\in G^1\setminus\{a\}} I$ et qui est définie sur l'image $f_a([0,1])$ de l'arète a par $H(f_a(t), u) = f_a(tu)$. La maximalité de a garantit que cette application est bien définie et continue. On a alors que $H(-,1) = id_G$ et $H(-,0) = i \circ r$.

   En itérant le procédé, on peut contracter le graphe en un temps fini sur s.

   Soit maintenant un arbre quelconque et s un sommet. On a une projection évidente sur le sommet et une inclusion évidente du sommet dans l'arbre. Soit $e \in G^1$ une arète. Alors il existe un unique chemin rejoignant e à s et passant une et une seule fois par une arète/sommet. En effet, sinon, on aurait un lacet (on laisse la preuve au lecteur). On note ce chemin $e_1, \dots e_k = e$. Soit alors $f_e := \bigcup_{i=1}^k f_{e_i} : \bigcup [0,1] \cong [0,k] \to G$ l'application continue donnée par les projections canoniques des intervalles dans le quotient définissant G. On pose, pour tout $x = f_e(t) \in e_k$, $H(x,t) = f(tx)$. On obtient alors une application continue $H : G \times [0,1] \to G$ qui vaut l'identité en $t = 1$ et est a projection sur s en 0. Cette application est continue par construction de la topologie quotient et unicité du chemin.

2. Il suffit de mettre un ordre partiel sur les arbres en disant qu'un arbre T est plus petit que T' si les sommets de T' sont inclus dans ceux de T. On a par définition d'un arbre qu'entre deux sommets, il y a un unique chemin.

3. On remarque si e est une arète de G/T alors $s(e) = t(e)$. En effet, sinon la préimage de e dans G contient T et une arète supplémentaire qui ne crée pas de lacets (sinon les sources et but seraient reliées à des sommets de T et donc leur image dans le quotient serait le même point). Par connexité de G et donc de G/T, il suit qu'il n'y a qu'un seul sommet dans G/T. Ainsi, G/T est un quotient de $\coprod [0,1]$ où chaque point $0, 1$ de chaque composante a été identifié avec le même point. C'est donc le même espace quotient que $\coprod [0,1]/(0 \sim 1)$ où on identifie le point base de chaque $S^1 \cong [0,1]/(0 \sim 1)$ ensemble. C'est à dire un bouqet de cercle.

4. Soit un sommet v_0 dans T. On définit $r([T]) = v_0$. Soit maintenant γ une arète dans $G \setminus T$, correspondant donc à une unique arète $[\gamma] \in G/T$. Cette arète relie deux sommets $f_\gamma(0) = s(\gamma)$ et $f_\gamma(1) = t(\gamma)$ de T. Pour ces sommets nous avons deux chemins continus $c_{t(\gamma)}, c_{s(\gamma)} : [0,1] \to T \subset G$ reliant v_0 à respectivement $t(\gamma)$ et $s(\gamma)$. On définit la composition des chemins $c_{s(\gamma)} \star f_\gamma \star c_{t(\gamma)}^{-1}$, c'est à dire l'application continue de $(0,1] \to G$ définie par $t \mapsto c_{s(\gamma)}(3t)$ pour $t \in [0,1/3]$, $t \mapsto f_\gamma(3t-1)$ pour $t \in [1/3, 2/3]$ et enfin $t \mapsto c_{t(\gamma)}(3-3t)$ pour $t \in [2/3, 1]$. Ce chemin est continu par construction et par alleurs, l'appplication ainsi construite est bien continue de $G/T \to G$ (il suffit de vérifier que l'application induite $G \to G$ obtenue en envoyant T identiquement sur s_0 et via les $c_{s(\gamma)} \star f_\gamma \star c_{t(\gamma)}^{-1}$ pour les autres arètes est bien continue ce qui est immédiat car elle l'est sur chaque cellule et est compatible aux extrémités).

5. En notant $p : G \to G/T$ l'application quotient, il suffit de voir que $r \circ p \simeq id_G$ et $p \circ r \simeq id_{G/T}$. Par construction, pour toute arète $[\gamma] \in G/T$, la composée $p \circ r(f_{[\gamma]})(t) = 1 \star [\gamma] \star 1$ est donnée par l'application constante valant $[T]$ sur $[0,1/3]$, $[2/3,1]$, et $t \mapsto [\gamma](3t-1)$ pour $t \in [1/3, 2/3]$. On a

alors une homotopie évidente $H(f_{(\gamma]}(t),u)$ qui est constante égale à $[T]$ sur $[0,u/3]$, $[(3-u)/3,1]$, et $t\mapsto[\gamma](\frac{3t-u}{3-2u})$ pour $t\in[u/3,(3-u)/3]$. Cette application est continue (par propriété universelle du quotient) et vérifie que $H(x,0)=x$ et $H(x,1)=p\circ r(x)$ dans G/T. On a notre première homotopie. Il reste à construire la dernière. On définit K sur $T\times[0,1]$ comme l'homotopie entre la projection sur s_0 et l'identité de l'arbre T (par exemple obtenue dans les premières questions): $K(y,1)=s_0$ et $K(y,0)=y$. Il faut maintenant étendre K à G. Soit γ une arète dans $G\setminus T$. On définit $K(f_\gamma(t),u)$ comme l'application qui vaut $c_{s(\gamma)}(3t+1-u))$ pour $t\in[0,u/3]$, $c_{t(\gamma)}(1-u+3-3t)$ pour $t\in[(3-u)/3,1]$ et enfin $f_\gamma(\dfrac{3t}{3-2u}-\dfrac{u}{3-2u})$ pour $t\in[u/3,(3-u)/3]$. On a alors bien que $K(f_\gamma(t),0)=f_\gamma(t)$ et $K(-,1)=r\circ p$.

On a bien montré que G et G/T sont homotopes. Comme un bouquet de cercles n'est pas contractile (sauf s'il n'y a aucun cercle,) car par exemple on a une factorisation de l'identité $S^1\hookrightarrow\coprod S^1/\sim\to S^1$ (où la dernière flèche est l'identité sur chaque composante), on en déduit que G/T n'est contractile que si c'est un point, c'est à dire si G est un arbre. La réciproque a été vue avant.

Autour du degré et groupe fondamental

Exercice 2. (**Relèvement des angles et degré**) On identifie S^1 avec $\{z\in\mathbb{C},|z|=1\}$. Soit $P(S^1):=\{f:[0,1]\to S^1,\, f \text{ continue}\}$ l'ensemble des applications continues de l'intervalle dans le cercle unité $S^1\subset\mathbb{C}$ et $P(\mathbb{R}):=\{f:[0,1]\to S^1,\, f \text{ continue}\}$ l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle dans $\mathbb{R}$. On munit $P(\mathbb{R})$ et $P(S^1)$ de la topologie de la convergence uniforme.

1. Montrer que les structures de groupe naturelle de $(S^1;\cdot)$ et $(\mathbb{R},+)$ font de $P(S^1)$ et $P(\mathbb{R})$ des groupes topologiques (où la multiplication est ponctuelle).

2. Montrer que l'exponentielle $t\mapsto\exp(2i\pi t)$ induit un morphisme de groupes topologiques $P(\mathbb{R})\xrightarrow{e}P(S^1)$ dont l'image est ouverte.

3. Montrer que $P(S^1)$ est connexe et en déduire le théorème de relèvement des angles.

4. Soit $f:S^1\to S^1$ une application continue et $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, un relèvement de $\tilde f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong S^1\xrightarrow{f}S^1$ obtenu par la question précédente: $\tilde f=\exp(2i\pi\theta)$. On appelle **degré de** f l'entier $\deg(f):=\theta(1)-\theta(0)$.
   (a) Démontrer que le degré de f est indépendant du choix de θ.
   (b) Démontrer que si f est homotope à g, alors $\deg(f)=\deg(g)$.

5. **(Additivité du degré)** Soient $f,g:S^1\to S^1$ deux applications continues telles que $f(1)=g(1)$. On a le produit ponctuel $(fg)(t)=f(t)g(t)$ de la question 1 et on note $f\star g$ le produit induit par la composition des lacets: $f\star g(t)=f(t^2)$ si $\operatorname{Im}t\geq 0$ et $f\star g(t)=g(t^2)$ si $\operatorname{Im}t\leq 0$ ("dessiner" ce produit et se convaincre qu'il ne s'agit que de la composition de lacets).
   (a) Montrer que fg et $f\star g$ sont continues, homotopes mais distinctes en général (indication: penser à utiliser l'unité).
   (b) Montrer que $\deg(fg)=\deg(f\star g)=\deg(f)+\deg(g)$.

6. En déduire que le degré induit un morphisme de groupes surjectif $deg:\pi_1(S^1,1)\to\mathbb{Z}$ puis démontrer que deg est un isomorphisme de groupes.

Exercice 3. (degré et points fixes) Soit S^1 le cercle unité de $\mathbb{C}$.

1. Montrer qu'une application continue $S^1\to S^1$ qui n'a pas de point fixe est homotope à l'identité.

2. En déduire que toute application de degré différent de 1 a un point fixe.

Exercice 4. (**Calcul du degré**) Soit $f : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ une application de classe C^1 et notons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\{0\}$ l'application définie par $g(\theta) = f(\exp(i\theta))$. Soit D le demi axe réel positif, c'est à dire la droite $D = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z > 0\}$. On suppose que pour tout $t \in S^1$ tel que $f(t) \in D$, f soit *transverse à* D à savoir que pour $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(i\theta) = t$ on a $\operatorname{Im} g'(\theta) \neq 0$. On dira que f coupe D positivement ou négativement en t suivant le signe[2] de $\operatorname{Im} g'(\theta)$ que l'on notera $\operatorname{sign}_t f$.

1. Montrer que l'ensemble $f^{-1}(D)$ est fini.
2. Soit t_1 et t_2 deux éléments de $f^{-1}(D)$ consécutifs sur le cercle. Notons $g_{t_1,t_2} : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un chemin fermé qui va de 1 à $f(t_1)$ dans D puis parcourt f entre t_1 et t_2 et revient à 1 dans D. Calculer son degré.
3. En déduire la formule: $\deg f = \sum_{t \in f^{-1}(D)} \operatorname{sign}_t f$.

Exemples de catégories et (co)limites

Exercice 5. Chercher des exemples de catégories et foncteurs. En construire de sorte que les ensembles de morphismes ne soient pas formés d'applications. Chercher des exemples d'équivalence de catégories et de transformations naturelles.

Exercice 6 ((co)limites dans Top Gp, Ab). On considère les catégories **Top** (resp. $\mathbf{Top}_*$) des espaces topologiques (resp. pointés).

1. Ces catégories ont elles des objets initiaux ou finaux ? Si oui, quels sont-ils ?
2. Montrer que **Top** admet toutes les (co)limites et identifier les produits, coproduits, et (co)produits fibrés explicitement.
3. Identifier, s'ils existent les (co)produits et (co)produits fibrés de $\mathbf{Top}_*$.
4. Montrer que le produit et le coproduit existe dans **Ab** et qu'ils sont isomorphes.
5. Montrer que le produit et le coproduit existent dans **Gp** et les déterminer explicitement. On vérifiera qu'ils sont non-isomorphes.
6. En déduire que le produit de 2 groupes abéliens est le même si on le prend dans **Ab** ou **Gp** mais, qu'en revanche, le coproduit de 2 groupes abéliens diffère selon qu'on le prend dans **Ab** ou **Gp**.

Solution 2. Rappelons qu'un objet $c \in \mathcal{C}$ est initial si pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, on a $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(c, X) \cong \{*\}$, autrement dit il existe un unique morphisme de l'objet vers tout autre objet. Un objet final est le contraire. Il est facile de voir que ces objets sont uniques à isomorphismes près s'ils existent.

1. Le vide $\emptyset$ est initial dans **Top** et le point $\{*\}$ est final dans **Top**. Dans $\mathbf{Top}_*$, le point $\{*\}$ est final et initial à la fois.
2. On renvoie au cours pour plus de détails. L'idée est la suivante: soit $D := ((X_i)_{i \in I}, (f^k_{i,j})_{i,j \in I, k \in S_{i,j}})$ un diagramme d'espaces topologiques (où les $f^j_{ij} : X_i \to X_j$ sont une collection (possiblement vide) d'applications continues.

   on peut considérer par la suite des limites indicées par des ensembles partiellement ordonnés pour simplifier plutôt que par des petites catégories.

[2] autrement dit selon que D coupe la courbe suivant le sens trigonométrique ou non

Une limite de D est un espace topologique $\lim D$ muni d'applications continues $g_i : \lim D \to X_i$ qui rendent le diagramme ainsi obtenu en rajoutant les g_i à D commutatif et vérifiant la *propriété universelle* suivante: pour tout espace topologique Z muni d'applications continues $(h_i : Z \to X_i)_{i\in I}$ rendant commutatif le diagrame obtenu en les rajoutant à D, il existe une *unique* application continue $\tilde{h} : Z \to \lim D$ qui rende le diagramme ainsi obtenu commutatif !

Une colimite $colim\, D$ est l'objet "dual": c'est un espace topologique $colim\, D$ muni d'applications continues $\phi_i : X_i \to colim\, D$ qui rendent le diagramme ainsi obtenu en les rajoutant à D commutatif et vérifiant la *propriété universelle* suivante: pour tout espace topologique W muni d'applications continues $(h_i : X_i \to W)_{i\in I}$ rendant commutatif le diagrame obtenu en les rajoutant à D, il existe une *unique* application continue $\tilde{h} : colim\, D \to W$ qui rende le diagramme ainsi obtenu commutatif !

De tels espaces topologiques sont unique à homéomorphisme près comme vu en cours pour la topologie produit, coproduit, quotient etc....

Pour vérifier leur existence, on définit $\lim D$ comme le sous-espace topologique

$$\{(x_i)_{i\in I}, \forall i, j \in I, \forall k \in S_{i_j}, f^k_{i,j}(x_i) = x_j\}$$

du produit $\prod_{i\in I} X_i$ (cet espace peut être vide...). De même la colimite est le quotient de $\coprod_{i\in I} X_i$ par la relation identifiant $f^k_{i,j}(x_i) \sim x_j$ pour tous les indices possibles.

Les propriétés de la topologie produit et quotient permettent de vérifier la propriété universelle facilement.

On vérifie que dans les cas particuliers des produits et coproduits (co)cartésiens on obtient la définition vue en cours.

3. L'idée est de voir que les limites ne sont pas modifiées. En effet, si $(X_i, *_i)$ sont des espaes pointés, alors le point $(*_i)_{i\in I}$ est un point base canonique dans $\lim D$ pour tout diagrame dont les applications sont pointées. En revanche le coproduit est modifié: On vérifie facilement que $\coprod(X_i, *_i) \cong \bigvee X_i := \coprod X_i/(*_i \sim *_j)$.

4. On va montrer que la somme directe $A \oplus B$ vérifie les propriétes universelles du produit et du coproduit. Ce qui terminera la question. Soit $p_A : A \oplus B \to A$, $p_B : A \oplus B \to B$ les applications $(a, b) \mapsto a$ et $(a, b) \mapsto b$. Ce sont clairement des morphismes de groupes abéliens. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
C \arrow[urr, "f_A"] \arrow[r, dotted, "\phi"] \arrow[drr, "f_B"'] & A \oplus B \arrow[ur, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Il faut montrer que ϕ, rendant le diagramme commutatif, existe et est unique. Par définition une telle application ϕ est donnée, pour tout $c \in C$, par $\phi(c) = (\alpha(c), \beta(c)) \in A \oplus B$ (c'est déjà vrai pour toute application ensembliste !). Mais alors $\alpha(c) = p_A(\phi(c))$, $\beta(c) = p_B(\phi(c))$. Donc $\phi = (f_A, f_B)$ et Phi est unique si elle existe. Il reste à montrer que cette application $\phi = (f_A, f_B)$ est bien un morphisme de groupes ce qui est aisé. Donc $A \oplus B \cong A \prod B$.

Passons au coproduit. Il y a des morphismes de groupes évidents $i_A : A \to A \oplus B$, $i_B : B \to A \oplus B$

définis par $a \mapsto (a,0)$ et $b \mapsto (0,b)$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, "f_A"] & & \\
& A \oplus B \arrow[r, dotted, "\phi"] & C \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, "f_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

Il faut montrer que ϕ, rendant le diagramme commutatif, existe et est unique. Or pour tout (a,b) on a $(a,b) = (a,0) + (0,b) = i_A(a) + i_B(b)$. Il en découle que si Φ existe, nécéssairement, on a $\Phi((a,b)) = f_A(a) + f_B(b)$. Cette formule donne bien un morphisme de groupe car

$$f_A(a+a') + f_B(b+b') = f_A(a) + f_A(a') + f_B(b) + f_B(b') = f_A(a) + f_B(b) + f_A(a') + f_B(b')$$

ce qui donne $\phi((a,b)+(a',b')) = \phi((a,b)) + \phi((a',b'))$. Notons que la formule ci-dessous, bien que triviale, n'est valable que parceque C est commutatif (on utilise $f_A(a') + f_B(b) = f_B(b) + f_A(a')$). En particulier si C est un groupe dans lequel $f_A(A)$ et $f_B(B)$ ne commutent pas, alors Φ ne peut pas exister.

5. D'aprés la fin de la question **(4)** ci-dessus, la somme directe $A \times B$ ne peut pas être le coproduit. C'est cependant bien le produit; par une démonstration analogue à ci-dessus. il convient peut-être de rappeler que $A \times B$ est l'ensemble $A \times B = \{(a,b),\ a \in A, b \in B\}$ muni de la mutliplication $(a,b) * (a',b') = (aa', bb')$. On dit parfois dans la littérature que $A \times B$ est le produit direct (au lieu de somme directe ou juste produit). On va montrer que le coproduit de A et de B est le "produit libre" $A * B$, cf la remarque 1 ci-dessous. On note encore j_A, j_B les morphismes de groupes canoniques $A \to A * B$, $B \to A * B$. Soit maintenant $f_A : A \to C$, $f_B : B_toC$ deux morphismes de groupes. On veut montrer l'existence et l'unicité de ϕ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "j_A"'] \arrow[drr, "f_A"] & & \\
& A * B \arrow[r, dotted, "\phi"] & C \\
B \arrow[ur, "j_B"] \arrow[urr, "f_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

Soit $x \in A * B$; il s'écrit sous la forme (unique si on impose les conditions (0.2) de la remarque) d'un produit $x = j_A(a_1).j_B(b_1).\ldots.j_A(a_n).j_B(b_n)$; d'où

$$\phi(x) = \phi\big(i_A(a_1).i_B(b_1).\ldots.i_A(a_n).i_B(b_n)\big) = f_A(a_1).f_B(b_1)\ldots f_A(a_n).f_B(b_n)$$

puisque ce doit être un morphisme de groupes. Ceci donne l'unicité. Il est de plus évident que ϕ ainsi défini est un morphisme de groupes, ce qui donne l'existence. Le groupe ainsi obtenu n'est aps isomorphe à $A \times B$ (sinon ce dernier vérifierait la prorpiété universelle d'un coproduit).

6. D'aprés le (4) le coproduit de deux groupes abéliens est la somme directe si on le prend dans la catégorie des groupes abéliens. En revanche si on le prend dans la catégorie des groupes on trouve $A * B$ qui n'est pas isomorphe à $A \oplus B$ et n'est d'ailleurs pas abélien (sauf si A ou B est trivial)! En revanche, si A et B sont abéliens, il existe une unique application $A * B \to A \oplus B$

rendant commutatif le diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "j_A"'] \arrow[dr, "i_A"] \arrow[drr, "f_A"] & & \\
A * B \arrow[r] & A \oplus B \arrow[r, dotted, "\exists!\phi"] & C \\
B \arrow[u, "j_B"] \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, "f_B"'] & &
\end{tikzcd}
$$

où C est un groupe abélien.

Remarque 1. Soit A, B deux groupes. On peut former leur produit libre $A * B$. Le moyen le plus élégant pour définir ce groupe est par le moyen de générateurs et relations. Soit $(S_A, \mathcal{R}_A)$ un système de générateurs et relations de A et $(S_B, \mathcal{R}_B)$ un système de générateurs et relations de B; Alors $A * B$ est le groupe présenté par $\left(S_A \coprod S_B, \mathcal{R}_A \coprod \mathcal{R}_B\right)$, c'est à dire par l'union disjointe des générateurs de A et de B, modulo les relations de A et B. De cette manière l'application $j_A : A \to A * B$ définie comme l'identité sur les générateurs envoieé videmment les relations de A sur 1; donc induit un morphisme de groupes canonique. De même on obtient un morphisme canonique $j_B : B \to A * B$. Evidemment cette présentation nécessite de connaitre le groupes libres sur un ensemble. On peut prouver que le groupe $A * B$ ainsi construit est l'ensemble des symboles $a_1 b_1 \dots a_n b_n$ où n est un entier naturel non nul quelconque et

$$a_{i>1} \in A - \{1_A\}, \quad \text{et} \quad b_{i \leq n-1} \in B - \{1_B\}; \quad a_1 \in A, b_n \in B. \tag{0.2}$$

On définit $a_1 b_1 * a'_1 b'_2$ comme le symbole $a_1 b_1 a'_1 b'_1$ si $b_1 \neq 1_B$ et $a_1 \neq 1_A$. Si $b_1 = 1_B$, on définit $a_1 b_1 * a'_1 b'_2$ comme le symbole $(a_1 a'_1) b_1$ (où on a appliqué le produit dans A dans la parenthèse). De même si $a'_1 = 1_A$, on dféinit $a_1 b_1 * a'_1 b'_2$ comme le symbole $a_1 (b_1 b'_1)$. On remarque que si $a'_1 = 1_A$ et$b_1 = 1_B$, les deux écritures défintions donnent bien le même symbole. En itérant cette construction on définit un produit $a_1 b_1 \dots a_n b_n * a'_1 b'_1 \dots a'_m b'_m$ en multipliant d'abord les termes $a_n b_n, a'_1 b'_1$ suivant la règle ci-dessus puis en continuant d'appliquer les règles ci-desus si le symbole obtenu commence par un 1_A ou se termine par un 1_B. En un nombre fini d'étapes on obtient un un symbole uniquement défini vérifiant les conditions (0.2). Plus précisément on a :

$$a_1 b_1 \dots a_n b_n * a'_1 b'_1 \dots a'_m b'_m := (\dots (a_1 b_1 * \dots (a_{n-1} b_{n-1} * (a_n b_n * a'_1 b'_1) * a'_2 b'_2)) * \dots a'_m b'_m) \dots).$$

Il n'est pas très dur de vérifier que cette multiplication est associative, que le symbole $1_A 1_B$ est l'unité et que l'inverse de $a_1 b_1 \dots a_n b_n$ existe et est donné par

$$
\begin{aligned}
(a_1 b_1 \dots a_n b_n)^{-1} &= 1_A b_n^{-1} a_n^{-1} \dots b_1^{-1} a_1^{-1} 1_B \text{ si } a_1 \neq 1_A \text{ et } b_n \neq 1_B \\
&= a_n^{-1} \dots b_1^{-1} a_1^{-1} 1_B \text{ si } a_1 \neq 1_B \text{ et } b_n = 1_B \\
&= 1_A b_n^{-1} a_n^{-1} \dots b_1^{-1} \text{ si } a_1 = 1_A \text{ et } b_n \neq 1_B \\
&= a_n^{-1} \dots b_1^{-1} \text{ si } a_1 = 1_A \text{ et } b_n = 1_B.
\end{aligned}
$$

Le groupe ainsi obtenu est $A*B$. Avec cette écriture, el morphisme canonique j_A est défini par $a \mapsto a1_B$ et j_B par $b \mapsto 1_A b$.

Le groupe ainsi obtenu est toujours très gros. Par exemple il est toujours infini sauf si un des deux groupes est trivial et le deuxième est fini. On peut remarquer que $\{e\} * B = B = B * \{e\}$. En particulier, $A * B$ est de cardinal toujours infini sauf si l'un des deux groupes est trivial et l'autre fini.

Exercice 7. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs unitaires.

(1) Montrer que $(a, b) \mapsto f(a)b$ munit B d'une structure de A-module.

(2) Montrer que f induit un foncteur naturel $Rf : B-\mathbf{mod} \to A-\mathbf{mod}$ tel que $R_f(B) = B$ muni de la structure de A-module donnée par **(1)**.

Solution 3. Cet exercice est la suite/le complément des exercices 1 de la feuille 1 et 3 de la feuille "0". Rappelons qu'un morphisme de modules n'est rien d'autre qu'un morphisme de groupes abéliens qui préserve l'action de l'anneau.

(1) Cette question est un résultat de cours. La linéarité à droite de la multiplication donne celle de $b \mapsto f(a)b$. Comme f est un morphisme d'anneaux on obtient sans peine

$$f(aa')b = (f(a)f(a'))b = f(a)(f(a')b), \quad f(a+a')b = f(a)b + f(a')b.$$

(2) Déjà, on doit associer à tout B-module M un A-module $R_f(M)$, c'est à dire un groupe abélien muni d'une action de A. Au vu de (**1**), on choisit $R_f(M) = M$ comme groupe abélien (et donc comme ensemble aussi). Il reste à définir la structure de A-module. On prend évidemment $(a, m) \mapsto f(a) \cdot m$ où $\cdot$ désigne l'action de B sur M. Comme en **(1)**; cela définit bien une action. Si $h : M \to N$ est un morphisme de B-module, c'est en particulier un morphisme de groupes abéliens. On prend $R_f(g) : R_f(M) \to R_f(N)$ comme étant égal à f vu comme un morphisme de groupes abéliens. Il est immédiat de vérifier que sa B-linéarité entraine sa A-linéarité pour l'action de A définie précédemment. On a aussi immédiatement $R_f(g \circ h) = R_f(g) \circ R_f(h)$ (cette propriété n'ayant rien à voir avec les actions d'anneaux d'ailleurs).

Solution 4. Par définition d'un morphisme de foncteur (aussi appelé transformation naturelle), on a qu'un élément h de $\mathrm{End}(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ est la donnée d'une famille de flèches $h_A : A \to A$ dans la catégorie $\mathcal{C}$ (pour tout objet $A \in \mathcal{C}$) vérifiant que quel que soit $A \xrightarrow{f} B$, le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_A"'] & B \arrow[d, "h_B"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} .$$

Rappelons qu'un morphisme de foncteur la composée de deux endormorphismes de foncteurs h, g est obtenue par composition des flèches h_A et g_A; c'est à dire $(g \circ h)_A = g_A \circ h_A$. En prenant $f = g_A$ dans le digramme précédent, on obtient immédiatement que $g_A \circ h_A = h_A \circ g_A$ pour tout objet A ce qui conclut l'exercice.

Exercice 8. (épimorphismes, monomorphismes et isomorphismes) On rappelle qu'un monomorphisme dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un morphisme $f : X \to Y$ tel que pour tout $g_1, g_2 : Z \to X$ vérifiant $f \circ g_1 = f \circ g_2$ on ait $g_1 = g_2$.

Un épimorphisme est un morphisme $f : X \to Y$ tel que pour tout $h_1, h_2 : Y \to W$ vérifiant $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ on ait $h_1 = h_2$.

(1) Montrer que, dans la catégorie **Set** des ensembles, un morphisme est un monomorphisme (resp. épimorphisme) si et seulement si c'est une application injective (resp. surjective).

(2) Montrer que, dans la catégorie **Ring** des anneaux, le morphisme canonique $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ est un épimorphisme.

(3) Montrer que dans la catégorie **Top** des espaces topologiques, il existe des morphismes qui sont à la fois un épimorphisme et un monomorphisme mais pas un isomorphisme (indication : considérer $X \hookrightarrow Y$ un sous-ensemble dense de Y)

Solution 5. (1) Soit $f : A \to B$ une application injective. Alors, pour tout $g, h : X \to A$, $f \circ g = f \circ h$ implique $f(g(x)) = f(h(x))$ pour tout x et, par injectivité, $g(x) = h(x)$ ce qui donne $h = g$. Réciproquement, supposons que $f : A \to B$ est un monomorphisme. Alors pour tout $x, y \in A$ avec $f(x) = f(y)$, on définit $g_x : \{\mathrm{pt}\} \to A$ et $g_y : \{\mathrm{pt}\} \to A$ par $g_x(\mathrm{pt}) = x$ et $g_y(\mathrm{pt}) = y$. On a donc $f \circ g_x = f \circ g_y$ d'où $g_x = g_y$ (car f est un monomorphisme) et donc $x = y$.

Supposons maintenant $f : A \to B$ surjective et soit $g, h : B \to C$ avec $g \circ f = h \circ f$. Alors pour tout $b \in B$, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$; d'où $g(b) = g(f(a)) = h(f(a)) = h(b)$ et $g = h$. Réciproquement, supposons qu'il existe $x \in B - f(A)$ (c'est à dire f non-surjective), alors soit $g : B \to \{\mathrm{pt}, \mathrm{x}\}$ l'application $b \mapsto \mathrm{pt}$ et soit $h : B \to \{\mathrm{pt}, \mathrm{x}\}$ l'application $b \in B - \{x\} \mapsto \mathrm{pt}$ et $h(x) = x$. Il est clair que $h \neq g$. Mais $g \circ f = h \circ f$ par construction. Ce qui implique que f n'est pas un monomorphisme. Conclusion : si f est un monomorphisme, elle est surjective.

(2) Un morphisme d'anneaux unitaires vérifie $f(1) = 1$. Par linéarité, cette condition détermine le morphisme canonique $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Ce morphisme n'est évidemment pas surjectif. Nous allons montrer que c'est cependant un épimorphisme dans la catégorie **Ring**. Soient $g, h : \mathbb{Q} \to A$ deux morphismes d'anneaux unitaires vérifiant $h \circ f = g \circ f$. Soit alors $p/q \in \mathbb{Q}$. On a $h(p/q) = h(p)h(1/q)$ par définition et de même pour g. On a déjà $h(p) = h(f(p)) = g(f(p)) = g(p)$. Il reste à montrer que $h(1/q) = g(1/q)$ pour tout $q \in \mathbb{Q} - \{0\}$. Or $1 = g(q/q) = g(q)g(1/q) = g(1/q)g(q)$. Ceci montre que $g(q)$ est inversible dans A, d'inverse $g(1/q)$. Comme $g(q) = h(q)$, on a aussi $g(q)^{-1} = h(q)^{-1}$ ce qui donne la conclusion.

(3) Soit $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ l'inclusion canonique. On sait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Pour des raisons de cardinalité, i n'est pas inversible! Montrons que c'est un monomorphisme et un épimorphisme. Par injectivité, on obtient facilement que c'est un monomorphisme. Soit maintenant $h, g : \mathbb{R} \to X$ deux applications continues vérifiant $h \circ i = g \circ i$. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = g(x)$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim y_n = x$. D'où, par continuité, $h(x) = \lim h(y_n) = \lim g(y_n) = g(x)$.

Exercice 9. (Catégorie et catégorie opposée) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On note $\mathcal{C}^{op}$ la catégorie qui a les mêmes objets que $\mathcal{C}$ et dont $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

(1) Vérifier que $\mathcal{C}^{op}$ est une catégorie et montrer que la catégorie **Set** des ensembles n'est pas équivalente à sa catégorie opposée (indication : si F est une telle équivalence vérifier que $F(\emptyset) = \{pt\}$ et étudier $F(\emptyset \times \emptyset)$).

(2) La catégorie **Rel** des relations a pour objets les ensembles et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rel}}(X, Y) = P(X \times Y)$ les parties du produit. Sa composition est définie pour $\mathcal{R} : X \to Y$, $\mathcal{R}' : Y \to Z$ par

$$\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} := \{(x, z) \in X \times Z,\ \exists y \in Y,\ (x, y) \in \mathcal{R} \text{ et } (y, z) \in \mathcal{R}'\}.$$

Quelles sont les unités ? Vérifier que l'on a bien une catégorie et démontrer qu'elle est équivalente à sa catégorie opposée.

(3) On va maintenant montrer que la catégorie des groupes abéliens finis est équivalente à sa catégorie opposée. On rappelle que tout groupe abélien fini est isomorphe à un unique groupe du type $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ où les entiers strictement positifs n_i vérifient $n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_r$.

i) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$; montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/\mathrm{pgcd}(n,p)\mathbb{Z}$; en déduire l'existence d'un isomorphisme de groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et le décrire explicitement.

ii) Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$; montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

iii) Soient G et H des groupes abéliens finis ; établir l'existence d'un isomorphisme de groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, H) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, G)$.

iv) Soient G, H et K des groupes abéliens finis ; montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,H)\times\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H,K) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,K) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K,H)\times\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H,G) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K,G)
\end{tikzcd}$$

v) Montrer que la catégorie $\mathbf{Ab^f}$ des groupe abéliens finis est équivalente à la catégorie opposée $\big(\mathbf{Ab^f}\big)^{op}$.

Solution 6. (1) Raisonons par l'absurde. Supposons qu'il existe une équivalence de catégories $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{op}$. Le point clé est qu'une équivalence de catégories préserve les (co)limites (voir ci-dessous pour une démonstration). En particulier $F(\emptyset)$ est un objet initial de $\mathbf{Set}^{op}$, donc isomorphe à un objet final de $\mathbf{Set}$, c'est à dire pt. De même $F(\emptyset\times\emptyset) = F(\emptyset)\times F(\emptyset) \in \mathbf{Set}^{op}$. Mais les produits dans $\mathbf{Set}^{op}$ correspondent aux coproduits dans $\mathbf{Set}$. Donc $F(\emptyset\times\emptyset)\cong \mathrm{pt}\coprod\mathrm{pt}$ qui est un ensemble à 2 éléments; en particulier $F(\emptyset\times\emptyset)$ n'est pas isomorphe à $\mathrm{pt}\cong F(\emptyset)$. Or, dans $\mathbf{Set}$, $\emptyset\times\emptyset=\emptyset$ ce qui est une contradiction. Il n'existe donc pas d'équivalences de catégories entre $\mathbf{Set}$ et $\mathbf{Set}^{op}$.

Comme cela ne peut pas faire de mal, voici une démonstration du fait que, si $F : \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ est une catégorie avec produit (fini) et objet initial alors $F(\emptyset)$ est un objet initial et $F(X\times Y)\cong F(X)\times F(Y)$ (en particulier ce dernier existe). Quel que soit $Y\in\mathcal{D}$, par essentielle surjectivité, il existe $Y \xrightarrow{\sim} F(X)$. En particulier, il existe une flèche $F(\emptyset)\to F(X)\to Y$ qui est de plus unique par fidélité de F. Par conséquent : $F(\emptyset)$ est initial. Un raisonement similaire permet de déduire de l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C),F(X)\times F(Y))\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C),F(X))\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C),F(Y))\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,X)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,Y)$$

le résultat pour les produits finis.

(2) Rappelons que les objets de $\mathbf{Rel}$ sont les ensembles et l'ensemble des morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rel}}(X,Y)$ est $\mathcal{P}(X\times Y)$, l'ensemble des parties de $X\times Y$. Construisons une équivalence (en fait un isomorphisme) $F : \mathbf{Rel}\to\mathbf{Rel}^{op}$. On choisit $F(X)=X$ pour tout ensemble X. Soit $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rel}}(X,Y)$. par définition, f est un sous-ensemble de paires $(x,y)\in X\times Y$. On pose $F(f)$ le sous ensemble de $Y\times X$ des paires (y,x) telles que $(x,y)\in f\subset X\times Y$ (on a juste permuté X et Y en fait). Clairement $F(f)$ est un morphisme de $\mathbf{Rel}^{op}$. Il est immédiat que F est un foncteur. Il est surjectif, donc essentiellement surjectif et de plus, pleinement fidèle. D'où le résultat.

(3) (1) On note $d=\mathrm{pgcd}(n,p)$, $n'=n/d$ et $p'=p/d$ de sorte que $\mathrm{pgcd}(n',p')=1$. Un morphisme de groupe $f:\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est déterminé par $a=f(1)$ (avec $a\in\{0,\dots,p-1\}$) ; de plus on doit avoir $0=f(0)=f(n)=na$ donc $p|na$ donc $p'|n'a$ donc $p'|a$ car $\mathrm{pgcd}(n',p')=1$. Ainsi $a=\alpha p'$ avec $\alpha\in\{0,\dots,d-1\}$ et réciproquement, deux valeurs distinctes $\alpha p'$, $\beta p'$ déterminent deux morphismes distincts. Il en découle des isomorphismes

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) & \xleftrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & \xleftrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\
f & \longmapsto & \dfrac{f(1)}{p'} \qquad \dfrac{g(1)}{n'} & \longleftarrow\!\shortmid & g \\
(\ k\mapsto kp'\alpha\ ) & \longleftarrow\!\shortmid & \alpha & \longmapsto & (\ k\mapsto kn'\alpha\ )
\end{array}$$

Par composition, on obtient l'isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\
f & \longmapsto & g : k\mapsto k\frac{n'}{p'}f(1)=k\frac{n}{p}f(1)
\end{array}.$$

On peut remarquer que, par définition, p' est bien inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(2) On calcule l'image de (f, g) par les morphismes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[d, "\wr"] \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

D'après (1) on obtient le morphisme $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ défini par $k \mapsto k\frac{n}{q}\big(g \circ f(1)\big)$.
On calcule ensuite l'image de (f, g) par les morphismes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[d, "\wr"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Le résultat est la composition des deux morphismes $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ défini par $k \mapsto k\frac{p}{q}g(1)$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ défini par $k \mapsto k\frac{n}{p}f(1)$ c'est à dire le morphisme $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ défini par $k \mapsto k\frac{p}{q}g(1)\frac{n}{p}f(1) = k\frac{n}{q}f(1)g(1) = k\frac{n}{q}\big(g \circ f(1)\big)$.
Le diagramme donné est donc commutatif.

(3) On utilise les formes canoniques de G et H : $G \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ et $H \simeq \bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}$. On a alors, puisque la somme directe commute avec le bifoncteur $Hom(-,-)$ (à droite et à gauche) : $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, H) \simeq \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, G)$.

(4) On utilise les formes canoniques de G, H et K pour se ramener à la situation de la question (2). La fonctorialité de la somme directe et l'unicité des formes canoniques assurent que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, H) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, K) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, K) \arrow[d, "\wr"] \\
\bigoplus_{i,j,k} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m_j\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z/m_j\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/l_k\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] & \bigoplus_{i,k} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z/n_i\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/l_k\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Ceci ramène au diagramme de la question (2).

(5) On définit $F : \mathbf{Ab^f} \to \big(\mathbf{Ab^f}\big)^{op}$ par $F(G) = G$ et

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab^f}}(G, H) \to \mathrm{Hom}_{\left(\mathbf{Ab^f}\right)^{op}}(F(G), F(H)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab^f}}(H, G)$$

par l'isomorphisme donné à la question (3). Le résultat de la question (4) signifie que F est un foncteur. De plus F est pleinement fidèle (car F induit un ismorphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab^f}}(G, H)$ dans $\mathrm{Hom}_{\left(\mathbf{Ab^f}\right)^{op}}(F(G), F(H))$) et essentiellement surjectif (car surjectif) (définition 2.1.6) donc F est une équivalence de catégories (théorème 2.1.10).

Remarque 2. Un point important dans la question **(3)** est qu'on peut faire commuter les sommes directes avec les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \cdot)$. Ceci découle est une conséquence du fait que la somme directe est un produit et un coproduit, cf l'exercice 5 ci-dessous. Bien entendu c'est immédiat à vérifier dans le cadre de l'exercice.

Exercice 10. Montrer que $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est une équivalence de catégorie si et seulement si F est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

Solution 7. Supposons que F est une équivalence de catégories. Prenons alors $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ un foncteur tel que $F \circ G$ et $\mathrm{G} \circ F$ sont naturellement équivalents aux foncteurs identités. En particulier, pour tout objet Y de $\mathbf{D}$, on a donc un isomorphisme $\eta_Y : F(G(Y)) \xrightarrow{\simeq} id(Y) = Y$ et donc, tout objet de

$\mathbf{D}$ est isomorphe à un objet dans l'image de F; ainsi F est essentiellement surjectif. De même G est essentiellement surjectif. Notons que $F \circ G$ et $G \circ F$ sont pleinement fidèles car les foncteurs identités le sont et que pour tout X, Y, on a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(G \circ F(X), G \circ F(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ où la bijection est donnée par l'application $G(F(X)) \xrightarrow{f} G(F(Y)) \mapsto X \xrightarrow{\eta_X^{-1}} G(F(X)) \xrightarrow{f} G(F(Y)) \xrightarrow{\eta_Y} Y$.

Soient encore X, Y des objets de $\mathbf{C}$ et notons $\gamma_X : G(Z) \to X$ et $\gamma_Y G(W) \to Y$ des isomorphismes donéns par l'essentielle surjectivité de G. On en déduit comme ci-dessus une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(G(Z), G(W)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ induit par $f \mapsto \gamma_Y \circ f \circ \gamma_X^{-1}$..

Comme F est un foncteur, il préserve les bijections (ainsi $F(\gamma_X)$, $F(\gamma_Y)$ en sont) et on en déduit donc une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(G(Z)), F(G(W))) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ et comme $F \circ G$ est pleinement fidèle, le premier membre est en bijection avec $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ ce qui conclut pour le caractère pleinement fidèle de F.

Réciproquement, soit F un foncteur essentiellement surjectif et pleinement fidèle. Constuisons un focnteur $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$. Pour tout Y un objet de $\mathbf{D}$, on dispose d'un objet $X_Y \in \mathbf{C}$ et d'un isomorphisme $\gamma_Y : F(X) \to Y$. On suppsoe s'être donné ces tels choix. On pose alors $G(Y) = X_Y$. Il reste à définir G sur les morphismes. Soit $g : Y \to Y'$ un morphisme dans $\mathbf{D}$. On pose $G(g) = \Psi\big(\gamma_{Y'}^{-1} \circ g \circ \gamma_Y\big)$ où $\Psi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ est l'isomorphisme (réciproque à celui) induit par F. Il reste à vérifier que $G(g \circ h) = G(g) \circ G(h)$ et $G(id) = id$. Or $F(f \circ f') = F(f) \circ F(f')$ implique que $\Psi(h \circ h') = \Psi(h) \circ \Psi(h')$. Par suite,

$$G(g \circ h) = \Psi\big(\gamma_{Y``}^{-1} \circ g \circ h \gamma_Y\big) = \Psi\big(\gamma_{Y``}^{-1} \circ g \circ \gamma_{Y'} \circ \gamma_{Y'}^{-1} h \gamma_Y\big) = \Psi\big(\gamma_{Y``}^{-1} \circ g \circ \gamma_{Y'}\big) \circ \Psi\big(\gamma_{Y'}^{-1} \circ h \gamma_Y\big) = G(g) \circ G(h).$$

Un même raisonnement montre que $G(id) = id$.