

## HOMOLOGIE SINGULIÈRE ET APPLICATIONS

**Exemples et constructions**

**Exercice 1.** Calculer les groupes d'homologie des espaces suivants  $X$ :

1.  $X$  est un un cornet de glace avec une boule, puis  $X$  est le même cornet où on a (malheureusement) remplacé la glace par une balle de tennis.
2.  $X = \Sigma(S^1 \vee S^1 \vee S^2)$  où  $\Sigma : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$  est la suspension.
3.  $X = S^n \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ .

**Solution 1.** 1. La différence (envisagée) dans l'énoncé est que la glace est pleine et que la balle de tennis est creuse. Il suit que par contractibilité de la boule que le cornet de glace avec une boule est homotope à une sphère alors que le deuxième cas est homotope à une sphère avec une membrane au milieu ce qui est homotope à un bouquet de deux sphères. Ainsi  $\tilde{H}_i(X) \cong 0$  pour  $i \neq 2$  et respectivement  $\tilde{H}_2(X) \cong \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  dans le cas du cornet avec une boule et dans le cas de celui d'une balle.

Bien sûr, dans le cas de la glace, si on la laisse fondre, on obtient un espace contractile (en plus d'avoir en partie gâché sa glace).

2. On utilise les résultats du cours. Tout d'abord on a pour tout  $Y \in \mathbf{Top}$  que  $\tilde{H}_*(\Sigma Y) \cong \tilde{H}_{*-1}(Y)$ . La suspension étant connexe, ceci détermine tous les groupes d'homologie. Puis on a que  $\tilde{H}(S^1 \vee S^1 \vee S^2) \cong \tilde{H}_*(S^1) \oplus \tilde{H}_*(S^1) \oplus \tilde{H}_*(S^2)$ . Ainsi, en utilisant les groupes d'homologie des sphères on obtient

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}, H_1(X) = 0, H_2(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, H_3(X) \cong \mathbb{Z}.$$

3. On suppose  $n \geq 2$  (sinon on a pas grand chose à faire et on le laisse au lecteur). On note que  $S^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n$  est contractile. Par ailleurs  $S^n \setminus \{x_1, x_2\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{x_2\} \simeq S^{n-1}$  d'où  $H_i(X) \cong \mathbb{Z}$  si  $i = 0, n-1$  et 0 sinon. De manière générale, on peut voir que  $S^n \setminus \{x_1, \dots, x_k\} \simeq \bigvee_{i=2}^k S^{n-1}$ . On peut aussi, si on ne le voit pas, utiliser Mayer-Vietoris. On prend un disque  $D_k$  centré sur  $x_k$  et qui n'intersecte pas les autres points. On a alors une longue suite exacte de Mayer Vietoris associée à  $(S^n \setminus \{x_1, \dots, x_k\}, D_k)$  pour le recouvrement  $S^n \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ . L'intersection des deux ouverts est homotope à  $S^{n-1}$  et  $D_k$  est contractile. Cela donne, sachant que les espaces en question sont tous connexes par arcs, et que la suite exacte de Mayer Vietoris donne donc dans ce cas une suite exacte au niveau des groupes d'homologie réduite:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \tilde{H}_i(X) \oplus 0 \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\}) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \\ \dots \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(X) \oplus 0 \rightarrow \dots \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement par récurrence que  $H_{n-1}(X) \cong \bigoplus_{i=1}^{k-1} \mathbb{Z}$ ,  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$  et  $H_i(X) \cong 0$  si  $i \neq 0, n-1$ .

**Exercice 2 (Bouteille de Klein).** Soit  $K$  l'espace topologique, appelé *bouteille de Klein*, obtenu comme le quotient du plan  $\mathbb{R}^2$  par les transformations affines  $\alpha(x, y) = (x+1, y)$  et  $\beta(x, y) = (1-x, y+1)$ .

- 1) Calculer les groupes d'homologie  $H_*(K, \mathbb{Z})$  et  $H_*(K, \mathbb{R})$  en utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris.

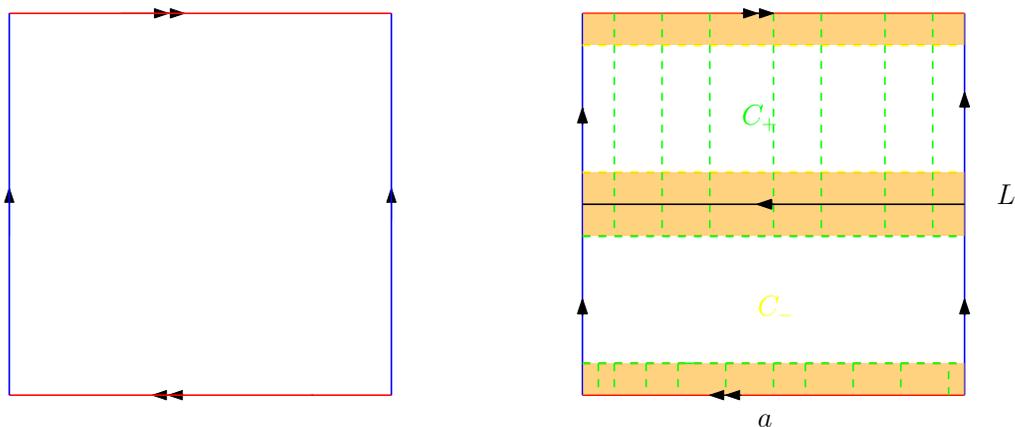


Figure 1: La bouteille de Klein. À droite son recouvrement par deux cylindres  $C_+$  et  $C_-$  dont l'intersection a été dessinée en orange. La partie correspondant à  $C_+$  est hachurée en vert

- 2) Calculer les groupes d'homologie de la bouteille de Klein en utilisant un modèle quasi-simplicial et comparer.

**Solution 2.** 1. Rappelons que  $K^2$  est homéomorphe au carré  $[0, 1]^2$  où on a recollé les bords gauche et droite et recollé les bords inférieurs et supérieurs mais en changeant le sens, cf figure 2. On note  $p : [0, 1]^2 \rightarrow K^2$  l'application induite. On va appliquer la suite exacte de Mayer-Vietoris. Pour cela on découpe  $K^2$  en deux ouverts de la façon suivante. On note respectivement  $C_+$  et  $C_-$  les images dans  $K^2$  des rectangles  $[0, 1] \times ]2/5, 1]$  et  $[0, 1] \times [0, 3/5[$ . Leur intersection  $C_+ \cap C_-$  est constituée de deux bandes, l'une homotope à l'image  $L$  dans  $K^2$  du segment  $[0, 1] \times 1/2$  (qui est un cercle) et l'autre homotope au lacet donné par l'image du bord supérieur du carré dans  $K^2$ . Par conséquent  $C_+ \cap C_- \simeq S^1 \amalg S^1$  est homotope à une réunion disjointe de deux cercles. On note  $a$  le lacet correspondant à l'image du bord bas du carré (avec l'orientation comme sur le dessin qui est la même que celle de  $L$ ). Remarquons aussi que  $C_+$  et  $C_-$  sont homéomorphes à des carrés dont les bords gauche et droite ont été recollés. Ce sont donc des cylindres et par conséquent ils sont eux aussi homotopes au cercle  $L \cong S^1$ .

Calculons la flèche  $H_1(C_+ \cap C_-) \rightarrow H_1(C_+) \oplus H_1(C_-)$  dans la longue suite exacte. Rappelons que celle-ci est donnée par  $i_+ - i_-$  où  $i_{\pm}$  sont les applications linéaires induites en homologie par les inclusions respectives  $C_+ \cap C_- \hookrightarrow C_{\pm}$ . L'inclusion  $L \amalg a \hookrightarrow C_+ \cap C_-$  est une équivalence d'homotopie et les inclusions  $L \hookrightarrow C_{\pm}$  aussi. Dans  $C_-$ , l'image du lacet  $a : S^1 \rightarrow K^2$  est homotope à  $L$  (il suffit de la traduire verticalement). En revanche le bord supérieur de  $C_+$  est  $p([0, 1] \times \{1\}) \cong S^1$  qui est identifié à  $p([0, 1] \times \{0\}) \cong S^1$  via l'application  $a : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $\theta \mapsto -\theta$ . Il nous faut donc calculer  $a_* : H_*(S^1) \rightarrow H_*(S^1)$ . En degré 0, cette application est l'identité (puisque'elle envoie la seule composante connexe de  $S^1$  sur elle-même) et en degré  $> 1$ , les groupes d'homologie sont nuls. Il n'y a donc que le degré 1 à calculer. Le théorème d'Hurewicz identifie l'homologie au groupe fondamental (qui est abélien ici). Et on en déduit immédiatement que cette application est  $-\text{Id}$  en degré 1.

**Calcul de  $a_*$  sans utiliser Hurewicz:** à titre pédagogique, on donne aussi une preuve qui n'utilise pas Hurewicz. Bien que plus compliquée dans ce cas précis, elle a le mérite d'illustrer un principe qui se retrouve dans d'autres cas et en dimension plus grande. Et peut être utilisé pour calculer l'image de l'application antipodale sur les sphères par récurrence. Démontrons maintenant que  $H_1(a) = \text{Id}$ . On applique Mayer-Vietoris à  $S^1$ , identifié au quotient  $[0, 1]/(0 \sim 1)$ , qui est alors recouvert par les ouverts  $[0, 2/3[$  et  $]1/3, 1]$  dont l'intersection est homotope à deux points. Clairement,  $a$  échange les deux intervalles  $[0, 2/3[$  et  $]1/3, 1]$ , qui sont contractiles. On a

donc un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc}
H_0([0, 2/3]) \oplus H_0([1/3, 1]) & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \cong & H_0(\{0\}) \oplus H_0(\{1/2\}) \xleftarrow{\quad} H_1(S^1) \xleftarrow{\quad} 0 \\
& & \downarrow a_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & \downarrow a_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & \downarrow a_* \\
H_0([0, 2/3]) \oplus H_0([1/3, 1]) & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \cong & H_0(\{0\}) \oplus H_0(\{1/2\}) \xleftarrow{\quad} H_1(S^1) \xleftarrow{\quad} 0
\end{array}$$

En particulier on identifie  $H^1(S^1) \cong \mathbb{Z}(1, -1)$  (c'est à dire le noyau de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ). On a alors que  $a_*(1, -1) = (-1, 1) = -(1, -1)$ , c'est à dire  $a_* = -\text{id} : \mathbb{Z} \cong H_1(a) \rightarrow H_1(C_+) \cong \mathbb{Z}$ .

**Retour au calcul.** On peut (enfin !) calculer la suite exacte longue de Mayer Vietoris en homologie. En utilisant que  $H_1(L) \cong H_1(a) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$  et que  $a_* = -\text{Id}$ , on trouve :

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \leftarrow H_1(K^2) \leftarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \leftarrow H_2(K^2) \leftarrow 0 \leftarrow \dots$$

On note  $\varphi$  l'application  $\varphi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Clairement  $\varphi$  est injective (car elle l'est sur  $\mathbb{R}$  puisque de déterminant égal à  $-2$ ). Il suit que  $H_2(K^2) \cong 0$ . Le conoyau  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \text{im}(\varphi)$  de cette application est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ce qu'on voit en remarquant que  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}(1, 1) \oplus \mathbb{Z}(0, 1)$  et qu'un élément de la forme  $(0, n)$  est dans  $\text{im}(\varphi)$  si et seulement si  $n$  est pair.

Enfin, l'application  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  a pour noyau  $\mathbb{Z}$  (engendré par  $(1, -1)$ ). Il suit des remarques précédentes que  $H_1(K_2)$  est inclus dans une suite exacte courte

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow H_1(K^2) \leftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow 0$$

d'où  $H_1(K^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Dans le cas de  $\mathbb{R}$ , on peut faire des calculs similaires et une matrice de déterminant non-nul étant inversible, on obtient que  $H_2(K^2) \cong 0$  et  $H_1(K^2) \cong \mathbb{R}$ .

**Autre découpage pour Mayer-Vietoris.** Il y avait bien sûr plusieurs façons de découper la bouteille de Klein. Une autre méthode est de considérer un carré ouvert  $\tilde{C}$  interne et un complémentaire  $W$  d'un sous-carré fermé de  $\tilde{C}$  comme dans la figure (??). On a évidemment que  $\tilde{C}$  est contractile, que l'intersection  $W \cap \tilde{C}$  est une couronne dans  $\mathbb{R}^2$  et est donc un rétracte d'un cercle (représenté en vert), noté  $v$ . Enfin,  $W$  est le quotient d'une couronne de  $\mathbb{R}^2$  (obtenu en quotientant les lacets comme pour  $K$ ). Le rétracte par déformation *forte* standard qui envoie une couronne sur son bord (ici extérieur)—qui est essentiellement le même que le rétracte par déformation standard de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  sur  $S^{n-1}$ —passe au quotient (notons que le fait que la rétraction soit forte est utilisé ici). Ainsi  $W$  est homotope à son bord qui est le bouquet  $r \vee b$  des deux cercles donnés par le bord de  $K$  (on note  $r$  le cercle rouge et  $b$  le cercle bleu). La suite exacte de Mayer Vietoris nous donne immédiatement que  $H_{i \geq 3}(K, R) = 0$  (car les groupes d'homologie de  $W$ ,  $\tilde{C}$  et leur intersection sont tous nuls en degré 2 et plus. Sachant que  $H_1(\tilde{C}) = 0$ ,  $H_1(b \vee r, R) = R \oplus R$ ,  $H_1(v, R) = R$  et que les  $H_0$  de ces espaces valent  $R$  par contractibilité, a seule partie non-triviale est la suite exacte:

$$0 \leftarrow R \leftarrow R \oplus R \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \leftarrow R \xleftarrow{\delta_1} H_1(K^2) \leftarrow R \oplus R \xleftarrow{H_1(\iota)} R \xleftarrow{\delta_2} H_2(K^2) \leftarrow 0$$

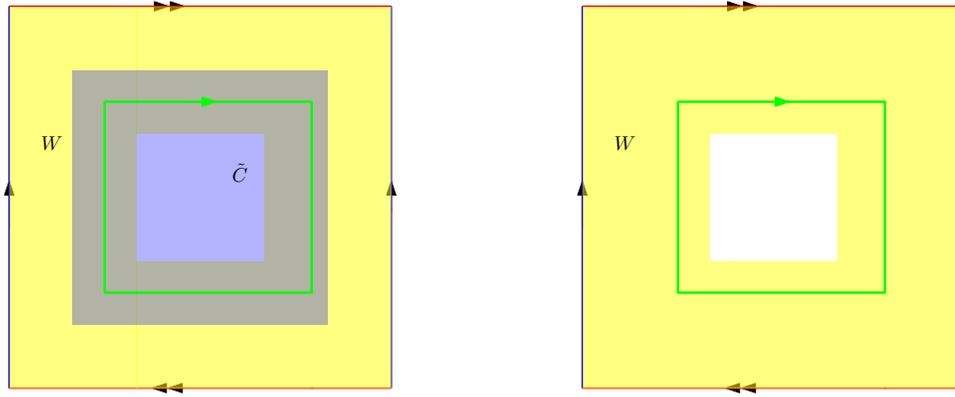


Figure 2: Recouvrement de la bouteille de Klein par un disque topologique  $\tilde{C}$  (en bleu) et une couronne  $W$  (en jaune). En vert est représenté un lacet sur lequel se rétracte par déformation l'intersection  $W \cap \tilde{C}$ . À droite, on a représenté uniquement  $W$ , qui se rétracte par déformation sur son bord (c'est un quotient d'une couronne dans  $\mathbb{R}^2$ ).

On a noté ici  $\iota : W \cap \tilde{C} \hookrightarrow W$  l'inclusion. Par ailleurs on a utilisé que les espaces sont tous connexes par arcs ce qui a donné le calcul de  $H_0(\iota)$  et  $H_0(W \cap \tilde{C} \hookrightarrow \tilde{C})$  utilisé à gauche.

On a en particulier immédiatement que la partie correspondant à l'homologie en degré 0 est en fait exacte et que  $\delta_1$  est donc l'application nulle (son image est le noyau de l'application injective

$R \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow R \oplus R$ ). Comme  $\delta_2$  est injective, on obtient de l'exactitude que  $H_2(K^2, R)$  est le noyau de  $H_1(\iota)$  et  $H_1(K^2, R)$  est son conoyau (c'est à dire le quotient par son image).

Pour calculer  $H_1(\iota, R)$  le plus simple est encore d'utiliser le théorème d'Hurewicz<sup>1</sup>. On a que la rétraction par déformation envoie  $v$  sur le tour du bord de  $W$ . Avec les orientations choisies, on obtient que  $H_1(\iota)(v) = r - b + r + b = 2r$ . Et on obtient

$$H_1(K, R) = R \oplus R / 2R, \quad H_2(K, R) = \ker(R \xrightarrow{2*} R)$$

ce qui redonne bien les résultats obtenus pour  $R = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ .

- On utilise maintenant un modèle quasi-simplicial  $K$  comme dans la figure 3 qui a un seul sommet  $s$ , 3 arêtes, dénotées  $b, r, j$  (de couleur respectives bleue, rouge, jaune) et 2 triangles  $H, B$ . Le tout orienté comme sur la figure. On note que la caractéristique d'Euler est  $1 - 3 + 2 = 0$ . On a alors que  $C_{i \geq 3}(K) = 0$  d'où  $H_{i \geq 3}(K) = 0$ . On a aussi  $d(H) = b + r + j$  et  $d(B) = -b + r - j$ . Ces deux vecteurs étant linéairement indépendants sur  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{R}$  on en déduit que  $H_2(K) \cong 0 \cong H_2(K, \mathbb{R})$ . Si on est à coefficient dans  $\mathbb{R}$ , sachant que  $H_0(K, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$  et la caractéristique d'Euler nulle, on en déduit que  $H_1(K, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ . Calculons maintenant sur  $\mathbb{Z}$ . Par ailleurs  $d(b) = s - s = 0$ ,  $d(r) = d(j)$ , donc  $Z_1(K) = C_1(K) = \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}r \oplus \mathbb{Z}j$ . Vu notre calcul sur le bord des 2 cellules, on a alors que  $r$  est homologue à  $b + j$ . On a alors

$$\mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}r \oplus \mathbb{Z}j / d(\mathbb{Z}B \oplus \mathbb{Z}H) \cong \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}r / (d(\mathbb{Z}B \oplus \mathbb{Z}H) \cap (\mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}r)) \cong \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}r / 2\mathbb{Z}(b+r) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$$

en notant que  $\mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}r = \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}(b+r)$ . On a bien retrouvé les résultats précédents.

<sup>1</sup>et les coefficients universels puisque  $R$  est quelconque. Mais comme les groupes considérés ici sont libres sur  $\mathbb{Z}$ , cette opération est triviale: on remplace  $\mathbb{Z}$  par  $R$ .

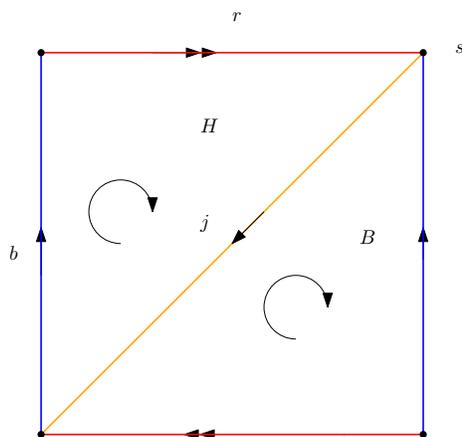


Figure 3: un modèle quasi-simplicial de la bouteille de Klein

*Remarque* : on peut vérifier<sup>2</sup> que la caractéristique d'Euler de la bouteille de Klein est bien la même sur  $\mathbb{Z}$  et sur  $\mathbb{R}$  bien que les nombres de Betti, eux, changent.

**Exercice 3 (Espaces projectifs complexes).** Rappelons que l'espace projectif complexe de dimension  $n$  est le quotient  $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \mathbb{C} - \{0\} \cong S^{2n+1} / S^1$ . On note  $[z_0, \dots, z_n]$  la classe de  $[z_0, \dots, z_n] \neq 0$  dans  $\mathbb{C}P^n$  (par définition  $[z_0, \dots, z_n] = [\lambda z_0, \dots, \lambda z_n]$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ). Les inclusions canoniques  $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^i = \mathbb{C}^{n+i}$  induisent des morphismes continus  $\mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^{n+i}$ . on notera  $p : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  la projection canonique.

1. Montrer que pour tout  $k = 1 \dots n$ , le sous-ensemble  $U_k = \{[z_0, \dots, z_n] \mid z_k \neq 0\}$  est ouvert et homéomorphe à  $\mathbb{C}^n$ . Montrer que  $\mathbb{C}P^n - U_n \cong \mathbb{C}P^{n-1}$ .
2. Soit  $f : D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  l'application  $(z_0, \dots, z_{n-1}) \mapsto [z_0, \dots, z_{n-1}, \sqrt{1 - (|z_0|^2 + \dots + |z_{n-1}|^2)}]$ . Montrer que  $f(\partial(D^{2n})) \subset \mathbb{C}P^n - U_n$  et que  $f|_{D^{2n} - \partial(D^{2n})}$  est injective à valeur dans  $U_n$ . On note  $f_0 = f|_{\partial(D^{2n})} : \partial(D^{2n}) \rightarrow \mathbb{C}P^n - U_n \cong \mathbb{C}P^{n-1}$ . Montrer que  $f_0$  est surjective et en déduire que  $\mathbb{C}P^n$  est le recollement  $D^{2n} \cup_{f_0} \mathbb{C}P^{n-1}$ .
3. Calculer les groupes d'homologie  $H_\bullet(\mathbb{C}P^n)$  (à coefficient dans  $\mathbb{Z}$ ).
4. Quelle est l'homologie de  $\mathbb{C}P^\infty = \bigcup \mathbb{C}P^n$  (pour la topologie de la réunion) ? (On pourra utiliser l'exercice 7)

**Solution 3.** Les espaces projectifs sont évidemment une classe importante d'espaces topologiques.

1. On a  $p^{-1}(U_k) = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_k \neq 0\}$  qui est ouvert; d'où  $U_k$  est ouvert par définition de la topologie quotient. Soit  $h : \mathbb{C}^n \rightarrow U_k$  l'application définie par  $(z_1, \dots, z_n) \mapsto [z_1, \dots, z_{k-1}, 1, z_k, \dots, z_n]$  et soit  $g : U_k \rightarrow \mathbb{C}^n$  l'application définie par

$$[z_1, \dots, z_n] \mapsto \left( \frac{z_1}{z_k}, \frac{z_2}{z_k}, \dots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \dots, \frac{z_n}{z_k} \right).$$

L'application est bien définie puisque  $z_k \neq 0$ , et si  $z_i = \lambda z'_i$  (pour  $i = 1 \dots n$ ) on a bien  $\frac{z_i}{z_k} = \frac{z'_i}{z'_k}$ .

Clairement  $g \circ h = \text{Id}$  et  $h \circ g = \text{Id}$  aussi puisque  $[z_1, \dots, z_n] = \left[ \frac{z_1}{z_k}, \frac{z_2}{z_k}, \dots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, 1, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \dots, \frac{z_n}{z_k} \right]$ .

<sup>2</sup>c'est un résultat général énoncé et démontré dans le cours

Il reste à voir que  $h, g$  sont continues ce qui va découler de la définition de la topologie quotient. Précisément, soit  $V$  un ouvert de  $U_k$ . par définition, cela veut dire que  $p^{-1}(V)$  est ouvert dans  $\mathbb{C}^{n+1} - \{z_k = 0\}$ ; en particulier  $p^{-1}(V) \cap \{z_k = 1\}$  est ouvert dans  $\{z_k = 1\} \cong \mathbb{C}^n$ . Par construction  $h^{-1}(V) = p^{-1}(V) \cap \{z_k = 1\}$  d'où  $h$  est continue. Par ailleurs l'application composée  $g \circ p : \mathbb{C}^{n+1} - \{z_k = 0\} \rightarrow \mathbb{C}^n$  est continue (car polynomiale). D'où il suit que  $p^{-1}(g^{-1}(V))$  est ouvert pour tout ouvert  $V \subset \mathbb{C}^n$ . Donc  $g^{-1}(V)$  est ouvert et  $g$  est continue. Conclusion :  $h$  et  $g$  sont des homéomorphismes inverse l'un de l'autre. On a en particulier que  $U_k = \{[z_0, \dots, z_{k-1}, 1, z_{k+1}, \dots, z_n]\}$  et donc que

$$\mathbb{C}P^n - U_n = \{[z_0, \dots, z_{n-1}, 0] \mid z_0, \dots, z_{n-1} \text{ non tous nuls}\}.$$

Ainsi,  $\mathbb{C}P^n - U_n = p((\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \oplus 0) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$  par définition.

2. Pour simplifier on note  $z = (z_0, \dots, z_{n-1})$ . Si  $z \in \partial(D^{2n})$ , alors  $|z| = 1$ , d'où  $f(z) = [z_0, \dots, z_{n-1}, 0] \in \mathbb{C}P^n - U_n$ . Par ailleurs si  $f(z) \in \mathbb{C}P^n - U_n$ , alors  $1 = |z|^2$  d'où  $z \in \partial(D^{2n}) \cong S^{2n-1}$ . De plus  $f$  est clairement continue car c'est la composée d'une fonction continue  $D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$  et de la projection  $p : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ . On a  $f$  n'est pas injective sur  $\partial(D^{2n}) = S^{2n-1}$  puisque si  $|z| = 1$  alors  $f(\lambda z) = f(z)$  pour tout  $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$ . En revanche  $f(\partial D^{2n}) = p(\mathbb{C}^n - \{0\}) = \mathbb{C}P^{n-1}$ , d'où la surjectivité de  $f_0 = f|_{\partial D^{2n}}$ . Si  $|z| < 1$ , alors  $f(z) \in U_n$  par définition.

Soit  $z, z' \in D^{2n} - \partial(D^{2n})$ , i.e.  $|z|, |z'| < 1$ . Si  $f(z) = f(z')$  alors, par définition de  $\mathbb{C}P^n$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$  tel que  $z = \lambda z'$  et  $\sqrt{1 - |z|^2} = \lambda \sqrt{1 - |z'|^2}$ . Cette dernière relation force  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ . En prenant les carrés on obtient  $\lambda^2 = 1$  ce qui force  $\lambda = 1$  et  $z = z'$ .

Construisons le recollement. On a un morphisme  $j : (\mathbb{C}P^n - U_n) \amalg D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P_n$  induit par l'injection  $\mathbb{C}P^n - U_n \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$  et par  $f : D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ . Comme  $f(\partial(D^{2n})) \subset \mathbb{C}P^n - U_n$ , on obtient (par la propriété universelle) un morphisme  $\tilde{j} : \mathbb{C}P_{n-1} \cup_{f_0} D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ . De plus  $f|_{D^{2n} - \partial(D^{2n})} : D^{2n} - \partial(D^{2n}) \rightarrow U_n$  est injective par le début de la question et surjective car pour tout  $[z_0, \dots, z_{n-1}, 1]$  on a

$$[z_0, \dots, z_{n-1}, 1] = [\mu z_0, \dots, \mu z_n, \sqrt{1 - \mu^2(|z|^2)}] = f(\mu z)$$

où  $\mu = 1/(1 + |z|^2)$ . Il est alors clair que  $\tilde{j} : \mathbb{C}P_{n-1} \cup_{f_0} D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  est bijective. Comme  $\mathbb{C}P_{n-1}$ ,  $D^{2n}$  et  $\mathbb{C}P^n$  sont compacts,  $\tilde{j}$  est un homéomorphisme.

Remarquons que lorsque  $n = 1$ ,  $\mathbb{C}P_0$  est un point. D'où  $\mathbb{C}P_0 \cup_{f_0} D^2 \cong D^2/(\partial(D^2)) \cong S^2$ . On peut ainsi vérifier que la construction que nous avons donné réalise  $\mathbb{C}P^n$  comme un CW complexe.

3. Le moyen le plus simple pour calculer l'homologie de  $\mathbb{C}P^n$ , est de remarquer que l'on a montré que  $\mathbb{C}P^n$  est le quotient d'un complexe simplicial par une relation identifiant les faces avec des cellules de dimension plus petites, c'est à dire la généralisation des complexes simpliciaux évoqués à la fin de la partie 4.3.1 du cours (qui est un cas particulier du complexe de chaînes des CW-complexes); en effet on a recollé des  $2n$ -simplexes dont on a collé le bord sur des  $2n - 2$ -faces. Il suit que la différentielle est triviale et que l'on obtient facilement le résultat que nous établissons ci-dessous. Comme nous n'avons pas étudié cette généralisation des complexes quasi-simpliciaux, on va appliquer un argument de type Mayer Vietoris. La construction via le recollement suggère d'en prendre un donné par l'intérieur de  $D^{2n}$  et l'autre homotope à  $\mathbb{C}P^{n-1}$ . Comme d'habitude on note  $i_{\mathbb{C}P^{n-1}} : \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  l'inclusion.

- Découpons notre espace  $\mathbb{C}P^n$  en deux ouverts comme évoqué ci-dessus. L'idée naive serait de prendre  $\mathbb{C}P^{n-1}$  et son complémentaire comme recouvrement. Mais comme  $\mathbb{C}P^{n-1}$  est fermé, il nous faut légèrement l'agrandir pour appliquer Mayer-Vietoris). Une idée simple est de remarquer que  $\mathbb{C}P^{n-1} \cong f_0(S^{2n-1})$ . On prend alors l'image d'une couronne ouverte contenant le bord  $S^{2n-1} = \partial(D^{2n})$  de  $D^{2n}$  qui est bien un ouvert qui contient  $\mathbb{C}P^{n-1}$ . De plus il est clair qu'une telle couronne est trivialement homotope à  $S^{2n-1}$ : c'est un

rétract par déformation (obtenu par passage au quotient du rétract par déformation *forte* standard de la couronne sur un de ses bords) dans  $D^{2n}$ ; il suit que l'image par  $f$  d'une telle couronne est homotope à  $\mathbb{C}P^{n-1}$  dans  $\mathbb{C}P^n$  (faire un dessin...). Détaillons plus précisément la construction: soit  $0 < \epsilon < 1$  et  $C_\epsilon = \tilde{j}(\{z \in D^{2n} \mid |z| > 1 - \epsilon\}) \subset \mathbb{C}P^n$ ; c'est un ouvert de  $\mathbb{C}P^n$ . On a une inclusion  $i : \mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow C_\epsilon$  et une projection  $r : C_\epsilon \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1} = \tilde{j}(S^{2n-1})$  donnée par  $r(z) = \tilde{j}(z/|z|)$ ; cette application est bien définie puisque  $\tilde{j}$  est injective sur  $C_\epsilon - S^{2n-1}$  et est l'identité sur le bord. Donc  $r \circ i = \text{Id}_{\mathbb{C}P^{n-1}}$ . De plus l'application  $F : C_\epsilon \times [0, 1] \rightarrow C_\epsilon$  donnée par  $F(z, t) = \tilde{j}(z/(t|z| + 1 - t))$  est bien définie (car passe au quotient) et donne une homotopie entre  $C_\epsilon$  et  $\mathbb{C}P^{n-1}$ .

- Soit alors  $\tilde{D} = \tilde{j}(\{z \in D^{2n} \mid |z| < 1\})$  qui est ouvert dans  $\mathbb{C}P^n$ . Comme  $\tilde{j}$  est injective sur  $\{z \in D^{2n} \mid |z| < 1\}$ ,  $\tilde{D}$  est homéomorphe à une boule ouverte euclidienne de dimension  $2n$ . Il est en particulier contractile. On a  $\tilde{D} \cap C_\epsilon = \tilde{j}(\{z \in D^{2n} \mid 1 > |z| > 1 - \epsilon\})$ , donc  $\tilde{D} \cap C_\epsilon \simeq S^{2n-1}$ . On applique la suite exacte de Mayer Vietoris pour ce recouvrement de  $C_\epsilon \cup \tilde{D} = \mathbb{C}P^n$ . Par invariance par homotopie, on obtient une longue suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longleftarrow H_0(\mathbb{C}P^n) \longleftarrow H_0(\mathbb{C}P^{n-1}) \oplus H_0(D^{2n}) \longleftarrow H_0(S^{2n-1}) \longleftarrow H_1(\mathbb{C}P^n) \longleftarrow \dots \\ \dots \longleftarrow H_i(\mathbb{C}P^n) \longleftarrow H_i(\mathbb{C}P^{n-1}) \oplus H_i(D^{2n}) \longleftarrow H_i(S^{2n-1}) \longleftarrow H_{i+1}(\mathbb{C}P^n) \longleftarrow \dots \end{aligned}$$

- D'après la remarque précédente,  $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ , d'où  $H_0(\mathbb{C}P^1) \cong H_2(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{Z}$  et  $H_i(\mathbb{C}P^1) = 0$  pour  $i \neq 0, 2$ . Comme  $\mathbb{C}P^n$  est connexe par arcs, on a aussi  $H_0(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$  et les trois premiers termes de la suite exacte de Mayer-Vietoris forment une suite exacte courte.. La suite exacte longue de Mayer Vietoris montre alors que pour  $n \geq 2$ , on a pour  $i > 0$ ,  $H_i(\mathbb{C}P^n) \cong H_i(\mathbb{C}P^{n-1}) \oplus H_{i+1}(S^{2n-1})$ . Comme  $H_{j>0}(S^{2n-1}) = 0$  si  $j \neq 2n - 1$  et  $H_{2n-1}(S^{2n-1}) = \mathbb{Z}$ , un raisonnement par récurrence donne

$$H_{2i}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z} \quad \text{si } 0 \leq i \leq n, \quad H_{2i+1}(\mathbb{C}P^n) = 0 = H_{i>2n}(\mathbb{C}P^n).$$

4. Par définition  $\mathbb{C}P^\infty$  est la colimite (dans les espaces topologiques) des inclusions canoniques  $i_{\mathbb{C}P^n} : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P_{n+1}$ . On note  $i_n : \mathbb{C}P^n \rightarrow \lim_{\rightarrow} \mathbb{C}P_i \cong \mathbb{C}P^\infty$  l'inclusion canonique. D'après la question 3, on a un isomorphisme  $\bigoplus_{i \geq 0} H_i(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$  où  $x$  est de degré 2 (donc  $x^i$  est un générateur du groupe d'homologie en degré  $2i$ ). De plus l'application induite  $H_*(i) : H_*(\mathbb{C}P^{n-1}) \rightarrow H_*(\mathbb{C}P^n)$  est injective; il s'agit de l'injection canonique des polynômes de degré  $n$  dans ceux de degré  $n + 1$ ; ce point est une conséquence immédiate du calcul de la question 3. En vertu de l'exercice 7 on en déduit

$$H_*(\mathbb{C}P^\infty) \cong \text{colim} H_*(\mathbb{C}P^n) \cong \text{colim}(\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})) \cong \mathbb{Z}[x].$$

En d'autres termes;  $H_{2i}(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}$  et  $H_{2i+1}(\mathbb{C}P^\infty) = 0$  pour tout  $i \geq 0$ .

**Exercice 4 (une application non triviale en homologie modulo  $k$ ).** Soit  $k \geq 2$  un entier et  $f : S^n \rightarrow S^n$  l'application définie comme la composée  $f : S^n \rightarrow \bigvee_{i=1}^k S^n \rightarrow S^n$  (où la première application est obtenue en pinçant successivement  $k - 1$ -fois une sphère en son équateur et la deuxième est l'identité sur chaque sphère du bouquet  $\bigvee_{i=1}^k S^n$ ). On note  $X = S^n \cup_f D^{n+1}$  l'espace obtenu en recollant  $D^{n+1}$  sur  $S^n$  suivant  $f : \partial D^{n+1} \cong S^n \rightarrow S^n$ . On note  $p : X \rightarrow X/S^n$  l'application quotient.

1. Montrer que  $f$  est de degré  $k$  et que  $X/S^n$  est homéomorphe à  $S^{n+1}$ .
2. Montrer que l'application  $p_* : H_m(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_m(S^{n+1}, \mathbb{Z})$  induite en homologie (à coefficient dans  $\mathbb{Z}$ ) est nulle pour tout  $m$ .
3. Montrer que  $p_* : H_m(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \rightarrow H_m(S^{n+1}, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$  induite en homologie (à coefficient dans  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ ) n'est pas nulle pour tout  $m$  et en déduire que  $p$  n'est pas homotope à une application constante.

4. Construire, pour toute suite  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de groupes abéliens de type fini, un espace topologique  $X$  tel que pour tout  $i$  on ait  $H_i(X) \cong A_i$ .

**Solution 4.** 1. Une application constante est de degré 0, l'identité de degré 1. On a vu en cours que la restriction d'une réflexion (dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) sur la sphère est de degré  $-1$ . Comme  $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$ , il suffit désormais de montrer qu'il existe des applications de degré  $k$  pour tout entier  $k > 1$ . Soit  $c : S^n \rightarrow S^n \vee S^n$  l'application obtenue en quotientant l'équateur  $S^{n-1}$  de  $S^n$  en un point (faire un dessin...). En itérant cette construction (par exemple sur la deuxième sphère du bouquet) on obtient une application continue  $c_k : S^n \rightarrow \bigvee_{i=1}^k S^n$  (on peut aussi directement quotienter  $S^n$  en envoyant l'intersection de  $S^n$  avec  $k$  hyperplans non-colinéaires sur un seul point). On a une application canonique  $q_k = \bigvee id : \bigvee_{i=1}^k S^n \rightarrow S^n$  (qui est l'identité sur chaque sphère du bouquet). Soit  $f = q_k \circ c_k : S^n \rightarrow S^n$ .

Montrons que  $f$  est de degré  $k$ . L'application induite  $f_* : H_n(S^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(S^n, \mathbb{Z})$  en homologie est la composée  $q_{k*} \circ c_{k*}$ .

Évaluons  $(q_k)_*$ . Le théorème d'écrasement nous donne que la projection canonique  $p : \coprod S^n \rightarrow \bigvee S^n$  induit un isomorphisme en homologie en degré  $n \geq 1$ . Or  $q_k \circ p = \coprod Id$ . Comme, puisque les chaînes d'une réunion disjointe sont la somme directe des chaînes, on a que  $(\coprod Id)_*(x_1 + \dots + x_k) = x_1 + \dots + x_k$ , on en déduit que  $q_{k*} : \mathbb{Z}^k = H_n(\bigvee_{i=1}^k S^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(S^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  est l'application  $(x_1, \dots, x_k) \mapsto x_1 + \dots + x_k$ .

Soit  $\phi_j : \bigvee_{i=1}^k S^n \rightarrow S^n$  l'application qui est l'identité sur la  $j^{\text{ième}}$ -sphère du bouquet et projette les autres sphères sur le point base. Autrement dit  $\phi_j$  est la projection sur la  $j^{\text{ième}}$ -sphère du bouquet  $\bigvee S^n$ . Par construction l'application,  $\phi_j \circ c_k$  est homotope à l'identité, donc est un isomorphisme en homologie. On en déduit que l'application  $H_n(S^n, *) \xrightarrow{c_{k*}} H_n(\bigvee S^n, *) \cong \bigoplus_{i=1}^k H_n(S^n, pt) \xrightarrow{pr_j} H_n(S^n, *)$  (où  $pr_j$  est la projection sur le  $j^{\text{ième}}$ -facteur de la somme directe) est l'identité. Il suit que  $c_{k*} : H_n(S^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\bigvee_{i=1}^k S^n, \mathbb{Z})$  est l'application diagonale  $x \mapsto (x, \dots, x)$ .

Par conséquent  $f_*(x) = p_{k*} \circ c_{k*}(x) = x + \dots + x$  et  $f$  est de degré  $k$ .

2. On va appliquer Mayer-Vietoris aux ouverts formés par l'intérieur  $\mathring{D}^{n+1}$  de  $D^{n+1}$  et  $S^n \cup_f D^{n+1} \setminus \{0\}$ . On a que  $\mathring{D}^{n+1}$  est contractile, que l'intersection de ces deux ouverts est homotope à une sphère  $S$  de dimension  $n$ . La rétraction par déformation de  $D^{n+1} \setminus \{0\}$  sur son bord nous dit que  $S^n \cup_f D^{n+1} \setminus \{0\}$  est homotope à  $S^n \cup_f S^n \cong S^n$ . La suite exacte de Mayer-Vietoris pour l'homologie réduite (qui est ici applicable car l'intersection est non-vide) et nous donne que  $\tilde{H}_i(X) \cong 0$  si  $i \neq n+1, n$ . Notons que l'inclusion de  $S$  dans  $S^n \cong S^n \cup_f D^{n+1} \setminus \{0\}$  est via l'application  $f$  et est donc la multiplication par  $k$  en homologie en degré  $n$ . De Mayer-Vietoris on extrait donc une suite exacte

$$0 \rightarrow H_{n+1}(X) \rightarrow \mathbb{Z} \cong H_n(S) \xrightarrow{*k} H_n(S^n) \cong \mathbb{Z} \rightarrow H_n(X) \rightarrow 0.$$

La multiplication par  $k$  étant injective, on a que  $H_{n+1}(X) = 0$  et par ailleurs, on a que  $H_n(X) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ .

Comme  $H_m(S^{n+1})$  est nulle en degré  $m \neq n+1, 0$  et que  $H_{n+1}(X) \cong 0$  on a que  $p_*$  est forcément de source ou de but nul, donc nulle.

3. Le même raisonnement que dans la question précédente donne encore que  $\tilde{H}_i(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong 0$  si  $i \neq n+1, n$  et une suite exacte

$$0 \rightarrow H_{n+1}(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \rightarrow H_n(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Il suit que  $H_{n+1}(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \cong H_n(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ . Appliquons désormais le théorème d'écrasement à  $(X, S^n \cup_f \partial D^{n+1})$  (qui vérifie les hypothèses en prenant comme ouvert se rétractant par

déformation  $S^n \cup_f D^{n+1} \setminus \{0\}$ ). On en déduit une longue suite exacte:

$$\dots 0 \rightarrow H_{n+1}(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \xrightarrow{p_*} H_{n+1}(S^{n+1}, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \rightarrow H_n(S^n, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Comme la flèche  $H_{n+1}(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \xrightarrow{p_*} H_{n+1}(S^{n+1}, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$  est injective, elle est non nulle et c'est même un isomorphisme (par cardinalité).

4. On note d'abord que  $A_i = \mathbb{Z}^{n_i} \oplus \mathbb{Z}/k_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/k_{\phi(i)}\mathbb{Z}$  puisque  $A_i$  est de type fini. On construit les espaces topologiques voulus en notant que l'homologie d'un bouquet d'espaces est la somme directe des homologies (en degré  $\neq 0$ ). En particulier, on obtient donc la composante libre  $\mathbb{Z}^{n_i}$  en prenant un bouquet de sphères de dimension  $i$  et on utilise la construction de  $X$  (avec  $n = i$ ) dans la question 1 pour construire des copies d'espace ayant  $\mathbb{Z}/k_j\mathbb{Z}$  comme homologie en un seul degré et 0 partout ailleurs. En faisant les bouquets de ces espaces, on en obtient un qui est connexe par arcs et dont l'homologie réduite est exactement  $A_i$  en degré  $i$  et rien d'autre. On fait cela pour chaque dimension et on prend le bouquet de tous ces espaces pour finir.

On peut bien sûr imposer aussi tout groupe libre pour  $H_0(X)$ . Il suffit de prendre le même espace et de lui rajouter une réunion disjointe de points !

**Exercice 5 (Homéomorphismes du Tore).** Soit  $T = S^1 \times S^1$  un tore plongé dans  $\mathbb{R}^3$  et  $P = S^1 \times D^2$  le tore plein dont  $T$  est le bord.

1. Calculer les groupes d'homologie  $H_*(T, \mathbb{Z})$  et  $H_*(P, \mathbb{Z})$ .
2. Soit  $f : T \rightarrow T$  et  $g : P \rightarrow P$  deux homéomorphismes. Décrire  $H_*(f) : H_*(T, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(T, \mathbb{Z})$  et  $H_*(g) : H_*(P, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(P, \mathbb{Z})$ . En déduire une condition nécessaire (de nature homologique) pour qu'un homéomorphisme  $f : T \rightarrow T$  s'étende en un homéomorphisme de  $P$ .
3. Soit  $f : T \rightarrow T$  un isomorphisme du Tore (en tant que groupe topologique). En utilisant la question précédente, donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  s'étende en un homéomorphisme de  $P$ .

**Solution 5.** 1. C'est immédiat en appliquant la formule de Künneth à coefficients dans l'anneau  $\mathbb{Z}$  et le fait que les groupes d'homologie du cercle sont libres. Il y a bien d'autres démonstrations. Commençons par l'homologie de  $P$ . Comme  $D^2$  est contractile,  $P$  est homotope à  $S^1$ , d'où  $H_i(P, \mathbb{Z}) = 0$  pour  $i \geq 0$  et isomorphe à  $\mathbb{Z}$  si  $i = 0, 1$ .

Pour calculer  $H_*(T, \mathbb{Z})$ , on peut utiliser un modèle quasi-simplicial (comme dans la feuille de TD sur l'homologie simpliciale) ou Mayer-Vietoris en "tranchant" le Tore en deux cylindres ouverts (ou en considérant les calottes supérieures et inférieures, ce qui donne les mêmes calculs). On note  $C_1$  et  $C_2$  les deux cylindres se recollant pour former le Tore. Leur intersection  $C_1 \cap C_2$  est une union disjointe de deux petits cylindres  $S_1, S_2$  (on peut supposer que  $S_1 = [-\epsilon, \epsilon] \times S^1$  et  $S_2 = [1/2 - \epsilon, 1/2 + \epsilon] \times S^1$  si on identifie  $S^1$  avec  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ). A ce stade, il est indispensable de faire un dessin pour comprendre ce qui se passe ! Notons que chaque  $C_i$  est homotope à chaque  $S_j$  qui est homotope à un cercle. De la connexité par arcs de  $T, S_i, C_j$  on conclut que  $H_0(T) \cong \mathbb{Z}$  et de la suite de Mayer-Vietoris on déduit une longue suite exacte

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \leftarrow H_1(T, \mathbb{Z}) \leftarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \leftarrow H_2(T, \mathbb{Z}) \leftarrow 0 \leftarrow \dots$$

Comme le noyau de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  est  $\mathbb{Z}(1, -1)$  et son conoyau isomorphe à  $\mathbb{Z}(1, 0)$  on obtient

$$H_0(T, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(T, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H_2(T, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad H_{i>2}(T, \mathbb{Z}) \cong 0.$$

Il faut faire attention que, pour le calcul de  $H_1(T, \mathbb{Z})$ , l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris nous donne une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \cong \text{coker} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow H_1(T, \mathbb{Z}) \rightarrow \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cong \mathbb{Z} \rightarrow 0. \quad (0.1)$$

Cette suite est nécessairement scindé d'après le théorème de structure des groupes abéliens de type fini. En particulier,  $H_1(T, \mathbb{Z})$  est bien une somme directe.

Notons que l'on a deux projections  $p_1, p_2 : T = S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$  données respectivement par  $(u, v) \mapsto u$  et  $(u, v) \mapsto v$  qui induisent donc des morphismes  $H_1(p_i) : H_1(T, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_1(S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ . Par construction,  $p_2(T) = S^1$ , d'où on déduit (après un calcul pas si compliqué) par functorialité de la suite exacte de Mayer-Vietoris que  $H_1(p_2)$  est la projection sur le second facteur  $(x, y) \mapsto y$  et  $H_1(p_1)$  la projection sur le premier facteur. Cette remarque est en fait immédiate si on utilise la functorialité de la formule de Künneth.

2. Si  $f : T \rightarrow T$  est un homéomorphisme, alors  $H_*(f) : H_*(T, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(T, \mathbb{Z})$  est un isomorphisme (de groupes abéliens). Donc  $H_0(f) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  et  $H_2(f) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  sont la multiplication par  $\pm 1$ .

En revanche  $H_1(f) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  est donnée par une matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  vérifiant  $ad - bc = \pm 1$ . De même  $H_{0,1}(g) = \pm 1$  et la permutation  $\tau : (u, v) \mapsto (v, u)$  des facteurs de  $T = S^1 \times S^1$  induit l'application  $H_1(\tau) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  qui est aussi la permutation des facteurs  $(x, y) \mapsto (y, x)$ .

Remarquons que l'on a une injection  $i : T \hookrightarrow P$  et que, de plus, la projection  $p_1 : T \rightarrow S^1$  se factorise sous la forme  $T \xrightarrow{i} P = S^1 \times D^2 \xrightarrow{(\text{Id}, 0)} S^1$ . Comme  $D^2$  est contractile, on a vu que  $H_*(\text{Id}, 0) : H^*(S^1 \times D^2) \rightarrow H^*(S^1, \mathbb{Z})$  est l'identité et il suit de la remarque à la fin de la question **1**) que  $H_1(i) : H^1(T, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \cong H^1(P, \mathbb{Z})$  est la projection  $(x, y) \mapsto x$  sur le premier facteur.

Finalement, si  $f : T \rightarrow T$  s'étend en un homéomorphisme  $g$  du tore plein  $P$  (c'est à dire  $g|_T = f$ ), alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_1(T, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{H_1(f)} & H_1(T, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 \\ \downarrow H_1(i) & & \downarrow H_1(i) \\ H_1(P, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} & \xrightarrow{H_1(g)} & H_1(P, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \end{array} \quad (0.2)$$

où  $H_1(g) = \pm 1$ . On en déduit que la matrice de  $H_1(f)$  est de la forme  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$  où  $a, d = \pm 1$  (en d'autres termes est nécessairement triangulaire inférieure).

3. Un isomorphisme de groupe topologique du tore  $T = S^1 \times S^1 \cong \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$  est donné par un élément de  $GL_2(\mathbb{Z})$ , c'est à dire une matrice à coefficients entiers, qui a un inverse à coefficients entiers. Plus précisément, il s'écrit sous la forme  $(u, v) \mapsto (iu + jv, ku + lv)$  où  $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$  et  $il - jk = \pm 1$  (et  $u, v \in \mathbb{R}^2$ ). D'après la question **2**), il suffit de vérifier que  $H_1(f) = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$  pour montrer que si  $f$  s'étend à  $P$ , alors  $j = 0$  (et alors,  $i, l = \pm 1$ ). Réciproquement, si  $j = 0$ , alors le morphisme  $f$  s'étend à  $P$  sous la forme  $g(u, v, \rho) = (iu, ku + lv, \rho)$  (on a identifié  $D^2$  via les coordonnées polaires  $(v, \rho)$ ); il faut faire attention que  $v$  n'est pas défini pour  $\rho = 0$ , mais cela n'est pas gênant dans la formule, puisque précisément  $b = 0$ . Il est immédiat que  $g$  est continue et que c'est un homéomorphisme (son inverse étant de la même forme  $(u, v, \rho) \mapsto (\frac{1}{i}u, -\frac{k}{ij}u + \frac{1}{l}v, \rho)$ ).

Montrons donc que  $H_1(f)(x, y) = (ix + ky, jx + ly)$ . Le résultat découle de la naturalité de la longue suite exacte de Mayer-Vietoris et du fait que le résultat est immédiat au niveau du

complexe des petites chaînes donnant lieu à Mayer Vietoris. En effet si  $\sigma : \Delta^i \rightarrow S_1 = ] - \epsilon\epsilon[ \times S^1$  est un petit simplexe singulier, alors  $f_*(\sigma) = f \circ \sigma$  est le  $i$ -simplexe singulier induit.

composantes connexes par arcs (par composition) et au niveau des cylindres  $S_i, S_j$  puis en appliquant la suite exacte (0.1).

**Exercice 6.** Soit  $X \subset Y \subset Z$  trois espaces topologiques. Montrer qu'il y a une suite exacte longue naturelle en homologie (on pourra considérer une suite exacte courte de complexes de chaînes relatives)

$$\cdots \rightarrow H_i(Y, X) \rightarrow H_i(Z, X) \rightarrow H_i(Z, Y) \rightarrow H_{i-1}(Y, X) \rightarrow \cdots$$

**Solution 6.** Comme  $X \subset Y$ , on a un morphisme de paires  $(Z, X) \rightarrow (Z, Y)$  qui induit, par passage au quotient  $C_\bullet(Z, X) \cong C_\bullet(Z)/C_\bullet(X)$ , un morphisme canonique  $C_\bullet(Z, X) \rightarrow C_\bullet(Z, Y)$  qui est surjectif. Le noyau de ce morphisme de complexes est précisément le complexe  $C_\bullet(Y)/C_\bullet(X) = C_\bullet(Y, X)$ . La suite exacte longue est donc celle associée à la suite exacte courte de complexes

$$C_\bullet(Y, X) \hookrightarrow C_\bullet(Z, X) \rightarrow C_\bullet(Z, Y).$$

**Exercice 7 (Homologie d'une réunion).** Soit  $X$  un espace topologique et on suppose que  $X$  est la réunion topologique  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  d'une suite croissante  $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$  de sous-espaces qui vérifie que tout compact de  $X$  est inclus dans un des  $X_i$ .

1. Démontrer qu'il y a une surjection  $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_*(X_i) \rightarrow H_*(X)$ .
2. Déterminer le noyau de l'application précédente et en déduire que  $H_*(X) \cong \operatorname{colim}_{i \in \mathbb{N}} H_*(X_i)$ .

**Solution 7.** Nous noterons  $\iota_i^j : X_i \hookrightarrow X_j$  et  $\iota_i^\infty : X_i \hookrightarrow X$  les inclusions. On a évidemment que  $\iota_i^\infty = \iota_j^\infty \circ \iota_i^j$  pour tout  $j \geq i$  et plus généralement  $\iota_i^k = \iota_j^k \circ \iota_i^j$ . Que  $X$  est la réunion topologique signifie que  $X$  est la colimite dans **Top** des  $\iota_i^{i+1} : X \cong \operatorname{colim}(X_i)$ .

1. Un simplexe singulier  $\sigma : \Delta^i \rightarrow X$  a une image compacte et donc se factorise au travers d'un des  $X_i$ . Comme un élément  $x$  de  $C_*(X)$  est une combinaison linéaire finie de simplexes singuliers, on en déduit (en prenant le plus grand des  $U_i$ ) que toute chaîne singulière est l'image d'une chaîne singulière d'un des  $X_i$ . En particulier, si c'est un cycle, sa classe d'homologie est l'image de la classe d'homologie correspondante dans  $X_i$ .
2. Notons comme d'habitude  $\iota_{i*}^\infty : C_*(X_i) \rightarrow C_*(X)$  le morphisme de chaînes induit et regardons son noyau en homologie pour commencer. Soit donc  $x \in Z_*(X_i)$  tel que  $[\iota_{i*}^\infty(x)] = 0$ . Alors,  $\iota_{i*}(x) = d(z)$  est un bord. Par l'argument de la première question,  $z \in C_*(X_j)$  pour un certain  $j \geq i$ . Donc  $[\iota_{i*}^j(x)] = 0 \in H_*(X_j)$ , c'est à dire que la classe d'homologie de  $x$  s'annule déjà dans un des  $X_j$ . Ainsi, si  $[x] = [x_{i_1}] + \cdots + [x_{i_k}]$  (avec  $i_1 < \cdots < i_k$ ) est dans le noyau, il existe un  $j \geq i_k$  tel que  $[\iota_{i_1*}^j(x_{i_1})] + \cdots + [\iota_{i_k*}^j(x_{i_k})] = 0$ . Puisque  $\iota_{i*}^\infty$  se factorise au travers de  $\iota_{i*}^j$  pour tout  $j \geq i$ , on en déduit que le noyau est donc l'ensemble des éléments  $[x] = [x_{i_1}] + \cdots + [x_{i_k}]$  tels qu'il existe un  $j$  pour lesquels  $\iota_{i*}^j[x] = 0$ . On obtient alors que le quotient de  $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_*(X_i)$  par ce noyau est la colimite  $\operatorname{colim} H_*(X_i)$  indiquée sur les morphismes  $\iota_{i*}^{i+1}$  (autrement dit c'est le quotient de  $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_*(X_i) \rightarrow H_*(X)$  par la relation  $\iota_{i*}^j([x]) - [x]$  pour tout  $j \geq i \geq 0$  et  $[x] \in H_*(X_i)$ ).

**Exercice 8 (Compléments de boules).** Soit  $X$  un sous espace de  $S^n$  homéomorphe à une boule  $D^r$ . On note  $f : D^r \rightarrow S^n$  une application injective qui est un homéomorphisme sur son image, telle que  $X = f(D^r)$ .

1. Démontrer que  $H_\bullet(S^n - f(D^r)) \cong H_\bullet(\{*\})$  et en déduire que  $S^n - f(D^r)$  est connexe (on pourra raisonner par récurrence, écrire  $D^n \cong D^{n-1} \times I$  et considérer les fermés  $D^{n-1} \times [0, 1/2]$  et  $D^{n-1} \times [1/2, 1]$  puis procéder par dichotomie...).
2. En déduire les groupes d'homologie de  $\mathbb{R}^n \setminus X$  où  $X$  est encore un sous-espace homéomorphe à une boule  $D^r$ .
3. Calculer les groupes d'homologie de  $S^n \setminus S^0$ .
4. On décompose  $S^k$  en deux hémisphères qui se rencontrent en un rétract par déformation de  $S^{k-1}$ . En utilisant la suite exacte de Mayer Vietoris, calculer l'homologie  $H_*(S^n \setminus S^k)$ .

**Solution 8.** 1. Bien que le résultat soit intuitif, la démonstration de cette question est assez délicate<sup>3</sup>. On raisonne par récurrence sur  $r$  (avec  $f : D^r \rightarrow S^n$ ). Pour  $r = 0$ ,  $D^r$  est un point et  $S^n - f(D^0)$  est donc  $S^n$  privée d'un point qui est homéomorphe à  $D^n$ , donc contractile. Par conséquent  $H_\bullet(S^n - f(D^0)) \cong H_\bullet(\{*\})$ . Supposons maintenant avoir démontré le résultat pour tout plongement  $D^{r-1} \rightarrow S^n$  avec  $r \geq 1$ . Soit  $f : D^r \rightarrow S^n$  une immersion. On a un homéomorphisme  $D^r \cong I^r$  (où  $I = [0, 1]$ ) d'où  $D^r \cong D^{r-1} \times I$  est recouvert par les fermés  $D^+ = D^{r-1} \times [0, 1/2]$  et  $D^- = D^{r-1} \times [1/2, 1]$ . Leur intersection est  $D^{r-1} \times \{1/2\} \cong D^{r-1}$ . Le recouvrement fermé précédent donne un recouvrement ouvert de  $S^n - f(D^{r-1} \times \{1/2\}) = U^+ \cup U^-$  en notant  $U^+ = S^n - f(D^+)$ ,  $U^- = S^n - f(D^-)$ . On a  $U^+ \cap U^- = S^n - f(D^r)$ . Faire un dessin bien-sûr !

On veut montrer que  $H_\bullet(S^n - f(D^r)) \xrightarrow{\cong} H_\bullet(\{x\})$  (où l'application est induite par la projection sur le point), ce qui revient à dire que l'homologie réduite  $\tilde{H}_*(S^n - f(D^r)) = 0$ .

Puisque  $U^+ \cap U^- = S^n - f(D^r)$  est non-vide, la suite exacte de Mayer-Vietoris donne (en homologie relative) la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow \tilde{H}_0(U^+ \cup U^-) \leftarrow \tilde{H}_0(U^+) \oplus \tilde{H}_0(U^-) \leftarrow \tilde{H}_0(U^+ \cap U^-) \leftarrow \tilde{H}_1(U^+ \cup U^-) \leftarrow \dots \\ \dots \leftarrow \tilde{H}_i(U^+ \cup U^-) \leftarrow \tilde{H}_i(U^+) \oplus \tilde{H}_i(U^-) \leftarrow \tilde{H}_i(U^+ \cap U^-) \leftarrow \tilde{H}_{i+1}(U^+ \cup U^-) \leftarrow \dots \end{aligned}$$

On note  $p^\pm : \tilde{H}_i(U^+ \cap U^-) \rightarrow \tilde{H}_i(U^\pm)$  les applications canoniques (induites par les inclusions) dans la suite exacte précédente. Supposons qu'il existe  $\alpha_0 \neq 0$  dans  $\tilde{H}_i(U^+ \cap U^-)$ . Par hypothèse de récurrence on sait que  $\tilde{H}_i(U^+ \cup U^-) = 0$ . De la suite précédente, on déduit qu'il existe  $\alpha_1$  dans  $\tilde{H}_i(U^+)$  ou dans  $\tilde{H}_i(U^-)$  tel que  $p^+(\alpha_1) = \alpha_0$  (ou  $p^-(\alpha_1) = \alpha_0$ ). En particulier  $\alpha_1 \neq 0$ . On note  $p_1$ , celle des applications  $p^\pm$  telle que  $p(\alpha_1) = \alpha_0$ . Comme,  $D^{r-1} \times [a, b] \cong D^r$  (avec  $a < b$ ), on peut refaire le même raisonnement avec  $S^n - f(D^+)$  à la place de  $S^n - f(D^r)$ . On obtient donc qu'il existe  $\alpha_2 \neq 0$  dans  $\tilde{H}_i(S^n - f(D^{r-1} \times [a_2, b_2]))$  (où  $b_2 - a_2 = \frac{1}{2^2}$ ) et tel que  $p_2(\alpha_2) = \alpha_1$ . En itérant ce raisonnement, on obtient une suite  $0 \neq \alpha_n \in \tilde{H}_i(S^n - f(D^{r-1} \times [a_n, b_n]))$  avec  $b_n - a_n = 1/2^n$ , les segments  $[a_j, b_j]$  forment une suite décroissante et, pour tout  $n$ ,  $p_n(\alpha_n) = \alpha_{n-1}$ . Par le lemme des petites chaînes, on sait que le complexe des petites chaînes associées à la réunion des ouverts constitués des  $S^n \setminus f(D^{r-1} \times [a_i, b_i])$  est quasi-isomorphe au complexe singulier. Et le raisonnement de l'exercice 7 nous donne

$$\text{colim} \tilde{H}_\bullet(S^n - f(D^{r-1} \times [a_j, b_j])) \cong \tilde{H}_\bullet(\text{colim}(S^n - f(D^{r-1} \times [a_j, b_j]))) .$$

La suite des  $\alpha_i$  fournit donc un élément non nul dans  $\text{colim} \tilde{H}_i(S^n - f(D^{r-1} \times [a_j, b_j]))$ . Or  $\text{colim}(S^n - f(D^{r-1} \times [a_j, b_j])) \cong S^n - f(D^{r-1} \times z)$  où  $z$  est le point d'intersection de la suite de compacts emboîtés  $[a_j, b_j]$ . Par l'hypothèse de récurrence,  $\tilde{H}_i(S^n - f(D^{r-1} \times z)) \cong 0$ . Ceci est une contradiction ce qui force que tous les éléments de  $\tilde{H}_\bullet(S^n - f(D^r))$  sont nuls.

<sup>3</sup>une rapide recherche sur les sphères cornues d'Alexander vous convaincra que ce complémentaire n'est pas forcément contractile !

2. On remarque que  $X$  étant compact, en rajoutant un point à l'infini à  $\mathbb{R}^n$  on est ramené à la situation  $S^n \setminus X$  de la première question. En appliquant Mayer-Vietoris à un disque centré sur le point à l'infini et dans le complémentaire de  $X$ , on obtient une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow H_i(S^{n-1}) \rightarrow H_i(\{*\}) \oplus H_i(\mathbb{R}^n \setminus X) \rightarrow H_i(S^n \setminus X) \rightarrow H_{i-1}(S^n) \rightarrow \cdots$$

ce qui donne que  $H_*(\mathbb{R}^n \setminus X) \cong H_*(S^{n-1})$ .

3. On a vu cela dans l'exercice 1:  $S^n \setminus S^0 \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$ . Donc  $H_i(S^n \setminus S^0) \cong H_i(S^{n-1})$ .
4. Supposons  $n > 0$ . Soit  $D_r^+, D_r^-$  les hémisphères supérieurs et inférieurs de  $S^r$ . Démontrons que  $H_\bullet(S^n - f(S^r)) \cong H_\bullet(S^{n-r-1})$ . Par Mayer-Vietoris, on a une suite exacte longue

$$\begin{aligned} \cdots \leftarrow \tilde{H}_i(S^n - f(D_r^+)) \oplus \tilde{H}_i(S^n - f(D_r^-)) \leftarrow \tilde{H}_i(S^n - f(S^r)) \leftarrow \\ \tilde{H}_{i+1}(S^n - f(S^{r-1})) \leftarrow \tilde{H}_{i+1}(S^n - f(D_r^+)) \oplus \tilde{H}_{i+1}(S^n - f(D_r^-)) \leftarrow \cdots \end{aligned}$$

Par le **(1)**, on sait que  $\tilde{H}_i(S^n - f(D_r^\pm)) = 0$ . Par récurrence descendante, il suffit alors de montrer le résultat pour  $r = 0$  ce qui est la question précédente. (ou on redit que comme  $S^0$  est la réunion disjointe de 2 points, on a  $S^n - f(S^0) \cong S^n - \{N, S\} \cong \mathbb{R}^n - \{S\}$  en notant  $N, S$  les poles nord et sud. Or  $\mathbb{R}^n - \{S\}$  est homotope à  $S^{n-1}$  d'où le résultat.)

## Quelques applications célèbres

**Exercice 9 (Invariance du domaine).** Démontrer le théorème d'invariance du domaine: si deux ouverts non-vides  $U \subset \mathbb{R}^n$  et  $V \subset \mathbb{R}^m$  sont homéomorphes alors  $n = m$ . (on pourra considérer les groupes d'homologie relative  $H_*(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p \setminus \{x\})$ ).

**Solution 9.** Soit  $f : U \rightarrow V$  un homéomorphisme et  $x \in U$ . Soit enfin  $B_x \subset U$  une boule ouverte contenant  $x$ . On a alors par le théorème d'excision appliqué à  $U \setminus B_x \subset U \setminus \{x\} \subset U$  que

$$H_*(U, U \setminus \{x\}) \cong H_*(B_x, B_x \setminus \{x\}) \cong H_*(D^n, D^n \setminus \{0\}) \cong H_*(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_*(S^n)$$

en utilisant que  $(D^n, S^{n-1}) \hookrightarrow (D^n, D^n \setminus \{0\})$  est une équivalence d'homotopie et le théorème d'écrasement pour le dernier isomorphisme. En particulier cette homologie est non-nulle exactement en degré  $n - 1$ . Le même calcul appliqué à  $V, f(x)$  et une boule contenant  $f(x)$  donne que  $H_*(V, V \setminus \{f(x)\}) \cong \tilde{H}_*(S^{m-1})$ . Ainsi ces deux homologies ne sont les mêmes (ce qu'elles doivent être puisque  $f$  est un homéomorphisme) que si  $n = m$  ce qui conclut.

**Exercice 10 (Théorèmes de séparation de Jordan généralisés).** Dans ce qui suit on considère les groupes d'homologie d'un espace  $X$  à coefficient dans  $\mathbb{R}$  (qu'on oublie dans les notations).

1. Soit  $f : D^r \rightarrow S^n$  une application injective qui est un homéomorphisme sur son image. Démontrer que  $S^n - f(D^r)$  a l'homologie d'un point puis que pour un plongement  $f : S^r \rightarrow S^n$ ,  $H_\bullet(S^n - f(S^r)) \cong H_\bullet(S^{n-r-1})$  si  $r < n$ . (utiliser l'exercice 8).
2. En déduire que si  $r = n - 1$ , alors  $S^n - f(S^{n-1})$  a exactement deux composantes connexes qui sont acycliques et dont les bords sont exactement  $f(S^{n-1})$ .
3. Déduire de **2.** que si  $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une immersion avec  $n \geq 2$ , alors  $\mathbb{R}^n - f(S^{n-1})$  a deux composantes connexes. De plus une d'entre elle est bornée et acyclique et l'autre est non-bornée.

**Solution 10.** Rappelons qu'une application continue  $f : X \rightarrow Y$  est dite *un plongement* si elle induit un homéomorphisme  $f : X \rightarrow f(X)$  sur son image. En d'autres termes, elle est injective et la bijection inverse  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  est également continue.

1. C'est la dernière question de l'exercice 8.
2. Si  $r = n - 1$ , par **(2)**, on a  $H^0(S^n - f(S^{n-1})) \cong H^0(S^0) \cong k \oplus k$ . D'où  $S^n - f(S^{n-1})$  a exactement deux composantes connexes (puisque son  $H^0$  est de dimension 2). De plus,  $H^{i>0}(S^n - f(S^{n-1})) \cong 0$ . Si  $Z_1, Z_2$  sont les deux composantes connexes de  $S^n - f(S^{n-1})$ , on a  $H^i(S^n - f(S^{n-1})) \cong H^i(Z_1) \oplus H^i(Z_2)$  d'où  $Z_1$  et  $Z_2$  sont acyliques (c'est à dire d'homologie nulle).

Le dernier point est un argument de topologie. On a  $f(S^{n-1})$  compact, donc fermé dans  $S^n$ , donc son complémentaire est ouvert dans  $S^n$ . De plus tout point  $x$  de  $S^n$  admet un voisinage homéomorphe à une boule ouverte de  $\mathbb{R}^n$ , donc incluse dans une des composantes connexes  $Z_1, Z_2$  si  $x \in S^n - f(S^{n-1})$ . il suit que le bord  $\partial Z_i \subset f(S^{n-1})$ . Montrons l'inclusion inverse. Si il existe  $y \in f(S^{n-1})$  tel que  $y \notin \partial Z_1$ , alors il existe un voisinage  $B$  de  $y$  homéomorphe à une boule ouverte de  $\mathbb{R}^n$  dans  $S^n - Z_1 = Z_2$ . Soit  $W$  un voisinage de  $f^{-1}(y)$  dans  $S^{n-1}$ , homéomorphe à une boule ouverte de  $\mathbb{R}^{n-1}$  tel que  $f(W) \subset B$ . Comme  $S^{n-1} - W \cong D^{n-1}$ , par **(1)** on a  $S^n - f(S^{n-1} - W)$  est connexe. Il est aussi ouvert et par hypothèse de plus

$$S^n - f(S^{n-1} - W) = (Z_1 \cap S^n - f(S^{n-1} - W)) \cup ((Z_2 \cup B) \cap S^n - f(S^{n-1} - W))$$

est une réunion disjointe de deux ouverts de  $S^n - f(S^{n-1} - W)$ . C'est donc une contradiction, ce qui prouve que  $\partial Z_1 = S^n - f(S^{n-1})$  et de même pour  $\partial Z_2$ .

3. On a  $f(S^{n-1}) \subset \mathbb{R}^n \subset S^n$  où on a identifié  $\mathbb{R}^n = S^n - \{N\}$ . D'après **(3)**,  $S^n - f(S^{n-1})$  a deux composantes connexes acycliques  $Z_1, Z_2$  avec par exemple  $N \in Z_1$  (puisque  $N \notin S^n - f(S^{n-1})$ ). Il est alors clair que  $\mathbb{R}^n - f(S^{n-1})$  est la réunion disjointe des ouverts  $(Z_1 - \{N\})$  et  $Z_2$ . La cohomologie de  $Z_2$  est acyclique. De plus  $Z_2$  est fermé dans le compact  $S^n$ , donc compact, donc borné. Par construction  $Z_1 - \{N\}$  est non borné (c'est un voisinage du point à l'infini...).

**Exercice 11 (Non plongement de  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ ).** Rappelons que  $\mathbb{R}P^2$  est le plan projectif, quotient de  $S^2$  par  $\{\pm \text{Id}\}$ .

1. Démontrer que  $\mathbb{R}P^2$  peut se décomposer comme une réunion  $M \cup D$ , où  $M$  est une bande de Moebius et  $D$  est un disque, tels que  $M \cap D$  est homotope à un cercle.
2. On suppose désormais donné un plongement  $f : \mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ , c'est à dire une application injective qui est un homéomorphisme sur son image. On identifiera  $\mathbb{R}P^2, M$  et  $D$  avec leurs images  $f(\mathbb{R}P^2), f(M)$  et  $f(D)$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
  - (a) Montrer que  $H_i(\mathbb{R}^3 \setminus M) = \mathbb{Z}$  si  $i = 0, 1, 2$  et 0 sinon.
  - (b) Montrer que l'application induite en homologie  $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus M) \rightarrow H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M)$  est la multiplication par 2.
  - (c) En utilisant la suite de Mayer-Vietoris, en déduire un élément de 2-torsion dans l'homologie de  $H_0(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}P^2)$
3. Conclure qu'il n'existe pas de plongements du plan projectif dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ .

**Solution 11.** 1. On l'a vu dans le corrigé du DM. On redonne ici la figure (4). On peut vérifier que l'intersection est une couronne, et donc un rétracte par déformation forte d'un lacet en faisant le tour.

2. On va utiliser la méthode de l'exercice des compléments de boule.
  - (a) Le rétract par déformation forte de  $M$  sur son cercle central (noté  $\beta$  sur la figure (4)) induit un rétract par déformation  $\mathbb{R}^3 \setminus M \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus S^1$ . Pour calculer l'homologie, on utilise l'exercice sur les complémentaires de boule. En remarquant que  $S^3 \setminus S^1 = (\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cup D^3$  en prenant un voisinage du point à l'infini de  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  qui ne rencontre pas  $S^1$  (qui est compact,

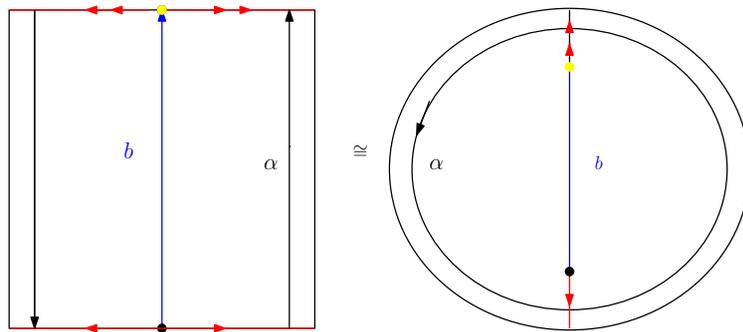
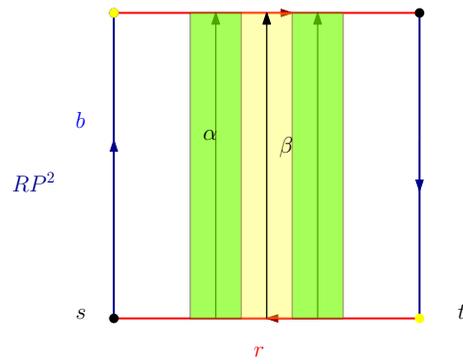


Figure 4: Un recouvrement de  $\mathbb{R}P^2$  par une bande de Mobius, représentée en jaune, et un disque en blanc. Leur intersection est composée de la partie verte. En dessous on représente le disque vu à partir du quotient du rectangle et son identification avec un disque. L'intersection  $M \cap D$  est un rétract par déformation du cercle  $\alpha$ .

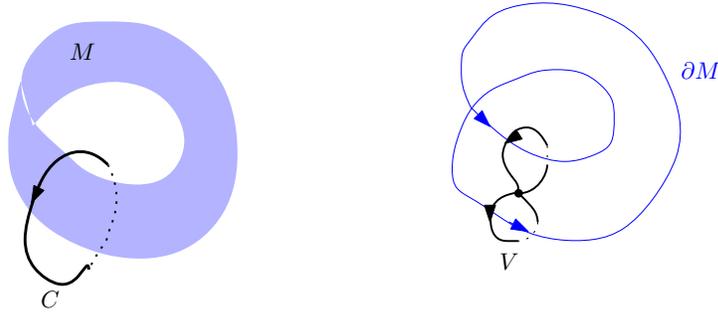


Figure 5: Le plongement de  $M$  avec le cercle  $C$  dont la classe d'homologie en degré 1 est un générateur de  $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus M)$  et le bouquet  $V$  auquel il est homotope dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \partial M$ .

donc c'est possible). La suite exacte de Mayer-Vietoris et  $H_*(S^3 \setminus S^1) \cong H_*(S^1)$  donne alors que  $H_i(\mathbb{R}^3 \setminus M) = \mathbb{Z}$  si  $i = 0, 1, 2$  et 0 sinon.

Une autre méthode pour obtenir ce résultat est de découper la bande de Möbius en deux disques (d'intersection la réunion disjointe de deux intervalles) et d'appliquer Mayer-Vietoris et le résultat sur les compléments de boule.

- (b) Notons qu'il découle des calculs faits dans l'exercice sur les compléments de boule et la première question qu'un générateur de  $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus M)$  est donné par un cercle  $C$  dans laquelle s'enlace la bande de Möbius. C'est à dire que ce générateur, noté  $[C]$ , est donné par l'image du générateur de  $H_1(S^1) \cong H_1(C) \rightarrow H_1(\mathbb{R}^3 \setminus M)$  où l'application est donnée par l'inclusion de  $C$  dans  $\mathbb{R}^3 \setminus M$ . Voir la figure (5).

De même, on a que  $\partial M$  est un cercle et que  $H_i(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M)$  est  $\mathbb{Z}$  en degrés 0, 1, 2 et 0 sinon. Par ailleurs, un générateur est donné par un cercle enroulé autour de  $\partial M$ . Notons  $i : \mathbb{R}^3 \setminus M \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \partial M$  l'inclusion. Or  $i(C)$  est homotope dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \partial M$  au bouquet  $V$  de deux cercles entourant  $\partial M$ . En homologie l'image (du générateur de l'homologie en degré 1 par l'inclusion) de chacun des cercles du bouquet est le même générateur  $[D]$  de  $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M)$  (comme on le voit à leur orientation). Il suit que  $i([C]) = 2[D]$  et donc que  $H_1(i)$  est la multiplication par 2.

- (c) On applique la suite exacte de Mayer-Vietoris au recouvrement de  $\mathbb{R}^3 \setminus (M \cap D)$  par  $\mathbb{R}^3 \setminus M$  et  $\mathbb{R}^3 \setminus D$  dont l'intersection est  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}P^2$  puisque  $M \cup D = \mathbb{R}P^2$ . Notons que l'exercice sur les compléments de boule nous donne que  $\mathbb{R}^3 \setminus D$  a la même homologie que la sphère  $S^2$ . On a vu que les compléments de  $M$  et  $\partial M$  ont  $\mathbb{Z}$  pour homologie en degré 1; la suite exacte de Mayer-Vietoris donne en particulier la suite exacte

$$H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}P^2) \rightarrow 0 \oplus H_1(\mathbb{R}^3 \setminus M) \cong \mathbb{Z} \xrightarrow{2*} \mathbb{Z} \cong H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M) \xrightarrow{\delta} H_0(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}P^2).$$

Par exactitude, le noyau de  $\delta$  est exactement le sous-espace  $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$  de  $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M) \cong \mathbb{Z}$ . Il suit que  $\delta(1)$  est un élément non-nul de  $H_0(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}P^2)$  tel que  $2\delta(1) = \delta(2) = 0$ . C'est à dire un élément non-nul et de 2-torsion de  $H_0(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}P^2)$ .

3. Les groupes d'homologie en degré 0 d'un espace topologique sont libres (engendrés par les composantes connexes). En particulier, aucun élément non-nul de  $H_0(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}P^2)$  ne peut être de 2-torsion (c'est à dire qu'il n'y a pas de  $x \neq 0$  tels que  $2x = 0$ ). Ceci contredit le (c) de la question précédente. L'existence d'un plongement de  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  est donc absurde.