

## COMPLEXES SIMPLICIAUX ET LEUR HOMOLOGIE

Dans ce corrigé, pour un complexe simplicial  $K$ , nous noterons souvent  $[a, b]$  l'arête orientée allant d'un sommet  $a$  à un sommet  $b$  et  $\langle s_0, \dots, s_n \rangle$  le  $n$ -simplexe défini par ces sommets. Si  $x$  est un vecteur dans un  $\mathbb{Z}$ -module libre, nous noterons  $\mathbb{Z}x$  le sous-groupe abélien (nécessairement libre) qu'il engendre et si  $X$  est un ensemble,  $\mathbb{Z}X = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}x$  le groupe abélien libre de base l'ensemble des éléments de  $X$ .

**Exercice 1.** Soit  $G$  un graphe fini (plongé dans  $\mathbb{R}^n$ ) que l'on identifie à un complexe simplicial de dimension 1.

1. Calculer les groupes d'homologie de  $G$  en fonction de ses composantes connexes, nombre d'arêtes et sommets.
2. On a vu en TD que ce graphe est homotope à une réunion de bouquets de cercles. Calculer l'homologie de cette réunion de bouquets et comparer avec la question précédente.
3. Dédurre de la première question l'homologie de la réunion des arêtes d'un tétraèdre de  $\mathbb{R}^3$ .

**Solution 1.** Il faut déjà préciser ce qu'on veut dire par "graphe". Il s'agit ici simplement d'un espace topologique donné par une réunion de points et d'arêtes entre elles; autrement dit un espace obtenu par recollement, sur une famille  $S$  de points, de segments homéomorphes à  $I = [0, 1]$  (que l'on recolle en identifiant leurs extrémités avec des points de  $S$ ), c'est à dire un CW-complexe de dimension 1.

Quitte à subdiviser les arêtes (et donc à rajouter des sommets) on peut supposer que par deux sommets, il ne passe qu'une seule arête et qu'aucune arête ne boucle sur le même sommet. Étant donné que le graphe est fini, on obtient un complexe simplicial fini et qui se plonge donc dans un  $\mathbb{R}^n$ . Voir la figure (1).

On peut éviter l'étape de subdivision pour identifier un graphe à un complexe simplicial en le considérant comme un complexe quasi-simplicial (au sens du cours).

Notons  $S$  le nombre de sommets (ordonnés sous la forme  $s_1 < s_2 < \dots < s_S$ ) et  $E$  le nombre d'arêtes.

1. Par définition, sachant qu'il n'y a aucun simplexe de dimension 2 et plus, le complexe de chaînes associé au graphe  $G$  est  $\dots 0 \rightarrow \mathbb{Z}^E \xrightarrow{d} \mathbb{Z}^S$ . Il suit que

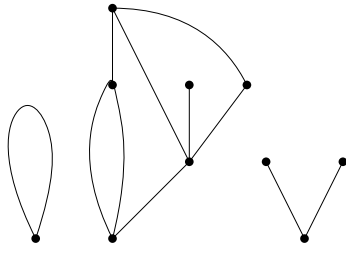
$$H_1(G) = \ker(\mathbb{Z}^E \xrightarrow{d} \mathbb{Z}^S) / \text{im}(0 \rightarrow \mathbb{Z}^E) = \ker(\mathbb{Z}^E \xrightarrow{d} \mathbb{Z}^S).$$

En particulier c'est un sous-module d'un  $\mathbb{Z}$ -module libre de type fini, donc un module libre<sup>1</sup> et il est complètement déterminé par son rang  $b_1(G)$ . La formule d'Euler Poincaré nous donne alors:  $b_0(G) - b_1(G) = S - E$ , d'où sachant que d'après le cours  $b_0(G)$  est exactement le nombre de composantes connexes de  $G$ , noté  $cc(G)$ , on obtient

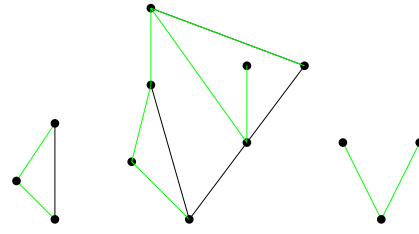
$$H_0(G) \cong \mathbb{Z}^{cc(G)}, \quad H_1(G) \cong \mathbb{Z}^{E-S+cc(G)}.$$

2. En décomposant sur les composantes connexes (et sachant que l'homologie est la somme directe des homologies des composantes connexes d'après le cours), on est ramené au cas d'un graphe connexe. On a vu dans la feuille de TD sur l'homotopie que si  $G'$  est connexe, alors  $G'$  est homotope à un bouquet de cercles, avec précisément  $E' - S' + 1$  cercle; cela découle du fait que  $G'$  est homotope à  $G'/T$  où  $T$  est un arbre maximal, et que pour un tel arbre on a exactement  $S' - 1$  arêtes. L'homologie d'un tel bouquet est  $\mathbb{Z}$  en degré 0 par connexité et  $H_1(G') \cong \mathbb{Z}^{E'-S'+1}$

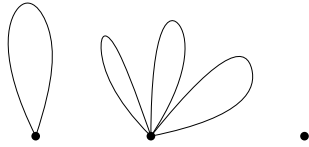
<sup>1</sup>voir le chapitre 5 du cours si nécessaire



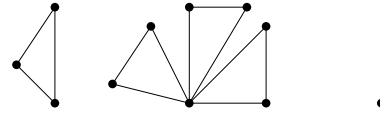
Un graphe  $G$



Une triangulation de  $G$ . En vert sont représentés les sous-arbre maximaux de chaque composante connexe.



Le bouquet de cercle auquel  $G$  est homotope (obtenu en quotientant par l'arbre maximal choisi).



Une triangulation du bouquet de cercles représenté gauche.

Figure 1: Graphes comme complexes simpliciaux

comme on le voit immédiatement en prenant un modèle quasi-simplicial, ou bien de la façon suivante.

Pour obtenir un modèle simplicial du cercle, on utilise  $\partial\Delta^2$ , le bord du deux simplexes (c'est à dire qu'on place 3 sommets sur le cercle), comme modèle de chaque cercle  $c_i$  dans notre bouquet. On note  $s, x_i, y_i$  les sommets de ces cercles  $c_i$ ; c'est à dire que  $s$  est le sommet commun à tout les cercles et  $x_i < y_i$  sont les deux autres sommets spécifiques. On ordonne de manière à ce que  $s$  soit le plus petit des sommets. Alors le complexe simplicial n'est rien d'autre que

$$\dots 0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{E'-S'+1} (\mathbb{Z}[s, x_i] \oplus \mathbb{Z}[x_i, y_i] \oplus \mathbb{Z}[s, y_i]) \xrightarrow{d} \mathbb{Z}s \oplus \bigoplus_{i=0}^{E'-S'+1} (\mathbb{Z}x_i \oplus \mathbb{Z}y_i)$$

en notant  $[a, b]$  les arêtes orientées de sommets  $a, b$ . La différentielle vérifie que  $d([a, b]) = b - a$ . En particulier, si  $\sigma = \sum_i \alpha_i [s, x_i] + \beta_i [x_i, y_i] + \gamma_i [s, y_i]$  est un cycle, alors

$$0 = d(\sigma) = \left( \sum_i -(\alpha_i + \gamma_i) \right) s + \sum_i (\alpha_i - \beta_i) x_i + (\beta_i + \gamma_i) y_i.$$

Comme les sommets forment un famille libre par définition, il suit que  $\sigma$  est un cycle si et seulement si, pour tout  $i$ , on a que

$$\alpha_i = \beta_i = -\gamma_i.$$

On en conclut que  $H_1(G') = \ker(d) \cong \mathbb{Z}^{E'-S'+1}$ .

3. Un tétraèdre a 4 sommets et 6 arêtes. Ces derniers forment un graphe connexe d'où  $H_0 \cong \mathbb{Z}$  et  $H_1 \cong \mathbb{Z}^3$  d'après la question 1.

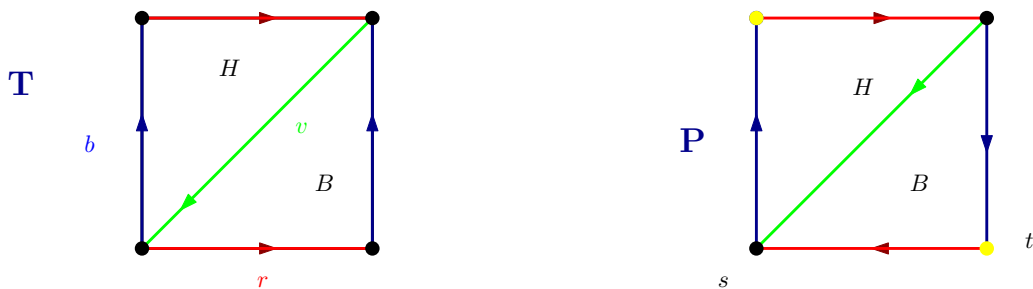


Figure 2: Des triangulations quasi-simpliciales du tore et du plan projectif. Les 3 arêtes sont appelées  $b, r, v$  selon la première lettre de leur couleur.

**Exercice 2.** Dans cet exercice on va calculer l'homologie à coefficient dans  $\mathbb{Z}$  de triangulations de surfaces.

1. Pour le tore  $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  et le plan projectif  $\mathbb{R}P^2$ , les décomposer comme 2 triangles avec des recollements des arêtes; on appellera cela un complexe "quasi-simplicial", car différents sommets d'un simplexe peuvent être identifiés au recollement. On peut étendre les définitions de chaîne et d'homologie à ce cadre. Calculer l'homologie de ces complexes quasi-simpliciaux.
2. En subdivisant chaque triangle en plusieurs triangles (chaque arête est coupée en trois), obtenir des vraies triangulations de ces espaces et calculer leurs caractéristiques d'Euler.
3. Calculer les groupes d'homologie de ces complexes simpliciaux et vérifier que ce sont bien les mêmes que ceux obtenus comme complexe quasi-simpliciaux.
4. En considérant le recollement d'un  $2g$ -gone de manière à ce qu'il n'y ait plus qu'un seul sommet, calculer les groupes d'homologie d'une surface orientée de genre  $g$ .

**Solution 2.** Dans cet exercice, notons  $C^q$  et  $H^q$  les complexes de chaînes et homologie associés aux complexes quasi-simpliciaux.

1. On les décompose suivant la figure (2). Pour le tore on a donc un seul sommet, noté  $s$ , 3 arêtes  $b, r, v$  et 2 triangles  $H$  et  $B$ . On oriente les 2-simplexes en suivant l'orientation du plan donné dans le sens trigonométrique. On a donc en suivant les règles usuelles pour les complexes simpliciaux que le complexe associé à la structure quasi-simpliciale de  $T$  est concentré en degré  $\leq 2$  (et donc d'homologie nulle en degré  $\geq 3$ ) de la forme

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}B \xrightarrow{d} \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}r \oplus \mathbb{Z}v \xrightarrow{d} \mathbb{Z}s.$$

On a par ailleurs que  $d(b) = s - s = 0$  et de même  $d(r) = d(v) = 0$  (les arêtes de la triangulation quasi-simpliciales du tore sont en fait des lacets). On obtient donc que  $H_0^q(T) = \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}$  et que  $H_1^q(T) = \mathbb{Z}^3 / \text{im}(d : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3)$ . On a  $d(H) = -b - r - v$  et  $d(B) = r + b + v$  avec les orientations choisies. On en déduit que  $C_2^q(T) = \mathbb{Z}(B + H) \oplus \mathbb{Z}B$ , que  $H_2^q(T) = \ker(d : C_2^q(T) \rightarrow C_1^q(T))/0 \cong \mathbb{Z}(B + H)$  et que  $\text{im}(d) = d(\mathbb{Z}B) = \mathbb{Z}(b + r + v)$ . Il suit que  $H_1^q(T) = (\mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}r) / \text{im}(d) = \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}r \oplus \mathbb{Z}(b + r + v) / \mathbb{Z}(b + v + r) \cong \mathbb{Z}^2$  avec pour générateur les classes des arêtes rouges et bleues.

Passons au plan projectif: on a maintenant deux sommets, noté  $s$  et  $t$ , et toujours 3 arêtes  $b, r, v$  et 2 triangles  $H$  et  $B$ . On oriente les 2-simplexes en suivant l'orientation du plan donné dans le sens anti-trigonométrique. On a encore que  $H_{i \geq 3}^q(P) = 0$  puisque on a pas de simplexes de dimension 3 ou plus et on a un complexe de la forme

$$C_*^q(P) = \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}B \xrightarrow{d} \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}r \oplus \mathbb{Z}v \xrightarrow{d} \mathbb{Z}s \oplus \mathbb{Z}t.$$

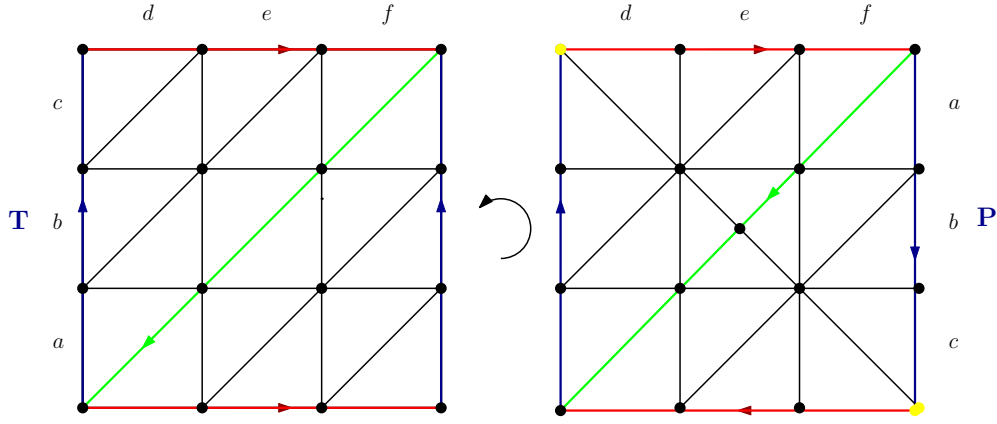


Figure 3: Des triangulations simpliciales du tore (à gauche, avec 9 sommets) et du plan projectif

On a que  $d(b) = t - s = -d(r)$  et  $d(v) = s - s = 0$ . Ainsi, comme  $\mathbb{Z}s \oplus \mathbb{Z}t = \mathbb{Z}(t - s) \oplus \mathbb{Z}s$ , on obtient que  $H_0^q(P) = (\mathbb{Z}s \oplus \mathbb{Z}t.) / \mathbb{Z}(t - s) = (\mathbb{Z}(t - s) \oplus \mathbb{Z}s) / \mathbb{Z}(t - s) \cong \mathbb{Z}$ . Par ailleurs, le noyau de  $d : C_1^q(P) \rightarrow C_0^q(P)$  est donc  $\mathbb{Z}(b + r) \oplus \mathbb{Z}v$ . Il reste à calculer  $d : C_2^q(P) \rightarrow C_1^q(P)$ : on a

$$d(xH + yB) = (x + y)b + (x + y)r + (x - y)v = (x + y)(b + r) + (x - y)v.$$

En particulier,  $d$  est injective et  $H_2^q(P) = 0$ . De plus un élément de la forme  $\alpha v + \beta(b + r)$  dans  $Z_1^q(P)$  est donc congru modulo  $d(C_2^q(P))$  à  $(\alpha - \beta)v$ . Par ailleurs un élément de la forme  $nv$  est dans  $d(C_2^q(P))$  si il s'écrit sous la forme  $nv = (x + y)(b + r) + (x - y)v$  avec, par indépendance linéaire, nécessairement  $x = -y$ , donc  $nv = 2xv$ . Il suit que  $v$  est congru à  $2v$  modulo  $d(C_2^q(P))$  mais que  $v$  n'est pas un bord. Il suit que  $H_1^q(P) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

- On se réfère à la figure (3) pour voir des subdivisions simpliciales. Notons que ces dernières doivent vérifier qu'il existe au plus un seul triangle passant par 3 sommets distincts de l'espace et que tout triangle a 3 sommets distincts, toute arête deux sommets distincts. Cela explique le nombre élevé de triangles. On peut cependant faire mieux, ces triangulations ne sont pas minimales, mais faciles à obtenir et vérifier (pour une configuration minimale pour le tore, voir l'exercice 4). Pour le Tore on a 9 sommets, 27 arêtes et 18 faces. Pour le plan projectif on a 11 sommets, 30 arêtes et 20 triangles. On en déduit les caractéristiques d'Euler suivantes:

$$\chi(T) = 0, \quad \chi(\mathbb{R}P^2) = 1.$$

On pourra remarquer que ces nombres sont les mêmes que ceux qu'on aurait obtenu en appliquant la formule aux complexes quasi-simpliciaux (ceci est un phénomène général, puisque une subdivision ne change pas la caractéristique d'Euler).

- On note encore  $T$  et  $P$  les complexes simpliciaux obtenus dans la question précédente. Tout d'abord on sait par connexité que  $H_0(T) \cong \mathbb{Z} \cong H_0(P)$  et que par dimension,  $H_{i \geq 3}(T) = 0 = H_{i \geq 3}(P)$ . On oriente les 2-simplexes de  $T$  et  $P$  suivant l'orientation induite par le plan, dans le sens trigonométrique (symbolisé par la flèche noire dans la figure (3)). On oriente les arêtes du bord des carrés suivant les directions dessinées, et les autres arêtes de manière arbitraire.

Calculons les deuxièmes groupes d'homologie simpliciale de  $T$  et  $P$ . Soit  $S = \sum_{\sigma \in T^{(2)}} x_\sigma \sigma$  une 2-chaîne de  $C_*(T)$ . Il y a deux types d'arêtes intervenant: celles sur le bord de  $T$  (de couleurs rouge et bleu donc) et celles internes. Notons  $T_{int}^{(1)}$  les arêtes internes et on a notées  $a, b, c, d, e, f$  les arêtes du bord comme dans la figure (3). On notera de même  $P_{int}^{(1)}$  les arêtes internes de  $P$  et  $P_{bord}^{(1)}$  l'ensemble des arêtes du bord. Notons qu'une arête interne  $w$  appartient à *exactement*

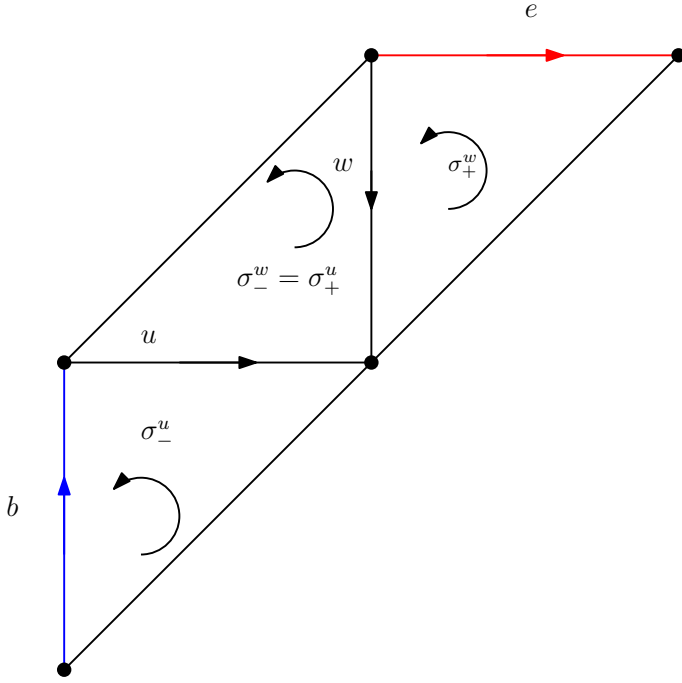


Figure 4: Deux arêtes internes  $w$ ,  $u$  et leurs deux triangles orientés respectifs de  $T$  auxquelles elles appartiennent

deux triangles, une fois avec une orientation induite par celle du triangle et une fois avec une orientation opposée, comme montré dans la figure (4) où on note  $\sigma_+^w$ ,  $\sigma_-^w$  ces deux triangles respectifs. Le même cas de figure a lieu dans le plan projectif. Par ailleurs, tous les triangles ont des arêtes internes. Les arêtes externes appartiennent aussi à deux triangles et apparaissent, dans le cas du Tore, avec des signes opposés, mais dans le cas du plan projectif elles apparaissent avec le *même* signe. Il suit que, dans le cas du tore on a

$$d(S) = \sum_{w \in T} (x_{\sigma_+^w} - x_{\sigma_-^w})w \quad (0.1)$$

donc  $S$  est un cycle si et seulement si tous les  $x_\sigma$  sont égaux, c'est à dire si  $S = n \sum_{\sigma \in T^{(2)}} \sigma$ . Il en découle que  $H_2(T) = \ker(d) \cong \mathbb{Z}$ . Dans le cas de  $P$  on obtient

$$d(S) = \sum_{w \in P_{int}^{(1)}} (x_{\sigma_+^w} - x_{\sigma_-^w})w - \sum_{u \in P_{bord}^{(1)}} (x_{\sigma_+^u} + x_{\sigma_-^u})u \quad (0.2)$$

La première partie de l'équation implique encore que si  $S$  est un cycle, alors tous les  $x_\sigma$  sont égaux entre eux. Mais alors la deuxième somme ne peut être nulle que si ce coefficient est nul. Il suit que  $d$  est injective et  $H_2(P) = 0$ .

Il reste à calculer  $H_1$ . Pour cela l'idée n'est pas de calculer bêtement, mais de montrer qu'à un bord près, tout cycle est contraint à avoir une forme particulière en notant que si  $w$  est une arête, alors  $w$  est une combinaison linéaire des deux autres arêtes de tout triangle auquel elle appartient à un bord près (donné par le bord du triangle).

Illustrons cela dans le cas de  $P$ . Prenons une arête  $w$  au centre de  $P$  comme dans la figure (5). On a alors avec l'orientation illustrée sur la figure que  $d(\sigma) = w + u + v$ , d'où il suit que  $w = -(u + v) + d(\sigma)$ . Ainsi toute 1-chaîne  $z = n_w w + \sum_{x \in P^{(1)} \setminus \{w\}} n_x x$  de  $P$  est égale à une chaîne

$$z = \sum_{x \in P^{(1)} \setminus \{w\}} n'_x x + d(\alpha) \quad (0.3)$$

c'est à dire à une chaîne qui vit sur les 1-simplexes de  $P$  privé de  $w$ , modulo les bords. En appliquant que  $w' = -(t + u') - d(\tau)$ , on obtient de même que  $z$  est égale à une 1-chaîne qui

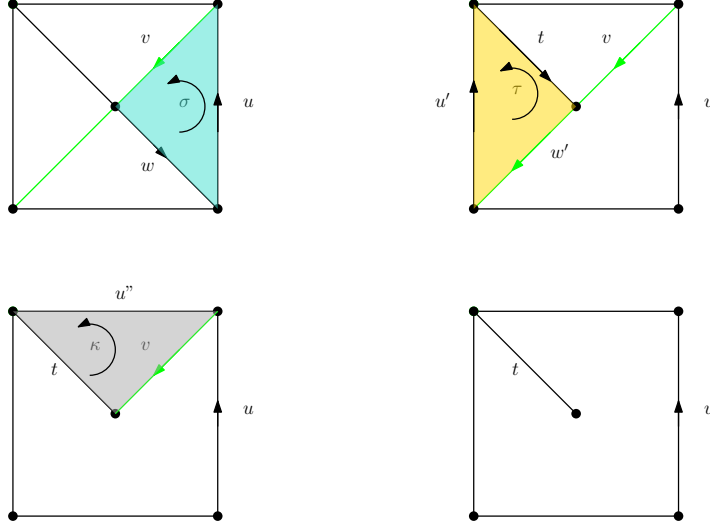


Figure 5: Tout 1-cycle  $z$  du complexe simplicial en haut à gauche est à un bord près un 1-cycle  $x = z - \partial\alpha$  dans le complexe simplicial en bas à droite, obtenu en éliminant successivement  $w$ ,  $w'$  et  $v$  via les bords des triangles  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\kappa$

appartient aux combinaisons linéaires de 1-simplexes de  $P \setminus \{w, w'\}$ . En itérant comme dans la figure (5) on obtient que modulo les bords,  $z$  est homologue à une chaîne qui vit dans les combinaisons linéaires de 1-simplexes dessinées en haut à gauche de la figure (6). Précisément, on a “ poussé ” tout les 1-chaînes sur l’arête  $t$  et le bord du carré au centre. On peut continuer cette opération sur les autres carrés du cercle, poussant toute chaîne, modulo les bords, sur les chaînes du bord du carré et 4 segments, comme illustré dans la figure (6).

Remarquons maintenant que si  $z' = z + d(\sigma)$  alors  $z'$  est un cycle si et seulement si  $z$  est un cycle (puisque  $d(d(\sigma)) = 0$ ). Il en découle que si  $z$  est un cycle de  $C_1(P)$ , alors  $z$  est modulo les bords égal à un cycle  $z'$  porté par les 1-simplexes du diagramme dessiné en bas à droite de la figure (6). Les sommets  $s_0, s_1, s_2, s_3$  n’appartiennent qu’à une unique arête. Donc si cette arête apparaît avec un coefficient  $\lambda$  non-nul dans  $z'$ , alors sa différentielle donne un élément non nul  $\pm\lambda s_i$  dans  $C_0(P)$  et donc  $z'$  n’est pas un cycle. Donc aucune de ces arêtes n’apparaît avec un coefficient non-nul dans  $z'$ , c’est à dire que

$$z' = n_A a + n_b b + n_c c + n_d d + n_e e + n_f f + n_g g.$$

Le même argument s’applique pour montrer que  $n_g = 0$  car  $s_4$  n’appartient plus qu’à  $g$  dans cette liste d’arêtes. Un calcul similaire à ce que l’on a fait dans la question 1 donne alors que  $d(z') = 0$  si et seulement si  $z' \in \mathbb{Z}(a + b + c + d + e + f)$ .

On a démontré que modulo les bords, tout cycle est proportionnel à  $a + b + c + d + e + f$  (c’est à dire la moitié du bord de  $P$ ). Il reste à voir quand est-ce que deux tels cycles sont égaux modulo un bord, c’est à dire (quitte à les soustraire) quand est ce que  $n(a + b + c + d + e + f)$  est un bord. D’après un calcul similaire à l’équation (0.2), on a que  $d(\sum_{\sigma \in P(2)} x_\sigma \sigma)$  est dans  $\mathbb{Z}(a + b + c + d + e + f)$  si et seulement si tous les  $x_\sigma$  sont égaux. et que dans ce cas, on a que

$$d(x \sum_{\sigma \in P(2)} \sigma) = -2x \sum_{u \in P_{bord}^{(1)}} u = -2x(a + b + c + d + e + f).$$

Ainsi, on obtient que  $n(a + b + c + d + e + f)$  est un bord si et seulement si  $n$  est pair et finalement on trouve que  $H_1(P) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . On peut noter que la caractéristique d’Euler et le calcul de  $H_2$  et  $H_0$  garantissant que  $H_1(P)$  était de rang nul, et donc un groupe fini (car  $P$  est un complexe simplicial fini).

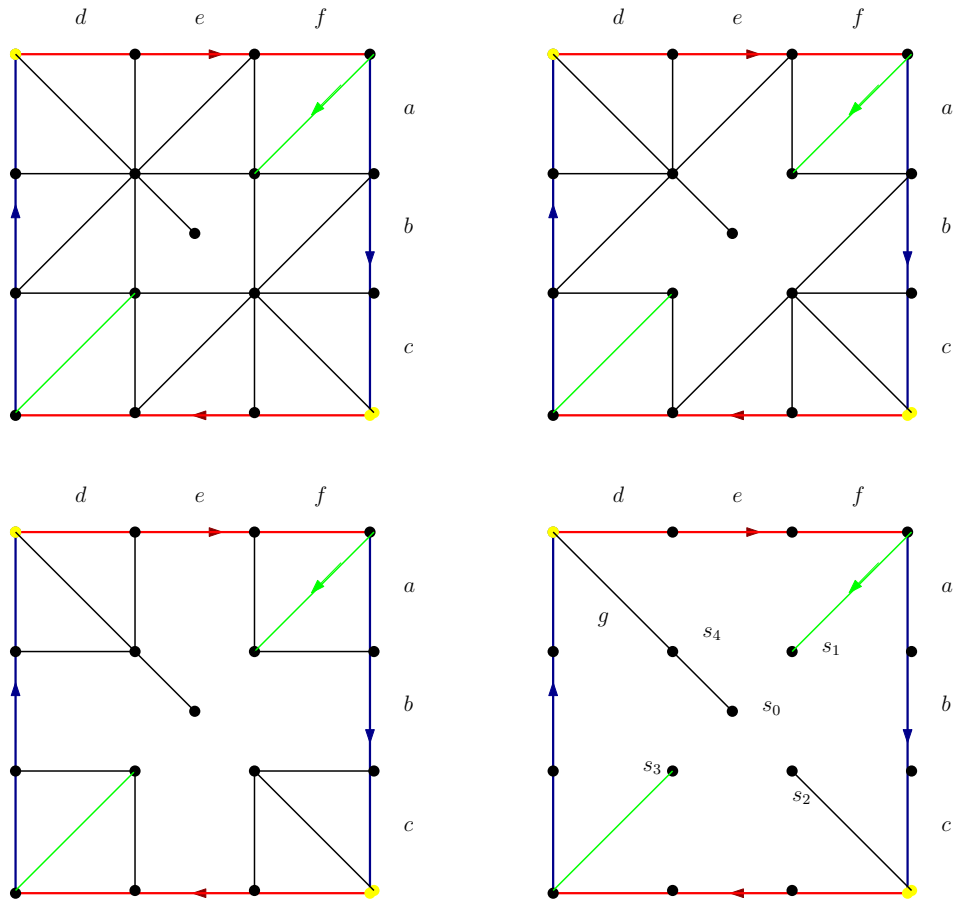


Figure 6: Des réductions successives montrant que modulo les bords, tout élément de  $C_1(P)$  est une combinaison linéaire des 1-simplexes dessinés dans la figure en bas à droite

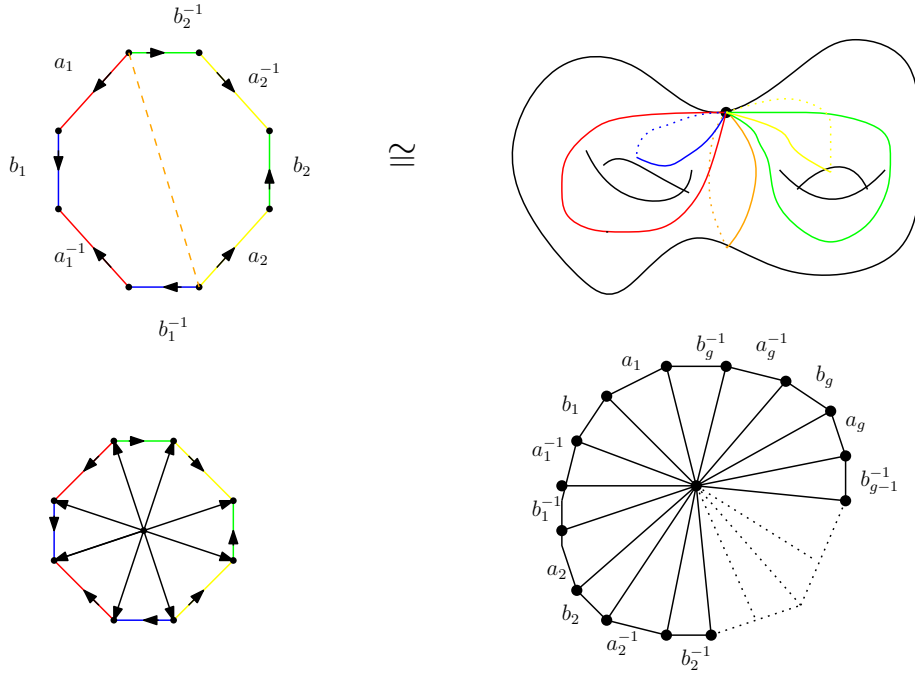


Figure 7: En haut: un recollement de deux tores d'où on a retiré un disque pour donner un tore "à 2 trous". En bas, à gauche une triangulation quasi-simpliciale de la surface de genre 2 du haut. A droite, un complexe quasi-simplicial triangulant un tore à  $g$  trous.

Un calcul similaire pour le Tore va donner que le noyau de  $C_1(T) \rightarrow C_0(T)$  est  $\mathbb{Z}(a+b+c) \oplus \mathbb{Z}(d+e+f)$  modulo les bords et que  $d(C_2(T))$  n'a pas d'image non-nulle dans  $\mathbb{Z}(a+b+c) \oplus \mathbb{Z}(d+e+f)$  et ainsi que  $H_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

**Conclusion:** On retrouve bien les mêmes résultats que dans la question 1 à savoir

$$H_i(T) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \geq 3, \end{cases} \quad H_i(\mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \geq 2. \end{cases}$$

**Remarque:** Si on remplace  $\mathbb{Z}$  par un corps  $\mathbb{F}$ , alors les calculs pour le Tore reste les mêmes et on obtient exactement les mêmes groupes d'homologie en remplaçant  $\mathbb{Z}$  par  $\mathbb{F}$ . *En revanche, les calculs changent pour le plan projectif.* En reprenant exactement les mêmes calculs que pour  $H_2(P)$ , on voit que  $H_2(P, \mathbb{F}) \cong 0$  si  $\mathbb{F}$  est de caractéristique différente de 2 mais que si  $\mathbb{F}$  est de caractéristique 2, alors la somme des triangles est un cycle et  $H_2(P, \mathbb{F}) \cong \mathbb{F}$ . Dans les deux cas, l'utilisation de la formule d'Euler-Poincaré nous dit que  $H_1(P, \mathbb{F}) = 0$  si la caractéristique de  $\mathbb{F}$  est différente de 2 et vaut  $\mathbb{F}$  sinon.

Ceci est un premier exemple typique d'espaces topologiques dont les groupes d'homologie (et les nombres de Betti) varient selon les coefficients que l'on prend.

- On construit des tores à  $g$ -trous (appelées surfaces de genre  $g$  en recollant des tores dont on a retiré un disque les uns avec les autres en recollant les cercles bordant les disques qu'on a retiré comme dans la figure (7). On note  $\Sigma_g$  cette surface et le complexe quasi-simplicial que nous lui associons. On obtient ainsi un  $4g$ -gone dont on a identifié les arêtes comme dans la figure (7), c'est à dire en reproduisant  $g$  fois un motif de la forme  $aba^{-1}b^{-1}$  où  $a, b$  sont des lacets et  $a^{-1}, b^{-1}$  les mêmes lacets parcourus dans le sens opposé (c'est à dire avec l'orientation inverse). On oriente les triangles via le sens trigonométrique. Ce modèle quasi-simplicial a donc 2 sommets,



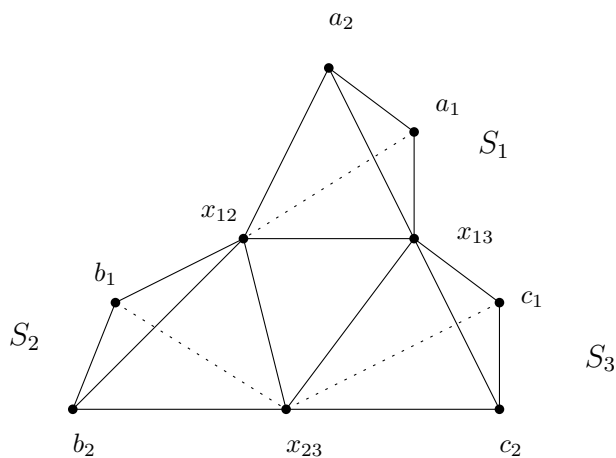


Figure 8: Un polyèdre représentant 3 sphères 2 à 2 tangentes

$4g$ -triangles et  $6g$ -arêtes ( $2g$  correspondant aux arêtes sur le bord après identifications, et  $4g$  à celles qui sont internes).

On peut maintenant calculer l'homologie de ce complexe quasi-simplicial comme pour les calculs dans la question précédente et la question 1. On voit ainsi que le seul 2-cycle possible est la somme de tous les triangles et que c'est effectivement un cycle, car, sur le bord la somme des arêtes fait 0 (en effet chaque arête sur le bord apparaît 2 fois, avec des orientations opposées). On en déduit que  $H_2(\Sigma_g) = \mathbb{Z}$ . Enfin, le même argument que dans la question précédente montre que tout cycle est égal, modulo un bord, à un cycle dont les seules arêtes avec un coefficient non-trivial sont sur le bord. Toute telle arête sur le bord est un cycle (car chaque  $a_i, b_i$  l'est). Et par ailleurs tout comme pour le tore ci-dessus, aucune combinaison linéaire d'arêtes du bord du  $4g$ -gone est dans l'image  $d(C_2(\Sigma_g))$ . Il suit que  $H_1(\Sigma_g) = \mathbb{Z}^{2g}$ . Enfin  $H_0(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}$  par connexité. Conclusion:

$$H_0(\Sigma_g, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_2(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}, \quad H_{i \geq 3}(\Sigma_g) \cong 0.$$

On peut noter que la caractéristique d'Euler de  $\Sigma_g$  est  $2(1 - g)$ .

**Remarque:** On verra en cours que de manière générale, l'homologie d'une triangulation quasi-simpliciale et celle d'une triangulation simpliciale sont toujours isomorphes. C'est une conséquence de leur identification avec l'homologie singulière.

**Exercice 3.** On considère trois sphères de dimension 2, notée  $S_1, S_2$  et  $S_3$  plongées dans  $\mathbb{R}^3$ . On suppose qu'elles sont deux à deux tangentes extérieurement et on note  $x_{ij} = S_i \cap S_j$ . Soit  $X = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ .

1. Construire un complexe simplicial  $K$  dont  $X$  est la triangulation.
2. Calculer les groupes d'homologie simpliciale de  $K$ .

**Solution 3.** 1. Étant donné qu'une triangulation de la sphère est donnée par le bord du simplexe de dimension (c'est à dire la réunion des faces d'un tétraèdre), on a un modèle simple donné comme dans la figure (8).

2. Le complexe simplicial  $K$  obtenu a 12 simplexes de dimension 2, correspondant aux faces de chaque tétraèdre, 18 arêtes et 9 sommets. Sa caractéristique d'Euler est donc de  $\chi = 9 - 18 + 12 = 3$ . Il est de plus connexe, d'où  $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ . Puisque il n'y a pas de simplexes de dimension 3 ou plus, on a  $C_{i \geq 3}(K) = 0$ . La seule différence avec le complexe simplicial correspondant à

la réunion disjointe de 3 sphères est que l'on a identifié certains sommets. Il suit que l'on a un morphisme de complexe simplicial  $T := S_1 \amalg S_2 \amalg S_3 \rightarrow K$  et donc un morphisme des complexes de chaînes associés:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C_2(\amalg_{i=1}^3 S_i) & \xrightarrow{d} & C_1(\amalg_{i=1}^3 S_i) & \xrightarrow{d} & C_0(\amalg_{i=1}^3 S_i) \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C_2(K) & \xrightarrow{d} & C_1(K) & \xrightarrow{d} & C_0(K) \end{array}$$

Ainsi,  $H_2(K) \cong H_2(\amalg S_i) \cong \oplus H_2(S_i) \cong \mathbb{Z}^3$  d'après le calcul de l'homologie de  $\partial\Delta^k$  en cours. En utilisant la formule d'Euler, on en déduit donc que  $H_1(K)$  est de rang  $1 + 3 - 3 = 1$ . Si on était sur un corps on pourrait s'arrêter là. Sur  $\mathbb{Z}$ , nous devons vérifier que nous n'avons pas de groupe de torsion. Déjà notons que  $[x_{12}, x_{13}] + [x_{13}, x_{23}] - [x_{12}, x_{23}]$  est un 1-cycle car

$$d([x_{12}, x_{13}] + [x_{13}, x_{23}] - [x_{12}, x_{23}]) = x_{13} - x_{12} + x_{23} - x_{13} - x_{23} + x_{12} = 0.$$

Montrons qu'à un bord près, un cycle est nécessairement un multiple de  $[x_{12}, x_{13}] + [x_{13}, x_{23}] - [x_{12}, x_{23}]$ . C'est à dire que si  $c$  est un cycle, alors il existe  $z \in C_2(K)$  tel que

$$c = n([x_{12}, x_{13}] + [x_{13}, x_{23}] - [x_{12}, x_{23}]) + d(z).$$

Ceci découle du fait que tout 1-cycle de  $S_1$  est de la forme  $p_1[x_{12}, x_{13}] + q_1[x_{12}, a_1] + r_1[x_{12}, a_2] + d(z_1)$ .

La preuve est similaire aux simplifications faites dans l'exercice 2. En effet, de  $d([x_{12}, a_1, a_2]) = [a_1, a_2] - [x_{12}, a_2] + [x_{12}, a_1]$  on déduit que  $[a_1, a_2] = [x_{12}, a_2] - [x_{12}, a_1] + d(y_1)$ . En regardant la face  $[x_{12}, x_{13}, a_2]$ , on montre que  $[x_{13}, a_2]$  s'écrit comme une combinaison linéaire de  $[x_{12}, x_{13}]$  et  $[x_{12}, a_2]$  à un bord  $dz'_1$  près. En regardant la face  $[x_{12}, x_{13}, a_1]$ , on obtient aussi que  $[x_{13}, a_1]$  est combinaison linéaire de  $[x_{12}, a_1]$  et  $[x_{12}, x_{13}]$  à un bord près. Ainsi on a bien montré que toute chaîne de  $S_1$  est de la forme  $p_1[x_{12}, x_{13}] + q_1[x_{12}, a_1] + r_1[x_{12}, a_2] + d(z_1)$ . En faisant de même pour les 3 sphères, on obtient que tout élément  $c$  de  $C_1(K)$  est de la forme

$$\begin{aligned} c = & p_1[x_{12}, x_{13}] + q_1[x_{12}, a_1] + r_1[x_{12}, a_2] + p_2[x_{12}, x_{23}] + q_2[x_{12}, b_1] + r_2[x_{12}, b_2] \\ & + p_3[x_{13}, x_{23}] + q_3[x_{13}, c_1] + r_3[x_{13}, c_2] + d(z) \end{aligned} \quad (0.4)$$

Si  $c$  est un cycle, c'est à dire  $d(c) = 0$ , on alors on obtient que les coefficients  $q_i, r_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont nuls car le coefficient devant les  $a_i, b_k, c_j$  doivent être nuls et ne sont atteints qu'une fois dans la différentielle. On obtient de même que  $p_1 = p_3 = -p_2$  ce qui conclut qu'à un bord près, un cycle est nécessairement un multiple de  $[x_{12}, x_{13}] + [x_{13}, x_{23}] - [x_{12}, x_{23}]$ .

Il reste à voir qu'aucun multiple  $n([x_{12}, x_{13}] + [x_{13}, x_{23}] - [x_{12}, x_{23}])$  avec  $n \neq 0$  n'est un bord pour conclure que  $H_1(K) = \ker(d)/\text{im}(d) \cong \mathbb{Z}([x_{12}, x_{13}] + [x_{13}, x_{23}] - [x_{12}, x_{23}])$ . Si  $n([x_{12}, x_{13}] + [x_{13}, x_{23}] - [x_{12}, x_{23}]) = d(z)$ , alors comme la différentielle sur chaque face de  $S_i$  ne s'envoie que sur des arêtes de  $S_i$ , il suit que nécessairement  $z$  est de la forme  $z_1 + z_2 + z_3$  avec  $z_i \in C_2(S_i)$  et  $d(z_i) = \pm n[x_{ij}, x_{ik}]$ . Or ceci est impossible car les  $[x_{ij}, x_{ik}]$  ne sont pas des cycles, a fortiori pas des bords.

**Exercice 4** (Constructions de triangulations élémentaires). 1. Trouver des triangulations du tore avec 7 sommets et de la sphère avec 4 sommets.

2. Soit  $\Delta^n$  un  $n$ -simplexe. Construire une triangulation du prisme  $\Delta^n \times [0, 1]$  ayant  $n + 1$ -simplexes de dimension  $n + 1$ .

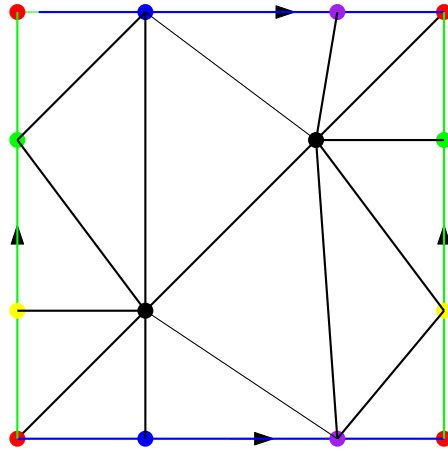


Figure 9: Subdivision du Tore avec 7 sommets. Il y a 5 sommets sur le bord (représenté par 5 couleurs différentes) et deux sommets noirs distincts sur la diagonale

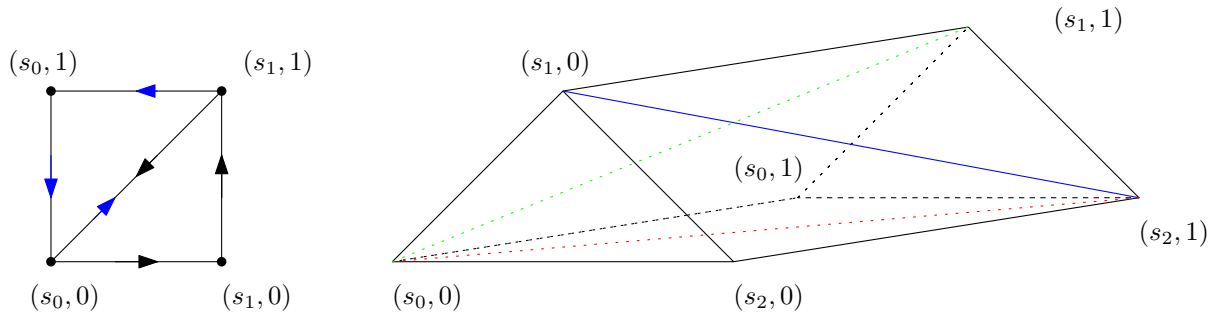


Figure 10: Subdivision du carré en deux simplexes (avec leur orientation) à gauche et subdivision du prisme de base  $\Delta^2$  à droite.

**Solution 4.** 1. Pour la sphère c'est facile, car la sphère est homéomorphe à la réalisation géométrique du complexe simplicial  $\partial\Delta^3$  donné par le simplexe standard de dimension 3 et toutes ses faces (itérées). Ce dernier a précisément 4 sommets. Pour le tore, une triangulation minimale de  $S^1$  a 3 sommets et en faisant  $S^1 \times S^1$  on aboutit à une triangulation avec 9 sommets, soit un peu trop. On peut cependant reprendre le complexe quasi-simplicial de l'exercice 2 et rajouter 2 sommet sur la diagonale et 1 sur chacune des arêtes pour obtenir la triangulation de la figure (9).

2. On renvoie au cours pour un dessin de cette triangulation du prisme: Concrètement: le prisme  $\Delta^n \times [0, 1]$  est plongé dans  $\mathbb{R}^{n+2}$  comme l'enveloppe convexe des points  $(s_0, 0), \dots, (s_n, 0), (s_0, 1), \dots, (s_n, 1)$  où les  $s_0, \dots, s_n$  les sommets de  $\Delta^n$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Quitte à composer par un isomorphisme affine on peut supposer que  $\Delta^n$  est le simplexe standard et donc que  $s_i = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0)$ . Pour  $i = 0, \dots, n$ , on définit les  $n + 1$ -simplexes

$$\sigma_i = \langle (s_0, 0), (s_1, 0), \dots, (s_i, 0), (s_i, 1), (s_{i+1}, 1), \dots, (s_n, 1) \rangle$$

par l'enveloppe convexe obtenue en prenant les  $i + 1$  premiers sommets de la forme  $(s_k, 0)$ , c'est à dire de dernière coordonnée nulle, puis les  $n + 1 - i$ -derniers de la forme  $(s_k, 1)$ . Autrement dit, seul le sommet  $s_i$  apparaît deux fois dans la liste. Ces simplexes sont bien de dimension  $n + 1$ , car les  $s_i$  forment une famille affinement indépendante. Ils sont tous inclus dans le prisme puisque ils sont une enveloppe convexe d'un sous-ensemble de sommets de ceux du prisme. En regardant dans cette base, on trouve que l'intersection de  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  (avec  $i < j$ ) est l'enveloppe convexe  $\sigma_i \cap \sigma_j = \langle (s_0, 0), \dots, (s_i, 0), (s_j, 1), \dots, (s_n, 1) \rangle$  de  $n + 1 - j + i$ -sommets; c'est le simplexe

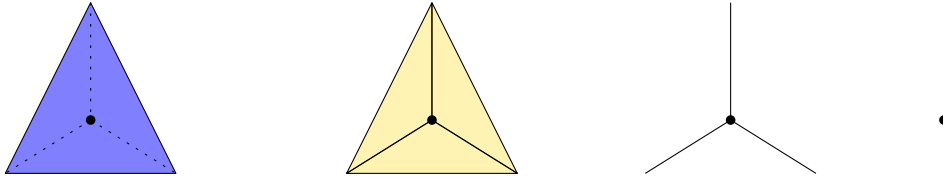


Figure 11: Collapse d'un 3-simplexe. On a commencé par collapser l'intérieur et la face avant du simplexe (en bleu dans la figure), puis les 3 faces jaunes... et deux sommets noirs distincts sur la diagonale

des sommets communs à  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  et ces simplexes sont de plus distincts. Il reste à voir que tout le prisme est couvert par la réunion de ces simplexes. C'est assez immédiat car en notant  $(x_0, \dots, x_n; \lambda)$  les coordonnées de  $\Delta^n \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{n+1} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{n+2}$ , pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , le  $i$ -ème simplexe  $d\sigma_i$  et la décomposition du prisme est constitué des points  $(x_0, \dots, x_n, \lambda)$  tels que

$$x_0 + \dots + x_i \leq \lambda \leq x_0 + \dots + x_{i+1}.$$

**Exercice 5** (Invariance par collapse). Soit  $K$  un complexe simplicial et on suppose donnés  $\tau$  un simplexe de dimension maximale dans  $K$ ,  $\sigma \subset \tau$  une face de  $\tau$  (obtenue en enlevant un sommet noté  $s$ ) vérifiant que  $\tau$  est la seule face de  $K$  contenant  $\sigma$  (dans cette situation, on dit que  $\tau$  est une face libre de  $K$ ). Le collapse de  $K$  par  $(\sigma \subset \tau)$  est le complexe simplicial  $c(K) := K \setminus \{\tau, \sigma\}$  en retirant les simplexes  $\tau$  et  $\sigma$  (mais en gardant bien sur toutes les sous faces).

1. Démontrer que l'inclusion  $c(K) \subset K$  induit un quasi-isomorphisme au niveau des complexes de chaînes; en particulier  $H_i(c(K)) = H_i(K)$  pour tout entier  $i$ .
2. Utiliser le résultat précédent pour calculer facilement l'homologie de  $\Delta^n$ .

**Solution 5.** C'est essentiellement un principe déjà vu dans l'exercice 2. On peut remarquer qu'un collapse est, au niveau de la réalisation géométrique est une rétraction par déformation forte du sous-complexe simplicial obtenu après le collapse dans le grand. Il est donc normal que l'homologie ne change pas si on sait déjà que l'homologie simpliciale est la même que l'homologie singulière qui est invariante par homotopie. L'exercice donne une preuve élémentaire de cette invariance en homologie.

1. On note que les complexes de chaînes  $C_*(K)$  et  $C_*(c(K))$  sont identiques en dehors des degrés  $n$  et  $n-1$  où  $n$  est la dimension de  $\tau$ . On a de plus  $C_n(K) = C_n(c(K)) \oplus \mathbb{Z}\tau$  et  $C_{n-1}(K) = C_{n-1}(c(K)) \oplus \mathbb{Z}\sigma$ . Comme  $\sigma$  n'est pas un simplexe de  $c(K)$  et apparaît avec le coefficient  $\pm 1$  dans la différentielle de  $\tau$ , on peut réécrire  $C_{n-1}(K)$  comme la somme directe  $C_{n-1}(K) = C_{n-1}(c(K)) \oplus \mathbb{Z}(\partial\tau)$  où  $\partial\tau = \sum_{\kappa \text{ face de } \tau} \pm \kappa$  est la différentielle du simplexe  $\tau \in C_n(K)$ . On en déduit alors un isomorphisme de complexes

$$(C_*(K), \partial) = (C_*(c(K)), \partial) \oplus (\tilde{C}_*(\tau), \partial)$$

où  $\tilde{C}_*(\tau)$  est le complexe qui est nul en degré différent de  $n, n-1$  et est de rang 1 sinon:  $\tilde{C}_n(\tau) = \mathbb{Z}\tau$  et  $\tilde{C}_{n-1}(\tau) = \mathbb{Z}\partial\tau$ . La différentielle  $\delta$  envoie  $\tau$  sur le générateur  $\partial\tau$ . C'est donc un isomorphisme et il suit que  $\tilde{C}_*(\tau)$  est un complexe avec une homologie nulle.

Par conséquent, l'inclusion  $C_*(c(K)) \hookrightarrow C_*(c(K)) \oplus \tilde{C}_*(\tau) = C_*(K)$  est un quasi-isomorphisme.

2. Le  $n$ -simplexe a ses  $n+1$ -faces qui sont libres. Son complexe de chaînes est donc quasi-isomorphe à celui du complexe simplicial obtenu par la réunion de ses faces sauf la dernière, cf figure (11). C'est une réunion de  $n-1$ -simplexes avec exactement  $n$ -faces libres. Pour conclure, soit on utilise un raisonnement par récurrence, soit on remarque qu'on peut collapser ces faces pour obtenir un bouquet de  $n-2$ -simplexes. Qui ont chacun des faces libres... En itérant on obtient un nombre fini de collapse nous ramenant à un point !

**Exercice 6** (Invariance du simplexe par subdivision). Soit  $K$  le complexe simplicial associé<sup>2</sup> à un simplexe  $\Delta^n$  de dimension  $n$  et  $K'$  une subdivision de  $K$ .

1. Montrer qu'il existe une subdivision  $K''$  de  $K'$  et un sommet  $x$  de  $K$  tel que on peut réduire par une suite de collapse  $K''$  à la face opposée à  $x$ . (Attention, en revanche,  $K'$  peut ne pas être collapsable même si c'est contre-intuitif).
2. Démontrer que le morphisme de complexe  $C_*(K) \rightarrow C_*(K'')$  est un quasi-isomorphisme.
3. En déduire que le morphisme de complexe  $C(K) \rightarrow C(K')$  donné par la subdivision est une injection en homologie.
4. *Cette question est beaucoup plus difficile.* On suppose avoir démontré que le morphisme de subdivision est un quasi-isomorphisme pour tout simplexe de dimension  $\leq n - 1$ . En déduire que le morphisme de chaînes  $C(K) \rightarrow C(K')$  donné par la subdivision est un quasi-isomorphisme.

*Remarque:* ceci est une première étape pour démontrer en utilisant des outils purement des complexes simpliciaux l'invariance par triangulation de l'homologie simpliciale (via une récurrence sur leur dimension bien entendu), que nous démontrerons via l'homologie singulière en cours.

**Solution 6.** Il est évidemment assez naturel de penser que toute triangulation de  $\Delta^n$  ou d'un cube de dimension  $n$  est collapsable au sens de l'exercice 5 et Poincaré ne s'est d'ailleurs pas posé de questions, en tout cas semble faire comme si... Ce n'est pourtant *pas* le cas, la maison de Bing fournit un contre-exemple. De même, le bonnet d'âne (comme vu dans cette feuille et dans celle sur l'homotopie), bien que contractile, n'est pas collapsable.

1. Une fois orienté notre complexe  $\Delta^n$  est affinement isomorphe au simplexe standard et on peut le supposer plongé dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  de sorte que le dernier sommet  $s_n$  est celui correspondant à  $(0, \dots, 0, 1)$ . On définit la verticale comme la droite engendrée par ce vecteur et orthogonale à  $\partial_n \Delta^n = \Delta^{n-1} \times \{0\}$ . On note  $K'_0$  la triangulation de  $\Delta^{n-1} \times \{0\}$  donnée par la restriction de celle de la subdivision  $K'$  à cette face. En particulier  $K'_0$  est une subdivision de  $\Delta^{n-1}$ .

On a envie de définir le collapse en collapsant les simplexes verticalement, de haut en bas jusqu'à aboutir à  $K'_0$ , notre subdivision de  $\Delta^{n-1} \times \{0\}$ . Pour faire cela, la seule difficulté est d'assurer que la projection verticale est affine (de sorte qu'on peut effectivement définir les simplexes à collapser verticalement dans l'ordre au dessus de chaque simplexe de la base  $K'_0$ ). Ce n'est pas nécessairement le cas pour  $K'$ , mais si  $\sigma$  est une face de  $K'_0$ , on peut trianguler  $\pi^{-1}(\sigma) \subset \Delta^n$  (qui est une enveloppe convexe) de sorte que la réunion de ces subdivisions soit une subdivision de  $K'$  (et donc de  $K$ ).

On note  $K''$  cette subdivision. On peut maintenant collapser au dessus de chaque simplexe de la restriction  $K''_0$  de  $K''$  à  $\Delta^{n-1} \times \{0\}$  du plus haut simplexe au plus bas.

2. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_*(K''_0) & \hookrightarrow & C_*(K'') \\ \uparrow & & \uparrow \\ C_*(\Delta^{n-1} \times \{0\}) & \hookrightarrow & C_*(K) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les morphismes induit par les triangulations et les horizontales celles induites par les inclusions de la face inférieure du simplexe. D'après l'exercice 5, chaque collapse induit un quasi-isomorphisme. En particulier,  $C_*(\Delta^{n-1} \times \{0\}) \hookrightarrow C_*(\Delta^n) = C_*(K)$  et l'inclusion  $C_*(K''_0) \hookrightarrow C_*(K'')$  sont des quasi-isomorphismes. Il suffit donc de montrer que la flèche de gauche  $C_*(\Delta^{n-1} \times \{0\}) \cong C_*(\Delta^{n-1}) \rightarrow C_*(K''_0)$  est un quasi-isomorphisme; ce qui

<sup>2</sup>c'est à dire que  $K$  est composé de  $\Delta^n$  et de toutes ses faces

revient ici à montrer que l'homologie de  $K^{\prime\prime}_0$  est nulle sauf en degré 0. Quitte à réitérer un nombre fini de fois la construction de la construction précédente, on peut supposer que  $K^{\prime\prime}_0$  aussi se collapsait sur  $K^{\prime\prime} \cap \Delta^{n-2} \times \{(0,0)\}$  et ainsi de suite jusqu'à collapser sur un eul point. On en déduit alors que l'on a pu choisir  $K^{\prime\prime}$  dans la question 1 de sorte que  $H_*(K^{\prime\prime})$  soit nul en toute degré et vaille  $\mathbb{Z}$  (ce qui est forcé par connexité) en dimension 0. Il en suit que le morphisme de complexes de chaînes donné par la triangulation  $C_*(K) \rightarrow C_*(K^{\prime\prime})$  est bien un quasi-isomorphisme.

3. On a une suite de morphismes de complexes  $C_*(K) \rightarrow C_*(K') \rightarrow C_*(K'')$  dont la composée est un quasi-isomorphisme. Ainsi les applications induites  $H_i(K) \rightarrow H_i(K')$  sont injectives et les applications induites  $H_i(K') \rightarrow H_i(K'')$  sont surjectives.
4. Par la question précédente, il nous suffit de montrer que  $H_i(K') \rightarrow H_i(K'')$  est un isomorphisme. Puisque que l'on sait déjà que c'est une surjection, il nous suffit maintenant de montrer le lemme suivant pour conclure.

**Lemme 1.** Si  $T'$  est une subdivision quelconque d'une triangulation  $L$  du simplexe standard  $\Delta^n$ , alors  $H_i(L) \rightarrow H_i(L')$  est une injection.

L'idée va être de "repousser" le problème au bord du simplexe (qui est de codimension 1) et d'appliquer l'hypothèse "de récurrence".

**Preuve du Lemme.** Notons  $T : C_*(L) \rightarrow C_*(L')$  le morphisme canonique comme dans le cours. Il faut précisément montrer que si  $c_i \in Z_i(T)$  et  $T(c_i) = d(c'_{i+1})$  où  $c'_{i+1} \in C_{i+1}(L')$ , alors il existe  $c_{i+1} \in C_{i+1}(L)$  tel que  $d(c_{i+1}) = c_i$ . Dans la suite nous identifions en général les simplexes  $\sigma$  de  $L$  avec leur image  $T(\sigma)$  dans  $L'$  sans autre forme de procès.

**Étape 1: réduction au cas maximal.** On commence par se ramener à trouver un  $c'_{i+1}$  qui est combinaison linéaire de simplexes de dimensions maximales au sens suivant: quel que soit  $\tau' \in L'^{(i+1)}$ , il existe *un unique* simplexe  $\tau$  dans  $L$  de dimension minimale tel que  $\tau' \subset \tau$ . Cela découle de la définition d'une subdivision. On notera  $h_{\tau'} := \dim(\tau)$  ( $h$  pour "hauteur"). Par définition  $h_{\tau'} \geq i + 1$ . On dira que  $\tau'$  est maximal si  $\dim(\tau') = h_{\tau'}$ , autrement dit dans notre exemple si  $h_{\tau'} = i + 1$ .

On cherche donc à se ramener à  $c''_{i+1}$  qui ne soit combinaison linéaire que de simplexes maximaux de  $L'^{(i+1)}$  et tel que  $d(c''_{i+1}) = d(c'_{i+1}) = c_i$ . On écrit  $c'_{i+1} = \sum_{\tau' \in L'^{(i+1)}} x_{\tau'} \tau'$  et on pose

$$h_{c'_{i+1}} = \max(h_{\tau'} | \tau' \in L'^{(i+1)} \text{ et } x_{c'_{i+1}} \neq 0).$$

**Étude du bord des simplexes non-maximaux:** soit  $h_{c'_{i+1}} > i + 1$  (si  $h_{c'_{i+1}} = i + 1$ , on a rien à faire et on zappe cette étape) prenons un  $\tau'_0$  tel que  $x_{\tau'_0} \neq 0$  et  $h_{\tau'_0} = h_{c'_{i+1}}$ . Soit  $\tau_0 \subset L$  le simplexe de dimension  $h_{c'_{i+1}}$  qui contient  $\tau'_0$ . On peut maintenant faire la remarque suivante:  $d(T(\tau_0))$  est une combinaison linéaire de simplexes de  $L'$  contenus dans  $\partial\tau_0$ . En effet, comme  $d(c'_{i+1}) = d(c_{i+1})$ , on a

$$d(T(\tau_0)) = d(c'_{i+1}) + d(T(\tau_0) - c'_{i+1}) = d(c_{i+1}) + d(T(\tau_0) - c'_{i+1})$$

or comme  $T$  est un morphisme de complexe, le membre de gauche est constitué d'une combinaison linéaire de simplexes de  $L'$  qui sont tous inclus dans  $\tau_0$ . Le premier terme du membre de droite est combinaison linéaire de simplexes de  $L$  et le deuxième est une combinaison linéaire de simplexes de  $L'$  inclus dans des simplexes de  $L$  de dimension  $\leq h_{\tau'_0}$  et distincts de  $\tau_0$ . Par indépendance linéaire des simplexes, on en déduit que  $d(T(\tau_0))$  est dans le sous-module engendré par les simplexes de  $\partial\tau_0$ .

**Utilisation du résultat en dimension  $< n$ .** Les simplexes du bord de  $\tau_0$  sont une triangulation d'une sphère de dimension  $\dim(\tau_0) - 1 = h_{\tau_0} - 1 < n$ . L'hypothèse faite nous assure que la restriction au bord du morphisme de complexe induit par la triangulation est un quasi-isomorphisme, et donc que l'homologie de la triangulation du bord de  $\tau$  induite par  $T'$  est celle de  $\partial\Delta^{h_{\tau_0}}$  qui n'a pas d'homologie en degré différent de 0,  $h_{\tau_0} - 1$ . Or  $i < h_{\tau_0} - 1$  et donc, le cycle  $d(T(\tau_0))$  est le bord  $d(\alpha(\tau'_0))$  d'une chaîne incluse dans le bord de  $\tau_0$ . En particulier, on a pu remplacer  $\tau'_0$  par une chaîne dont on a augmenté le coefficient  $h$  et qui a la même différentielle que lui. En itérant, on se ramène à un  $c'_{i+1}$  qui est combinaison linéaire de simplexes de dimension maximale au sens énoncé.

**Étape 2: étude des coefficients  $x_{\tau'}$ .** Par les résultats précédents, on est ramené au cas  $c_i = d(c'_{i+1})$  avec  $c'_{i+1} = \sum_{\tau' \in L^{(i+1)}} x_{\tau'} \tau'$  où  $h_{\tau'} = i + 1$  et chaque  $x_{\tau'} \neq 0$  (sinon on l'a de toutes façons enlevé...). *Démontrons que si, dans cette somme,  $\tau'_1$  et  $\tau'_2$  sont toutes les deux incluses dans un même  $i + 1$ -simplexe  $\tau$  de  $L$ , alors  $x_{\tau'_1} = x_{\tau'_2}$ .*

Il suffit de regarder la chaîne  $x = \sum_{\tau' \subset \tau} x_{\tau'} \tau'$  dont la différentielle est une somme de simplexes inclus dans le bord  $\partial\tau$  comme on l'a vu dans l'étape étude du bord des simplexes non-maximaux. Ainsi, lorsque on prend la différentielle de  $x$ , deux simplexes de  $T'$  avec une face en commun doivent avoir le même coefficient. Et on en déduit par connexité que les  $x_{\tau'}$  sont bien tous égaux.

**Étape 3.** Notons maintenant simplement  $x_\tau$  la valeur commune des  $x_{\tau'}$  pour tous les  $\tau'$  inclus dans un  $i + 1$ -simplexe  $\tau$  de  $L$  (c'est à dire les  $\tau'$  dont le simplexe minimal de  $L$  le contenant est  $\tau$ ). Et notons

$$c_{i+1} := \sum x_\tau \tau \in C_{i+1}(L).$$

On a alors  $d(c_{i+1}) = d(c'_{i+1}) = c_i$  ce qui montre que la classe de  $c_i$  est nulle en homologie. Le lemme et la question sont donc démontrés.