Cohomologie singulière et foncteurs dérivés

Cohomologie singulière

Exercice 1. En utilisant la formule de Künneth et les coefficients universels, calculer les groupes d'homologie et de cohomologie des espaces suivants à coefficients dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

1. $S^n \times S^m$ et $(S^1)^{10}$.
2. $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$.
3. K la bouteille de Klein (en réutilisant les résultats que l'on a vu en cours/TD pour son homologie à coefficient dans $\mathbb{Z}$).

Solution 1. On rappelle que la formule de Künneth nous donne une suite exacte courte:

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} H_i(X) \otimes H_j(Y) \to H_n(X \times Y) \stackrel{\times}{\to} \bigoplus_{k+\ell=n-1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_k(X), H_\ell(Y)) \to 0.$$

Les théorèmes des coefficients universels nous donne deux suites exactes courtes scindées (non-naturellement)

$$0 \to H_i(X) \otimes R \to H_i(X, R) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{i-1}(X), R) \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Ext}^1(H_{i-1}(X), G) \to H^i(X, G) \to \mathrm{Hom}(H_i(X), G) \to 0.$$

Enfin on a vu en cours les règles de calcul suivantes (justifiées par le cours et des exercices suivants) pour des groupes abéliens:

- $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H \oplus H', G) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H, G) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H', G)$ et $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\bigoplus_\alpha H_\alpha\ , G) \cong \bigoplus_\alpha \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_\alpha, G)$;
- $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H, G) = 0 = \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H, G)$ si H est libre;
- $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \cong G/nG$;
- $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \cong \ker(G \stackrel{\times n}{\to} G)$.
- $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\mathrm{pgcd}(n,m)\mathbb{Z}$.

1. On utilise que $H_i(S^\ell)$ est non-nul uniquement en degré $i = 0, \ell$ où il est alors libre, de rang 1. Par suite, tous les $\mathrm{Tor}_1(H_k(X), H_\ell(Y))$ sont nuls si X et Y sont des sphères et $\bigoplus_{i+j=k} H_i(S^n) \otimes H_j(S^m) = 0$ si $k \neq 0, n, m, n+m$ et vaut $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ dans les autres cas (si $n = m$ on a alors deux copies en $\mathbb{Z}$ en degré $n = m$ correspondant à $H_0(S^n) \otimes H_m(S^m) \oplus H_n(S^n) \otimes H_0(S^m)$).

   En d'autres termes, en utilisant la convention du cours que $M[k]$ désigne le module M placé en degré homologique k, on a que

   $$\begin{aligned}\bigoplus_{k\geq 0} \Big(\bigoplus_{i+j=n} H_i(S^n) \otimes H_j(S^m)\Big)[k] & \\ &= (H_0(S^n) \otimes H_0(S^m))[0] \oplus (H_0(S^n) \otimes H_m(S^m))[m] \\ &\oplus (H_n(S^n) \otimes H_0(S^m))[n] \oplus (H_n(S^n) \otimes H_m(S^m))[n+m] \\ &= \mathbb{Z}[0] \oplus \mathbb{Z}[m] \oplus \mathbb{Z}[n] \oplus \mathbb{Z}[n+m].\end{aligned}$$

   La même technique s'applique pour voir que l'homologie de $(S^1)^{10}$ est $H_i((S^1)^{10}) \cong \mathbb{Z}^{\binom{10}{i}}$. Puisque tous les groupes obtenus sont libres, les $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{i-1}(X), R)$ sont nuls et donc l'homologie de ces espaces à coefficients dans $R = \mathbb{Q}$ et $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ s'obtient en remplaçant seulement $\mathbb{Z}$ par R. Le même argument s'applique pour la cohomologie puisque ces groupes sont de plus de rang fini et sont donc isomorphes aux groupes d'homologie du même degré.

2. On a vu (en devoir) que $H_0(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $H_{i\geq 2}(\mathbb{R}P^2) \cong 0$. On en déduit en degré 1 que $H_1(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et en degré 2 que $H_2(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (car les H_0 sont libres et donc annulent les Tor^1). En degré 2, de $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_1(\mathbb{R}P^2), H_1(\mathbb{R}P^2)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on déduit que $H_3(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et enfin les autres groupes sont nuls.

   On passe maintenant à l'homologie à coefficient dans $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Q}$ est sans torsion (et d'ailleurs plat), il suit que les Tor^1 l'impliquant sont nuls et donc il suffit de tensoriser l'homologie obtenue par $\mathbb{Q}$ pour obtenir celle à coefficient dans $\mathbb{Q}$. Cela tue les termes en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et remplace les $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Q}$. On a donc seulement l'homologie en degré 0 qui est non nulle. Pour l'homologie à coefficeint dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, les coefficients universels nous donne qu'on doit remplacer le terme en $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et que tous les groupes d'homologie qui valent $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en degré $i-1$ donne un nouveau groupe isomorphe en degré i. Il suit que $H_0(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, $H_2(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, $H_3(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et $H_4(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   Pour la cohomologie, notons que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$. On déduit du théorème des coefficients universels version cohomologique que $H^0(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}$, $H^1(\mathbb{R}P2) \cong 0$, $H^2(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et les autres groupes sont nuls (en d'autre termes l'homologie en degré 1 se retrouve dans la cohomologie de degré 2). Pour $\mathbb{Q}$, tous les groupes sauf le degré 0 s'annulent. De même, on obtient que la cohomologie à coefficient dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est en fait exactement la duale de l'homologie à coefficient dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3. Tout d'abord on sait que $H_0(K, R) \cong R$ par connexité par arcs de K. On a vu que $H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $H_{i\geq 2}(K) \cong 0$. Encore une fois, comme $\mathbb{Q}$ est plat sur $\mathbb{Z}$, les foncteurs $\mathrm{Tor}^1(-, \mathbb{Q})$ sont nuls et on en déduit que $H_i(K, \mathbb{Q}) \cong 0$ si $i \geq 2$ et $\mathbb{Q}$ si $i = 0, 1$. Pour $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}/$, la partie de trosion de l'homologie en degré 1 contribue en degré 2 via le facteur Tor^1 et toutes les autres parties sont libres et donc sans contributions. Il suit que $H_i(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $i = 0, 2$, $H_1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et les autres groupes sont nuls.

   Pour le calcul de la cohomologie on utilise encore que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$. Il suit que la partie de torsion dans le $H_1(K)$ disparait en cohomologie en degré 1 pour réapparaitre en degré 2, via le Ext^1. On a donc

$$H^0(K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad H^1(K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad H^2(K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H^{i\geq 3}(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong 0.$$

   Comme 2 est inversible dans $\mathbb{Q}$, on obtient du théorème des coefficients universels que $H^{i\geq 2}(K, \mathbb{Q}) = 0$, $H^1(K, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \cong H^0(K, \mathbb{Q})$. Il reste à voir la cohomologie dans le cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On obtient encore une fois par coefficient universels que $H^i(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $i = 0, 2$, $H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et que les autres groupes sont nuls.

Remarque : c'est un phénomène général que la torsion en degré 1 est poussé en degré en cohomologie, qui découle évidemment du théorème des coefficients universels. On peut vérifier que, à coefficient dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ vérifie bien le résultat prédit par la dualité de Poincaré.

Exercice 2 (**Produit Cup**). 1. Soit $X = S^n \vee S^m \vee S^{n+m}$. Montrer que X a les mêmes groupes d'homologie et cohomologie que $S^n \times S^m$.

2. Calculer les structures d'anneaux de la cohomologie de X et de $S^n \times S^m$ et en déduire que ces espaces ne sont pas homéomorphes ni homotopes (on pourra utiliser que le morphisme de Künneth est un morphisme d'anneaux gradués).

3. Montrer qu'il y'a une application continue du tore à g-trous vers $\bigvee_{i=1}^{g} T$ (où $T = S^1 \times S^1$ est le tore usuel). En déduire la structure d'anneau de la cohomologie du tore à g-trous.

Solution 2. Rappelons que le produit direct d'algèbre est $A \times B = A \oplus B$ avec pour produit $(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$. Si A, B sont unitaires $(1, 1)$ est l'unité de $A \oplus B$.

1. On a bien sur que $H_*(S^0) \cong H_*(\{*\}) \oplus H_*(\{*\}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ comme algèbre. Pour $n > 0$, la cohomologie de S^n est facile à calculer. En effet il n'y a que deux groupes non-triviaux, l'un en degré 0 qui est engendré par l'unité de la multiplication d'après le cours et l'un en degré $n > 0$ dont les produits entre eux s'envoient sur 0 pour des raisons de degré (il n'y a rien en degré $2n$). Ainsi $H(S^n) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}x$ où x est un générateur de $H^n(S^n)$ (et donc est de degré n).

   Le théorème d'écrasement donne que $\tilde{H}_*(X) \cong \mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y \oplus \mathbb{Z}z$ où x, y, z sont respectivement de degrés n, m et nm. Le théorème de Künneth nous dit que l'homologie de $S^n \times S^m$ est la même.

   Le théorème des coefficients universels (les groupes étant tous libres) nous donne que $H^*(X \cong \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y \oplus \mathbb{Z}z)$ (en notant encore abusivement x, y, z les générateurs des groupes duaux) et donc de même pour $S^n \times S^m$)..

2. Regardons les structures d'anenaux. On a que l'application quotient canonique $S^n \coprod S^m \coprod S^{n+m} \to X$ induit un isomorphisme en homologie en degré > 0 et toujours par coefficient universel en cohomologie en degré > 0 aussi. Comme $p^* : H^*(X) \to H^*(S^n \coprod S^m \coprod S^{n+m}) \cong H^*(S^n) \oplus H^*(S^m) \oplus H^*(S^{n+m})$ est en plus un morphisme d'anneaux, on obtient du calcul de la structure d'anneau des sphères que

$$H^*(X) \cong \mathbb{Z}[x, y, z]/(xy = xz = yz = x^2 = y^2 = z^2 = 0).$$

   On sait que l'application produit $\bigoplus_{n\geq 0} \bigoplus_{i+j=n} H^i(X) \otimes H^j(Y) \to \bigoplus_{n\geq 0} H^n(X \times Y)$ de la fomrule de Künneth est un morphisme d'anneaux. On en déduit donc que

$$H^*(S^n, S^m) \cong H^*(S^n) \otimes H^*(S^m) \cong k[x]/(x^) \otimes k[y]/(y^2) = k[x, y]/(x^2, y^2).$$

   Ces deux anneaux ne sont pas isomorphes car dans le premier, el produit de tout élément de degré non-nul avec un autre fait 0, alors que dans le deucième le produit de x et y est non nul ! Il suit que les espaces ne peuvent être homotopes (sinon toute équivalence d'homotopie entre eux serait un morphisme d'anneaux qui serait un isomorphisme en homologie).

3. Il suffit de contracter des cercles en un point pour séparer les trous puis de les déformer de manière à créeer un bouqet (il suffit pour cela de quotienter le long d'un chemin les reliant). D'après les calculs d'homologie que nousa vons déjà fait, on a alors, en notant Σ_g le tore à g-trous que l'application quotient $p : \Sigma_g \to \bigvee_{i=1}^g T$ est un isomorphisme en degré 1. On note x_i, y_i les générateurs des classes de cohomologie de degré 1 provenant du i-ième tore du bouquet. On a donc $H^1(\Sigma_) = \mathbb{Z}p*(x_1) \oplus \mathbb{Z}p^*(y_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}p^*(x_g) \oplus \mathbb{Z}p^*(y_g)$.

   En degré 2, l'application p_* envoie le générateur x de $H_2(\Sigma_g)$ sur $(y_1, \ldots, y_n)$ où y_n est un générateur de l'homologie en degré 2 de T. L'argument est le même que pour montrer que l'application $S^n \to \bigvee S^n$ que nous avons vu dans la feuille de TD précédente est aussi l'application diagonale. En appliquant le théorème des coefficients universels, on en déduit que si $w_i \in H^2(T)$ est le générateur du i-ième tore du bouquet, on a que $p^*(w_i) \cong w$ où w est le générateur de $H^2(\Sigma_g)$ (quitte à évidememnt choisir bien les w_i pour que les signes correspondent). Notons que p^* est un morphisme d'anneau. Comme par le début de l'exercice nous connaissons les anneaux de cohomologie de T et d'un bouquet, on en déduit que pour tout i, $p^*(x_i) \cup p^*(y_i) = p^*(x_i \cup y_i) = p^*(w_i) = w$, et que tous les autres produits sont nuls, c'est à dire $p^*(x_i) \cup p^*(x_j) = p^*(y_i) \cup p^*(y_j) = 0$ pour tout i, j et pour tout $i \neq j$, $p^*(x_i) \cup p^*(y_j) = 0$.

Exercice 3 (**Non existence de structures de groupes topologiques et degré).** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $[S^n]$ un générateur du $\mathbb{Z}$-module $H_n(S^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

1. Soit $f : S^n \to S^n$ une application continue. Montrer qu'il existe un un unique entier $\deg(f)$ tel que $f_*([S^n]) = \deg(f)[S^n]$. On appelle cet entier le degré de f. Quel est le degré de l'application antipodale $x \mapsto -x$?

2. Montrer que l'application $\mathrm{Hom}(H_*(S^n), \mathbb{Z}) \to H^*(S^n)$ est un isomorphisme. On notera w_n l'image de $[S^n]$.

3. **(Structures de groupes sur les sphères)** On va montrer qu'il n'y a pas de structures de groupe topologique sur les sphères S^{2n} pour $n > 0$.

   (a) Montrer que $H_k(S^m \times S^m) \cong \bigoplus_{i+j=k} H_i(S^m) \otimes H_j(S^m)$ et de même en cohomologie et que pour toute application $\mu : S^m \times S^m \to S^m$, il existe $\deg_1(\mu), \deg_2(\mu) \in \mathbb{Z}$ tels que $\mu_*([S^n]) = \deg_1(\mu)[S^n] \otimes 1 + \deg_2(\mu) 1 \otimes [S^n]$.

   (b) Montrer que si $\mu : S^m \times S^m \to S^m$ admet une unité, alors $\deg_1(\mu) = \deg_2(\mu) = 1$.

   (c) En utilisant que $w_n \cup w_n = 0$, montrer que $\deg_1(\mu)\deg_2(\mu) = 0$ si n est pair (on pourra utiliser que le cup-produit est gradué commutatif).

   (d) Conclure.

Solution 3. 1. Ceci a été vu en cours. Cela résulte simplement du fait qu'une application linéaire de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ est donnée par la multiplication par un entier. On a énoncé en cours (et en devoir à rendre) que l'application antipodale est de degré $(-1)^{n+1}$.

2. On applique les coefficients universels, ce qui donen le résultat puisque $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, -) = 0$.

3. (a) On applique le Théorème de Künneth commed ans l'exercice 1 ce qui donne le premier isomorphisme, puis les coefficients universels, ce qui, les groupes d'homologie étant tous libre, donne le deuxième isomorphisme $H^k(S^m \times S^m) \cong \bigoplus_{i+j=k} H^i(S^m) \otimes H^j(S^m)$. On a en particulier que $H_m(S^m) \otimes H_0(S^m) \cong \mathbb{Z}$ est engendré par $[S^n] \otimes 1$ et qu'en cohomologie, son dual est engendré par $w_n \otimes 1$. De même $H^0(S^m) \otimes H^m(S^m) \cong \mathbb{Z}$ est engendré par $1 \otimes w_m$. D'où $\mu_*([S^n]) = \deg_1(\mu)[S^n] \otimes 1 + \deg_2(\mu) 1 \otimes [S^n]$ en décomposant dans la base aisni obtenue.

   Notons que dualement, pour tout $\mu : S^m \times S^m \to S^m$, $\mu^\#(w_n) = \deg_1(\mu) w_m \otimes 1 + \deg_2(\mu) 1 \otimes w_m$ et de plus $\deg_1(\mu), \deg_2(\mu)$ sont uniques (et indépendant du type d'homotopie de μ).

   (b) Soit e une unité; alors $\mu(x, e) = x$ pour tout $x \in S^m$. Soit $i_1 : S^m \to S^m \times S^m$ l'application $x \mapsto (x, e)$. Alors $\mu \circ i_1 = \mathrm{Id}_{S^m}$. Comme $\mathrm{Id}_* = \mathrm{Id}$, on a $\deg(\mathrm{Id}_{S^m}) = \deg(\mu \circ i_1) = 1$. Montrons alors que $\deg(\mu \circ i_1) = \deg_1(\mu)$. Le même argumetn montrera que $\deg(\mu \circ i_2) = \deg_2(\mu)$ avec les notations évidentes.

   Pour cela on utilise évidemment la fonctorialité. Soit $x \in S^n$ un point. On a un homéomorphisme $S^m \cong S^m \times \{x\}$ qui induit une injection $i_x : S^m \cong S^m \times \{x\} \overset{\mathrm{Id} \times i}{\to} S^m \times S^m$ en notant $i : \{x\} \hookrightarrow S^1$ l'injection canonique. De même, en notant $j : S^m \to \{x\}$ l'application constante on a un morphisme $j_x : S^m \times S^m \overset{\mathrm{Id} \times j}{\to} S^m \times \{x\} \cong \S^m$. Par naturalité de l'isomorphisme de Künneth, on obtient, pour tout i, un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_i(S^m \times S^m) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "(\mathrm{Id} \times j)_*"'] & \bigoplus_{p+q=i} H_p(S^m) \otimes H_q(S^m) \arrow[d, "\mathrm{Id} \otimes j_*"] \\
H_i(S^m \times \{x\}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "(\mathrm{Id} \times i)_*"'] & \bigoplus_{p+q=i} H_p(S^m) \otimes H_q(\{x\}) \arrow[d, "\mathrm{Id} \otimes i_*"] \\
H_i(S^m \times S^m) \arrow[r, "\simeq"] & \bigoplus_{p+q=i} H_p(S^m) \otimes H_q(S^m)
\end{tikzcd}$$

   Etant donné que $H_q(\{x\})$ est concentré en degré 0, j_* et i_* sont nulles en degré $n > 0$ et égaux à l'identité en degré 0. Il suit alors du haut du diagramme et des calculs précédents que $j_{x*}([S^n] \otimes 1 + 1 \otimes [S^n]) = [S^n]$ et du bas du diagramme que $i_{x*}([S^n]) = [S^n] \otimes 1$. Ceci termine la preuve !

(c) On a $w_m \cup w_m \in H^{2m}(S^m) = 0$ pour des raisons de degré. Par naturalité du produit cup, on en déduit que $0 = \mu^*(w_m \cup w_m) = \mu^*(w_m) \cup \mu^*(w_m)$. Or, si m est pair, le cup produit de $H^\bullet(S^m \otimes S^m, \mathbb{R}_{S^m \times S^m})$ est commutatif puisque les seules classes de cohomologie non nulles sont concentrées en degré pair et que le cup-produit est gradué commutatif. On peut donc appliquer la formule du binôme :

$$\begin{aligned}
\mu^*(w_m) \cup \mu^*(w_m) &= (\deg_1(\mu) w_m \otimes 1 + \deg_2(\mu) 1 \otimes w_m) \cup (\deg_1(\mu) w_m \otimes 1 + \deg_2(\mu) 1 \otimes w_m) \\
&= 2\deg_1(\mu)\deg_2(\mu) w_m \otimes 1 \cup 1 \otimes w_m + \deg_1(\mu)^2 w_m \otimes 1 \cup w_m \otimes 1 \\
&\quad + \deg_2(\mu) 1 \otimes w_m \cup 1 \otimes w_m.
\end{aligned}$$

Par naturalité de la formule de Künneth (et toujours commutativité grace à n pair), on trouve $x \otimes y \cup x' \otimes y' = x \cup x' \otimes y \cup y'$; d'où $\mu^*(w_m) \cup \mu^*(w_m) = 2\deg_1(\mu)\deg_2(\mu) w_m \otimes w_m + 0$.Il suit que $\deg_1(\mu)\deg_2(\mu) = 0$.

(d) Si S^m admet une structure de groupe topologique, il admet en particulier une multiplication continue $\mu : S^m \times S^m \to S^m$ et une unité e. D'après **b)**, on doit avoir $\deg_1(\mu) = 1 = \deg_2(\mu)$ et par **c)**, on doit avoir $\deg_1(\mu) = 0$ ou $\deg_2(\mu) = 0$ ce qui est contradictoire. Notons que l'argument marche en fait pour toute multiplication continue avec une unité (et même une unité homotopique !).

Exercice 4 (Cohomologie des espaces projectifs). *Cet exercice est plus dur; mais le résultat suivant est très important en géométrie et topologie algébrique.* Le but de cet exercice est de montrer que l'anneau de cohomologie $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est isomorphe à l'anneau de polynomes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ (où x est de degré 1) et que l'anneau de cohomologie de $\mathbb{C}P^n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ où x est de degré 2.

1. Montrer que, pour tout $k \leq n-1$, on a un isomorphisme naturel $H^k(\mathbb{R}P^{n-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et en déduire qu'il suffit de montrer que le cup produit du générateur de $H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ avec le générateur de $H^{n-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un générateur de $H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ pour obtenir le résultat souhaité.

2. On identifie $\mathbb{R}P^k \subset \mathbb{R}P^n$ avec le sous-espace d'équation $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ (où $[x_0, \ldots, x_n]$ sont les coordonnées homogènes d'un vecteur) et $\mathbb{R}P^{n-k}$ avec le sous-espace d'équation $x_0 = \cdots = x_{k-1} = 0$. Montrer que l'on a un diagramme commutatif naturel (dans lequel les groupes de cohomologie sont à coefficient dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

$$\begin{tikzcd}
H^k(\mathbb{R}P^n) \times H^{n-k}(\mathbb{R}P^n) \arrow[r, "\cup"] & H^n(\mathbb{R}P^n) \\
H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^{n-k}) \times H^{n-k}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^k) \arrow[r, "\cup"] \arrow[u] \arrow[d] & H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - Q) \arrow[u] \arrow[d] \\
H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-k}) \times H^{n-k}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k) \arrow[r, "\cup"] & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})
\end{tikzcd}$$

où $Q = \mathbb{R}P^k \cap \mathbb{R}P^{n-k}$ et les flèches de droite sont des isomorphismes.

3. Montrer que les flèches verticales de gauche sont aussi des isomorphismes.

4. Vérifier que la flèche du bas est un isomorphisme et en déduire la structure d'anneau de la cohomologie de $\mathbb{R}P^n$.

5. En reprenant l'exercice de la feuille 6 sur $\mathbb{C}P^n$ et en utilisant les coefficient universels (ou Mayer-Vietoris pour la cohomologie), vérifier que $H^k(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}$ si $k = 2i$ avec $0 \leq i \leq n$ et 0 sinon. On notera x un générateur de $H^2(\mathbb{C}P^n)$.

6. Montrer que, pour tout $k \leq n-1$, on a un isomorphisme naturel $H^k(\mathbb{C}P^{n-1}) \cong H^k(\mathbb{C}P^n,)$ et en déduire par récurrence qu'il suffit de montrer que $x \cup x^{n-1}$ est un générateur de $H^{2n}(\mathbb{C}P^n)$ pour obtenir le résultat souhaité.

7. En appliquant le théorème de dualité de Poincaré et les relations entre produit cup et cap, montrer qu'il existe un entier k tel que $x \cup kx^{n-1}$ soit un générateur de $H^{2n}(\mathbb{C}P^n)$.

8. En déduire que $k = \pm 1$ et le résultat souhaité puis démontrer que $\mathbb{C}P^3$ n'est pas homotope à $S^2 \times S^4$.

Solution 4. On utilise les études des TDs précédents et du cours sur les espaces projectifs et leur homologie.

1. On a calculé l'homologie des espaces projectifs en utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris associée à la structure cellulaire de $\mathbb{R}P^n$ où on recolle un disque D^n (identifié à l'hémisphère supérieur de la sphère unité S^n de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$) sur $\mathbb{R}P^{n-1}$ via l'application antipodale sur le bord, c'est à dire en identifiant z et $-z$. Le calcul de la la suite de Mayer-Vietoris donne alors que l'inclusion de $\iota : \mathbb{R}P^{n-1}$ dans $\mathbb{R}P^n$ est un isomorphisme en homologie en degré $k < n$, pour tout coefficient. Par le théorème des coefficients universels le dual de cette application induit aussi un isomorphisme en cohomologie en tout degré $k < n$.

   Rappelons que $\mathbb{R}P^1 \cong S^1/(x \sim -x) \cong S^1$. En particulier, d'après les calculs de l'exercice 1 (ou le cours), son anneau de cohomologie est bien $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^2)$. Supposons maintenant avoir démontré ce résultat pour $\mathbb{R}P^{n-1}$. Comme le morphisme ι^* est un morphisme d'anneau qui est un isomorphisme en degré $< n$, on a rien à montrer pour le produit d'éléments x^i, x^j en degré $i + j < n$. Et on a en particulier bien que le générateur de la cohomologie en degré i est la puissance i-ième de x: $x^i = x \cup \cdots \cup x$. Supposons avoir montré que $x \cup x^{n-1}$ est un générateur de $H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; générateur que nous notons évidemment x^n. Alors, pour des raisons de degré $x^{n+1} = x \cup \cdots \cup x = 0$. Il reste à vérifier que $x^i \cup x^{n-i}$ est bien égal à x^n. Mais comme $x^i = x \cup x^{i-1}$, on a $x^i \cup x^{n-i} = x \cup x^{n-1}$ et on a donc plus rien à montrer.

2. Le diagramme est une conséquence immédiate du fait que le cup-produit passe à l'homologie relative une fois que l'on choisit les applications verticales comme étant celles induites (en cohomologie, d'où le sens des flèches) par les inclusions de paires $(\mathbb{R}P^n, \emptyset) \hookrightarrow (\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^{n-k})$ etc... On conseille de faire un dessin ou à défaut de contemple la figure **??** pour voir ce qui se passe. En particulier, on a que $Q = \mathbb{R}P^{n-k} \cap \mathbb{R}P^k$ est un point (correspondant à $[0, \dots, 0, 1, 0, \dots]$ en coordonnées homogène où 1 correspond à la cordonnée x_k). Ce point est dans le complément $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-1}$ où on identifie $\mathbb{R}P^{n-1}$ avec le sous-espace défini par $x_k = 0$ et correspond à l'élément 0 de $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^k \times \{1\} \times \mathbb{R}^{n_k}$; en particulier on a bien une inclusion $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$ dont la restriction à $\mathbb{R}P^n \setminus Q$ est l'inclusion $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}P^n \setminus Q$. De même, Q est aussi dans les compléments $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}P^k \setminus \{x \in \mathbb{R}P^k, x_k = 0\}$ et $\mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}P^{n-k} \setminus \{x \in \mathbb{R}P^{n-k}, x_k = 0\}$. Ceci définit en particulier aussi les inclusions $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-k} \hookrightarrow \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-k}$ et $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^k$ correspondant à la flèche induisant celle en bas à gauche dans le diagramme.

   Il reste à voir que les flèches de droite sont des isomorphismes. Pour cela on applique l'excision à $\mathbb{R}P^{n-1} \subset \mathbb{R}P^n \setminus Q \subset \mathbb{R}P^n$. Cela nous donne directement que la flèche du bas à droite est un isomorphisme. Par ailleurs, Mayer Vietoris (en version cohomologique ou bien l'original plus l'application des coefficients universels) dit que le générateur de degré n de la cohomologie est induit par le morphisme de connexion $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \xrightarrow{\delta} H^n(\mathbb{R}P^n)$; ici $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ n'est rien d'autre que l'intersection des ouverts $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}P^n \setminus Q$, ce dernier se rétractant par déformation sur $\mathbb{R}P^{n-1}$. De la suite exacte longue de la paire, on déduit une suite exacte

$$H^{n-1}(\mathbb{R}P^n) \to H^{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) \xrightarrow{\delta^*} H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus Q)) \to H^n(\mathbb{R}P^n) \to 0$$

   dont la première flèche est un isomorphisme comme on l'a vu dans la question 1. Il suit que la deuxième qui est notre deuxième flèche verticale aussi.

3. Que les flèches de gauche soient des isomorphismes se fait essentiellement de la même façon qu'à droite. On a en fait des isomorphismes $H^k(\mathbb{R}P^n) \leftarrow H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^{n-k}) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-k})$ et $H^{n-k}(\mathbb{R}P^n) \leftarrow H^{n-k}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^k) \rightarrow H^{n-k}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k)$ où les flèches sont celles du diagramme, c'est à dire induite par les inclusions de paires. On a vu que la paire $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})$ est homotope, en tant que paire, à la paire $(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus \{0\})$. Notons que

$$\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-k} = \{[x_0, \ldots, x_n], \exists\, i < k \text{ avec } x_i \neq 0\} = \mathbb{R}^{n-k+1} \times \mathbb{R}P^{k-1},$$

Ainsi la longue suite exacte de la paire nous donne, par invariance par homotopie une suite exacte

$$H^{k-1}(\mathbb{R}P^n) \overset{\simeq}{\rightarrow} H^{k-1}(\mathbb{R}P^{k-1}) \overset{\delta^*}{\rightarrow} H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^{n-k}) \rightarrow H^k(\mathbb{R}P^n) \rightarrow 0$$

car $H^k(\mathbb{R}P^{k-1}) = 0$ et que l'inclusion $\mathbb{R}P^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ induit un isomorphisme en cohomologie en degré $\leq k-1$ par la question (1). Il suit alors de l'exactitude de la suite que la flèche $H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^{n-k}) \rightarrow H^k(\mathbb{R}P^n)$ est un isomorphisme ! C'est exactement l'argument de la question précédente.

Pour démontrer que l'autre flèche est un isomorphisme, on utilise l'inclusion de paires: $(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^k - Q) \hookrightarrow (\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^{n-k})$ qui nous donne un diagramme commutatif en cohomologie:

$$\begin{tikzcd}
H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^{n-k}) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^k - Q) \arrow[d] \\
H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-k}) \arrow[r] & H^k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus \{0\}).
\end{tikzcd}$$

On veut voir que la flèche de droite est un isomorphisme; il suffit donc de voir que les trois autres le sont. La flèche du bas est un isomorphisme par invariance par homotopie et car $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^{n-k} \times (\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$. L''argumetn d'excision déjà vu donne que la flèche de gauche est aussi un isomorphisme, et celle d'en haut est un isomorphisme car, comme on l'a vu au dessus, et $\mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^{n-k}$ et $\mathbb{R}P^k - Q$ se rétractent par déformation sur $\mathbb{R}P^{k-1}$. Ainsi on est ramené à la flèche (induite par celle naturelle entre paires) $H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{k-1}) \rightarrow H^k(\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{-1})$ qui est un isomorphisme en raison de slongues suites excats car $H^{i \leq k}(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H^i(\mathbb{R}P^k)$ est un isomorphisme par la question 1.

4. Les groupes de cohomologie des espaces en question sont $\mathbb{Z}$ (comme à la question précédente). On va prendre un générateur σ de l'homologie relative $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ de sorte que les restrictions de σ aux k premières et $n-k$ dernières faces qui donneront des générateurs des groupes d'homologie relatives à la source.

   Soit $\sigma : \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ le n-simplexe singulier défini par le plongement affine envoyant les sommets v_i du simplexe standard sur le point $s_i = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ dont les i-premières coordonnées sont 1. On identifie $0 \in \mathbb{R}^n$ (après translation) avec le centre G de ce simplexe. Si on note (x_i) les cordoonées alors le simplexe $\langle s_0, \ldots, s_n \rangle$ est $\{(x_i), 0 \leq x_n \leq \cdots \leq x_1 \leq 1\}$ et ses faces sont précisément les points pour lesquels on a une égalité parmi ces inégalités. On a bien que σ est un cycle dans l'homologie relative de $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{G\})$ qui engendre l'homologie en degré k (par un calcul déjà vu en cours). Notons maintenant que σ_+ et σ_- (avec les notations du cours) s'identifient avec les simplexes singuliers $\Delta^k \rightarrow \langle s_0, \ldots, s_k \rangle$, $\Delta^{n-k} \rightarrow \langle s_k, \ldots s_n \rangle$. Ces simplexes contiennent le point G dans leur intérieur et il suit qu'ils sont des générateurs de l'homologie relative. Prenons leurs classes de cohomologie duale ϕ^+, ϕ^-. Ces cocyles prennent la valeur 1 (quitte à prendre leur opposé) sur σ_+, σ_- et docn en vertu des coefficients universels engendrent la cohomologie. par ailleurs leur produit cup prend aussi la valeur ± 1 sur σ. Ainsi c'est un générateur de la cohomologie et le résultat est démontré. Ona donc démontré que toutes les flèches sauf celle du haut dans le diagramme de la question 2 sont des isomorphismes. Il suit que celle du haut aussi et donc en l'appliquant à aux générateurs x^k et x^{n-k} on obtient que $x^n := x^k \cup x^{n-k}$ est un générateur de $H^n(\mathbb{R}P^n)$.

5. On utilise simplement les coefficients universels à partir de l'homologie de $\mathbb{C}P^n$ (qui est cosntituée de groupes libres de rang fini).

6. On a calculé l'homologie des espaces projectifs complexes en utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris associée à la structure cellulaire de $\mathbb{C}P^n$ où on recolle un disque D^{2n} sur S^{2n-1}. Le calcul de la la suite de Mayer-Vietoris donne alors que l'inclusion de $\iota : \mathbb{C}P^{n-1}$ dans $\mathbb{C}P^n$ est un isomorphisme en homologie en degré $k < n$, pour tout coefficient. Par le théorème des coefficients universels le dual de cette application induit aussi un isomorphisme en cohomologie en tout degré $k < n$.

   Rappelons que $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$. En particulier, d'après les calculs de l'exercice 1 son anneau de cohomologie est bien $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$, avec x de degré 2. Le reste de l'argument est similaire à celui de la question (1) dans le cas $\mathbb{R}P^n$.

7. Comme $\mathbb{C}P^n$ est une variété différentiable (et même complexe) orientée compacte connexe (on a un atlas où tous les changements de carte sont holomorphes, donc préservent l'orientation), le théorème de dualité de Poincaré implique que la composée
$$H^1(\mathbb{C}P^n) \times H^{n-1}(\mathbb{C}P^n) \overset{\cup}{\to} H^n(\mathbb{C}P^n) \overset{\cap[\mathbb{C}P^n]}{\to} H_0(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z} \tag{0.1}$$
   est non dégénérée. En effet le produit cap entre $H^i(\mathbb{C}P^n)$ et $H_i(\mathbb{C}P^n)$ est l'isomorphisme de dualité (puique ici le théorème des coefficients universels implique que le morphisme de dualité est un isomorphisme) et d'autre part on a que $H_1(\mathbb{C}P^n)$ s'identifie avec $H^{n-1}(\mathbb{C}P^n)$ par le morphisme $(-) \cap [\mathbb{C}P^n]$ ce qui couplé avec ($(x \cup y) \cap [\mathbb{C}P^n] = x \cap (y \cap [\mathbb{C}P^n])$ nous donne que (0.1) est non-dégénéré. Ainsi $H^1(\mathbb{C}P^n) \times H^{n-1}(\mathbb{C}P^n) \overset{\cup}{\to} H^n(\mathbb{C}P^n)$ est un isomorphisme d'où l'existence de $i, j \in \mathbb{Z}$ tels que $ix \cup jx^{n-1} = x \cup (ij)x^{n-1} = \omega$ où ω est un générateur (car x, x^{n-1} sont des générateurs).

8. Le produit cap $(-) \cap [\mathbb{C}P^n] : \mathbb{Z} \cong H^n(\mathbb{C}P^n) \to H_0(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}$ étant un siomorphisme, il envoie un générateur sur un générateur. or $x \cup kx^{n-1} = kx^n$ s'envoie sur $k(x^n \cap [\mathbb{C}P^n]) \in k\mathbb{Z}$. Cela ne peut être un générateur que si $k = \pm 1$. Ainsi $x \cup (\pm x^{n-1}$, et donc $x \cup x^{n-1}$ aussi, est un générateur de $H^n(\mathbb{C}P^n)$ et le résultat sur la structure d'anneau est démontré. Notons que x est un élément dont le cub est non-nul dans la cohomologie de $\mathbb{C}P^3$. En revanche, le cube de tout élément dans $H^*(S^2 \times S^4) \cong \mathbb{Z}[x, y]/(x^2 = y^2 = 0)$ est nul. Ces deux anneaux ne sont donc pas isomorphes et a fortiori les espaces topologiques associées ne sont donc pas homotopes.

Foncteurs Ext, Tor et dérivés

Exercice 5 (**Foncteur Tor**)**.** Soient A un anneau et I et J deux idéaux de A.

1. Montrer que $\mathrm{Tor}_1^A(A, A/J) = 0$.
2. Montrer que $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) \simeq \frac{I \cap J}{IJ}$.
3. Montrer que $\mathrm{Tor}_\bullet^A(\oplus_{i \in I} M_i, N) \cong \oplus_{i \in I} \mathrm{Tor}_\bullet^A(M_i, N)$
4. Montrer que pour tout groupe abélien G, on a $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \cong \ker(G \overset{n\times}{\to} G)$.
5. En déduire qu'un groupe G abélien de type fini est libre si et seulement si $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G, G) = 0$.

Solution 5. Rappelons que le foncteur $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$ est le foncteur dérivé à gauche du produit tensoriel. Il se calcule en prenant une résolution projective $\cdots \overset{d}{\to} P^{-2} \overset{d}{\to} P^{-1} \overset{d}{\to} P^0$ de M. Précisément, $\mathrm{Tor}_i^A(M, N) = H_i\left(P^\bullet \otimes_A N, d \otimes_A \mathrm{Id}\right)$. On a toujours $\mathrm{Tor}_0^A(M, N) = M \otimes_A N$.

Par ailleurs, une propriété fondamentale est que si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte courte de R-modules, alors on a une suite exacte longue en homologie :
$$\cdots \to \mathrm{Tor}_i^R(M, R) \to \mathrm{Tor}_i^R(M, B) \to \mathrm{Tor}_i^R(M, C) \to \mathrm{Tor}_{i-1}^R(M, R) \to \mathrm{Tor}_{i-1}^R(M, B) \to \ldots$$
$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^R(M, C) \to \mathrm{Tor}_0^R(M, R) \to \mathrm{Tor}_0^R(M, B) \to \mathrm{Tor}_0^R(M, C) \to 0.$$

1. Pour tout A-module M libre, projectif ou plat, le foncteur $M \otimes_A \cdot$ est exact, donc les foncteurs dérivés $\mathrm{Tor}_1^A(M, \cdot)$ sont nuls. Comme A est lui-même libre (de rang 1), on a $\mathrm{Tor}_1^A(A, A/J) = 0$. Bien entendu on peut aussi calculer ces foncteurs en prenant une résolution projective de A. Ceci est donné par A concentré en degré 0 puisque A est lui même projectif. On retrouve immédiatement que $\mathrm{Tor}_i^A(A, A/J) = H^{-i}(\ldots 0 \otimes A/J \to 0 \otimes A/J \to A \otimes A/J) = 0$ si $j \neq 0$ et A/J pour $j = 0$. Remarquons, que le module A/J pourrait être remplacé par n'importe quel A-module M dans cette question.

2. On va utiliser la longue suite exacte en homologie associé à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$$

On en déduit la suite exacte longue :

$$\mathrm{Tor}_1^A(A, A/J) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) \longrightarrow I \otimes_A (A/J) \xrightarrow{i \otimes \mathrm{Id}_J} A \otimes_A (A/J) \xrightarrow{\pi \otimes \mathrm{Id}_J} (A/I) \otimes_A (A/J) \longrightarrow 0\ .$$

Or $\mathrm{Tor}_1^A(A, A/J) = 0$ et $A \otimes_A (A/J) \simeq A/J$. Donc $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) = \ker(i \otimes \mathrm{Id}_J)$. Il nous reste à identifier $I \otimes_A (A/J)$ et le morphisme $i \otimes \mathrm{Id}_J$. A cette fin, on utilise l'autre suite exacte courte $0 \longrightarrow J \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/J \longrightarrow 0$ qu'on tensorise par I à gauche. On obtient la suite exacte $I \otimes_A J \xrightarrow{\mathrm{Id}_I \otimes i} I \otimes_A A \xrightarrow{\mathrm{Id}_I \otimes \pi} I \otimes_A (A/J) \longrightarrow 0$ (qui correspond à la partie "$\mathrm{Tor}_0^A(-,-)$" de la suite exacte longue). On rappelle l'isomorphisme : $I \otimes_A A \xrightarrow{\sim} I$ défini par $x \otimes y = xy \otimes 1 \mapsto xy$.

On en déduit que la suite exacte précédente est isomorphe à : $I \otimes_A J \xrightarrow{\varphi} I \xrightarrow{\psi} I \otimes_A (A/J) \longrightarrow 0$, où l'on a $\varphi(x \otimes y) = xy$ et $\psi(z) = z \otimes \bar{1}$. On en déduit que $I \otimes_A (A/J)$ est isomorphe à $I/\operatorname{im}\varphi = I/IJ$. De plus $i \otimes \mathrm{Id}_J$ s'identifie ainsi au morphisme $\varphi : I/IJ \to A/J$ défini par $\varphi\big(x \pmod{IJ}\big) = x \pmod{J}$. il en découle que $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) \cong \ker\varphi = \big\{x \pmod{IJ},\ x \in I \text{ et } x = 0 \pmod{J}\big\} = \big\{x \pmod{IJ},\ x \in I \text{ et } x \in J\big\} = (I \cap J)/IJ$.

3. Prenons $Q_* \to N$ une résolution projective de N. Alors $(\oplus_{i\in I} M_i \otimes_A^{\mathbb{L}} N)$ est calculé par le complexe $(\oplus_{i\in I} M_i) \otimes_A Q_*$ qui est isomorphe (par commutation du produit tensoriel avec la somme directe) au complexe $\bigoplus_{i\in I} M_i \otimes_A Q_*$. Comme l'homologie d'une somme directe de complexes de chaines est la somme directe des homologies, le résultat suit.

4. On utilise la résolution libre $\cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \stackrel{*n}{\to} \mathbb{Z} \to 0$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a, puisque $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} G \cong G$ et que $n \otimes g = 1 \otimes ng$, que $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G)$ est l'homologie en degré 1 du complexe:

$$\cdots \to 0 \to G \stackrel{*n}{\to} G \to 0.$$

5. Si G est de type fini, $G = \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}/k_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/k_n\mathbb{Z}$. En utilisant la question 3, on obtient que $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G, G) \cong 0 \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k_i\mathbb{Z}, G)$ car $\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}^m, G) = 0$ pusique $\mathbb{Z}^m$ est libre. Or comme G contient un facteur $\mathbb{Z}/k_i\mathbb{Z}$, la mutliplication par k_i n'est aps injetcive et $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k_i\mathbb{Z}, G)$ est non-nulle. Donc $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G, G) = 0$ si et seulement si $i = 0$, c'est à dire G est libre.

Exercice 6. Soit k un corps et $R = k[x_1, x_2]$. On considère les R-modules $M' = R/(x_1R + x_2R)$, $M = R/(x_1^2R + x_1x_2R)$ et $M'' = R/(x_1R)$. On munit k de la structure de R-module pour laquelle x_1 et x_2 agissent trivialement.

1. Montrer que $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\times x_1} M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte non scindée.
2. Construire des résolutions libres de M' et M'' et en déduire les modules $\mathrm{Ext}_R^i(M', R)$, $\mathrm{Ext}_R^i(M'', R)$, $\mathrm{Ext}_A^i(M, R)$ pour tout i.
3. Calculer $\mathrm{Ext}_R^\bullet(k, k)$ et $\mathrm{Tor}_\bullet^R(k, k)$.

Solution 6. 1. L'idéal $Rx_1+Rx_1x_2$ de R est dans le noyau de $R\longrightarrow R/(x_1R)$, d'où un morphisme surjectif $M=R/(x_1^2R+x_1x_2R)\longrightarrow M''=R/(x_1R)\to 0$. Par ailleurs, on a un morphisme $R\xrightarrow{\times x_1}R\to R/(x_1^2R+x_1x_2R)$ où la première flèche est la multiplication par x_1. Comme on a une inclusion $x_1(Rx_1+Rx_2)\subset(x_1^2R+x_1x_2R)$, on obtient le morphisme $M'=R/(Rx_1+Rx_2)\xrightarrow{\times x_1}M$. Ce morphisme est injectif, puisque que, si $x_1P(x_1,x_2)=x_1^2Q(x_1,x_2)+x_1x_2R(x_1,x_2)$, alors, $P(x_1,x_2)=x_1Q(x_1,x_2)+x_2R(x_1,x_2)\in Rx_1+Rx_2$ puisque x_1 est non diviseur de 0. Enfin le noyau de $M\longrightarrow M''$ est $x_1R/((x_1^2R+x_1x_2R))=\mathrm{im}(\times x_1)$ par contruction. Donc la suite $0\longrightarrow M'\xrightarrow{\times x_1}M\longrightarrow M''\longrightarrow 0$ est exacte. Notons qu'on a des isomorphismes de k-modules

$$M'\cong k,\qquad M\cong k[x_2]\oplus kx_1,\qquad M\text{''}=k[x_2].$$

Etudions d'un peu plus près les structures de R-modules de M,M',M''. Comme $x_1\in(x_1R+x_2R)$, alors l'action de $x_1\in R$ sur le R-module $M'=R/(x_1R+x_2R)$ est nulle (c'est à dire $x_1.m\text{''}=0$ pour tout $m\text{''}\in M\text{''}$). De même pour l'action de $x_1\in R$ sur le R-module M'' est nulle. Par conséquent, l'action de $x_1\in R$ sur le R-module $M'\oplus M$'' est nulle. En revanche, regardons l' action de $x_1\in R$ sur la classe du polynôme constant $1\in M=R/(x_1^2R+x_1x_2R)$. On a $x_1.1=x_1\notin(x_1^2R+x_1x_2R)$. Donc l'action de x_1 sur M n'est pas nulle. En particulier M n'est pas isomorphe à $M\text{''}\oplus M'$ en tant que R-module, et la suite n'est donc pas scindée.

2. La multiplication par x_1 (qui est injective) et la multiplication par x_2 sont des endomorphismes de R qui commutent. De plus, la multiplication par $x_2\times : R/(x_1R)\to R/(x_1R)$ est injective. On obtient une résolution libre (puisque R est libre sur lui-même) de M' qui s'écrit simplement

$$P(M'):=\qquad\cdots\to 0\to R\xrightarrow{(\times x_1,\times x_2)}R\oplus R\xrightarrow{\begin{pmatrix}-\times x_2\\ \times x_1\end{pmatrix}}R\tag{0.2}$$

De même on a la résolution libre

$$P(M``)=\qquad\dots 0\to R\xrightarrow{\times x_1}R\tag{0.3}$$

(que l'on a déjà rencontré souvent...).

On peut maintenant calculer les modules $\mathrm{Ext}^i_R(M',R)=H^i\big(\mathrm{Hom}_R\big(P(M'),R\big)\big)$. En utilisant le complexe (0.2) et l'isomoprhisme $\mathrm{Hom}_R(R^n,R)\cong R^n$ donné par $(\psi:R^n\to R)\mapsto\big(\psi(1,0\dots0),\psi(0,1,)\dots0),\dots,\psi(0,\dots0,1)\big)$, on obtient le complexe

$$\cdots\to 0\to R\xrightarrow{(\times -x_2,\times x_1)}R\oplus R\xrightarrow{\begin{pmatrix}\times x_1\\ \times x_2\end{pmatrix}}R.\tag{0.4}$$

On obtient alors $\mathrm{Ext}^{i\geq 3}_R(M',R)=0$, $\mathrm{Ext}^0_R(M',R)=0$ car $(\times -x_2,\times x_1)$ est injective, $\mathrm{Ext}^2_R(M',R)=R/(x_1R+x_2R)=M'$. Si $x_1P_1+x_2Q_2=0$, alors $Q_2=x_1R_1$ et $Q_1=x_2R_2$ avec de plus $x_1x_2R_2+x_1x_2R_1=0$ c'est à dire $R_1=-R_2$. D'où $P_1+P_2=-x_2R_1+x_1R_2\in\mathrm{im}((\times -x_2,\times x_1))$ et donc $\mathrm{Ext}^1_R(M',R)=0$. De même, on calcule facilement $\mathrm{Ext}^{i\geq 2}_R(M\text{''},R)=0=\mathrm{Ext}^0_R(M\text{''},R)$ et $\mathrm{Ext}^1_R(M\text{''},R)=M$''. Pour calculer $\mathrm{Ext}^i_R(M,R)$, on utilise la suite exacte longue associée à la suite exacte $0\to M'\to M\to M\text{''}\to 0$:

$$\begin{aligned}&0\to\mathrm{Ext}^0_R(M\text{''},R)\to\mathrm{Ext}^0_R(M,R)\to\mathrm{Ext}^0_R(M',R)\to\mathrm{Ext}^1_R(M\text{''},R)\to\mathrm{Ext}^1_R(M,R)\to\\&\mathrm{Ext}^1_R(M',R)\to\mathrm{Ext}^2_R(M\text{''},R)\to\mathrm{Ext}^2_R(M,R)\to\mathrm{Ext}^2_R(M',R)\to\mathrm{Ext}^3(M\text{''},R)\to\dots\\&\cdots\to\mathrm{Ext}^i_R(M\text{''},R)\to\mathrm{Ext}^i_R(M,R)\to\mathrm{Ext}^i_R(M',R)\to\mathrm{Ext}^{i+1}_R(M\text{''},R)\to\dots\end{aligned}$$

En utilisant les calculs précédents on obtient $\mathrm{Ext}^{i\geq 3}_R(M,R)=0=\mathrm{Ext}^0_R(M,R)$ ainsi que $\mathrm{Ext}^1_R(M,R)\cong\mathrm{Ext}^1_R(M\text{''},R)\cong M$'' et $\mathrm{Ext}^2_R(M,R)\cong\mathrm{Ext}^2_R(M',R)\cong M'$.

3. Le R-module k est isomorphe à M'. On en a obtenu une résolution libre (0.2) à la question **(2)** précédente. Il suffit donc d'appliquer le foncteur $-\otimes_R k$ au complexe (0.2) pour obtenir le complexe

$$\cdots \to 0 \to R\otimes_R k \xrightarrow{(\times x_1,\times x_2)\otimes_R \mathrm{Id}} (R\oplus R)\otimes_R k \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\times x_2 \\ \times x_1\end{pmatrix}\otimes_R \mathrm{Id}} R\otimes_R k \qquad (0.5)$$

dont la cohomologie est $\mathrm{Tor}_i^R(k,k)$. Or la multiplication $R\otimes_R k \cong k$ via l'application $a\otimes\lambda = a.\lambda$. On en déduit que le complexe (0.5) est isomorphe au complexe

$$\ldots \longrightarrow 0 \to k \xrightarrow{0} k\oplus k \xrightarrow{0} k$$

car x_1 et x_2 agissent trivialement sur $k\cong R/(x_1R+x_2R)$. Il suit que $\mathrm{Tor}_0^R(k,k)=k$, $\mathrm{Tor}_1^R(k,k)=k\oplus k$, $\mathrm{Tor}_2^R(k,k)=k$ et $\mathrm{Tor}_{i\geq 3}^R(k,k)=0$. On obtient par un raisonement similaire

$$\mathrm{Ext}_R^0(k,k)=k, \quad \mathrm{Ext}_R^1(k,k)=k\oplus k, \quad \mathrm{Ext}_R^2(k,k)=k \text{ et } \mathrm{Ext}_R^{i\geq 3}(k,k)=0.$$

Exercice 7 (Foncteurs additifs)**.** Soit $\mathcal{C},\mathcal{D}$, deux sous-catégories de R-**Mod** et S-**Mod** qui sont stables par somme directe. On rappelle du cours que F est appelé additif si il commute à la somme directe (c'est à dire $F(X\oplus Y)=F(X)\oplus F(Y)$).

1. Montrer que si F est additif, alors $F(0)\cong 0$.

2. Montrer que pour tout $f,g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, la somme $f+g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est égale à la composée

$$X \xrightarrow{\delta} X\times X \xrightarrow{(f,g)} Y\times Y \xrightarrow{\sim} Y\oplus Y = Y\coprod Y \xrightarrow{\sigma} Y$$

où δ et σ sont les applications naturelles induites par $\mathrm{Id}_X : X\to X$ et $\mathrm{Id}: Y\to Y$.

3. En déduire que F est additif si et seulement si, pour tout X,Y objets de $\mathcal{C}$, l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\xrightarrow{F}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ est un morphisme de groupes.

Solution 7.

1. On a pour tout module que le morphisme canonique $F(A)\oplus F(0)\longrightarrow F(A\oplus 0)=F(A)$ est un isomorphisme. Si on peut trouver A tel que $F(A)$ soit de dimension finie, c'est trivial. De manière générale, notons que la composée $F(A)\to F(A\oplus 0)\to F(A)$ est $F(\mathrm{Id}_A)=\mathrm{Id}_{F(A)}$. Si $F(0)$ était différent de 0 il existerait $y\neq 0$ tel que l'inclusion de y dans $F(A)$ soit non nulle. Cet élément correspondrait donc à un élément x dans $F(A)$. Mais alors $(-x,y)$ serait dans le noyau de la flèche ce qui est absurde.

2. Rappelons que la somme directe $A\oplus B$ est caractérisée par l'existence de morphismes $i_A : A\to A\oplus B \leftarrow B : i_B$ et $A\overset{p_A}{\leftarrow} A\oplus B \overset{p_B}{\to} B$ vérifiant $i_Ap_A+i_Bp_B=\mathrm{Id}_{A\oplus B}$, $p_Ai_A=\mathrm{Id}_A$, $p_Bi_B=\mathrm{Id}_B$, $p_Bi_A=0$ et $p_Ai_B=0$. En particulier

$$\begin{aligned}\sigma\circ(f,g)\circ\delta &= \sigma\circ(f,g)(i_Ap_A+i_Bp_B)\circ\delta\\ &= \sigma\circ f\circ i_A+\sigma\circ g\circ i_B\\ &= f+g.\end{aligned}$$

On a utilisé que la composition est un morphisme de groupes et les définitions de σ et δ dans les égalités ci-dessus.

3. On a $F(X \oplus Y) \cong F(X) \oplus F(Y)$, en particulier $F((f,g)) = (F(f), F(g))$. Comme $F(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$, alors $F(\sigma_X) = \sigma_{F(X)}$ et de même $\delta_{F(X)} = F(\delta_X)$. Il suit alors du **i)** que

$$F(f+g) = F(\sigma \circ (f,g) \circ \delta). = \sigma \circ (F(f), F(g)) \circ \delta = F(f) + F(g).$$

La réciproque est immédiate en utilisant la caractérisation des sommes directes en fonction des applications i_A, p_A, i_B, p_B. Par exemple on a

$$F(p_A) \circ F(i_A) = F(p_A \circ i_A) = F(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{F(A)}$$

et les autres identités se démontrent de la même façon.

Exercice 8. *Cet exercice établit que le groupe* $\mathrm{Ext}^1(M,N)$ *calcule les suites exactes courtes d'extrémités* N, M. *Il se généralise à des suites plus longues et groupes* $\mathrm{Ext}^n(M,N)$ *! C'est évidemment un résultat culturellement e pratiquement important.* Soit A un anneau unitaire et M', M'' deux A-modules.

1. On suppose que $\mathrm{Ext}^1_R(M'', M') = 0$. Montrer que toute suite exacte $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ est scindée (on pourra appliquer le foncteur $\mathrm{Ext}^\bullet_A(M'', -)$ à la suite exacte pour trouver une section).

2. On se propose d'étendre le résultat précédent et de montrer qu'il y a un isomorphisme naturel

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{classes d'isomorphismes de suites exactes} \\ 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \end{array} \right\} \quad \cong \quad \mathrm{Ext}^1_R(M'', M').$$

   (a) Soit $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ une suite exacte. On note $\xi_{f,g}$ cette suite exacte. Montrer qu'il existe un morphisme naturel $\partial_{\xi_{f,g}} : \mathrm{Hom}_R(M', M') \to \mathrm{Ext}^1_R(M'', M')$ tel que $\partial_{\xi_{f,g}} \circ \psi \circ f = 0$ pour tout $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$.

   (b) Soit $0 \xrightarrow{j} K \xrightarrow{p} P \to M''$ une suite exacte avec P projectif. Montrer que l'on a une suite exacte naturelle $\mathrm{Hom}_R(P, M') \xrightarrow{j^*} \mathrm{Hom}_R(K, M') \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1_R(M'', M') \xrightarrow{p^*} 0$.

   (c) Montrer que pour tout $\beta : K \to M'$, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"'] & P \arrow[r, "p"] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & \mathrm{coker}(K \xrightarrow{(j,-\beta)} P \oplus M') \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

   dont les lignes sont exactes.

   (d) En déduire que pour tout $x \in \mathrm{Ext}^1_R(M'', M')$, il existe une suite exacte $\xi_{f,g} : 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ telle que $\partial_{\xi_{f,g}}(\mathrm{Id}_{M'}) = x$.

   (e) Montrer que si deux suites exactes $\xi_{f,g} : 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ et $\xi_{h,k} : 0 \to M' \xrightarrow{h} N \xrightarrow{k} M'' \to 0$ sont isomorphes, alors $\partial_{\xi_{f,g}}(\mathrm{Id}_{M'}) = \partial_{\xi_{h,k}}(\mathrm{Id}_{M'})$. En déduire que $\xi_{f,g} \mapsto \partial_{\xi_{f,g}}(\mathrm{Id}_{M'})$ induit une surjection Θ de l'ensemble des classes d'isomorphismes de suites exactes $\xi_{f,g} : 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ vers $\mathrm{Ext}^1_R(M'', M')$.

   (f) Montrer que Θ est un isomorphisme (on pourra reprendre la construction de 3) et 4) pour trouver un inverse.) A quel élément de $\mathrm{Ext}^1_R(M'', M')$ correspond la suite exacte scindée $0 \to M' \to M' \oplus M'' \to M'' \to 0$?

Solution 8. 1. La suite $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ est scindée si et seulement si il existe une section $s : M" \to M$ telle que $g \circ s = \mathrm{Id}_{M"}$. Regardons la suite exacte longue associée à la suite exacte courte en prenant le foncteur $\mathrm{Ext}^{\bullet}_A(M", -)$; en utilisant $\mathrm{Ext}^0_A(M", X) = \mathrm{Hom}_A(M", X)$, elle se lit

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M", M') \to \mathrm{Hom}_A(M", M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(M", M") \to 0 \to \mathrm{Ext}^1_A(M", M) \to \dots$$

puisque $\mathrm{Ext}^1_A(M", M') = 0$. En particulier $g_* : \varphi \mapsto g \circ \varphi$ est surjective et il existe $s \in \mathrm{Hom}_A(M", M)$ telle que $g \circ s = \mathrm{Id}_{M"}$.

2. (a) Le résultat est une conséquence immédiate de la longue suite exacte en cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_A(M", M') \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, M') \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M', M') \xrightarrow{\partial_{\xi_{f,g}}} \mathrm{Ext}^1_A(M", M') \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M, M') \longrightarrow \dots \end{aligned} \tag{0.6}$$

induite par $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$.

(b) Si P est projectif, $\mathrm{Ext}^1_A(P, M') = 0$ et la suite exacte (0.6) appliquée à $0 \to K \to P \to M" \to 0$ donne le résultat.

(c) On commence par définir des applications $j' : M' \to \mathrm{coker}(K \xrightarrow{(j,-\beta)} P \oplus M')$, $\beta' : P \to \mathrm{coker}(K \xrightarrow{(j,-\beta)} P \oplus M')$ et $p' : \mathrm{coker}(K \xrightarrow{(j,-\beta)} P \oplus M') \to M"$. Le morphisme $\tilde{p} : P \oplus M' \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} P \xrightarrow{p} M"$ vérifie $\tilde{p} \circ (j, -\beta) = p \circ j = 0$, d'où par propriété universelle du conoyau on obtient un morphisme $p' : \mathrm{coker}(K \xrightarrow{(j,-\beta)} P \oplus M') \to M"$. Par composition, on définit $\beta' : P \xrightarrow{(1,0)} P \oplus M' \to \mathrm{coker}(K \xrightarrow{(j,-\beta)} P \oplus M')$ et $j' : M' \xrightarrow{(0,1)} P \oplus M' \to \mathrm{coker}(K \xrightarrow{(j,-\beta)} P \oplus M')$. On note $q : P \oplus M' \to \mathrm{coker}(K \xrightarrow{(j,-\beta)} P \oplus M')$ l'application canonique. Par définition, pour tout $k \in K$, on a $q(j(k)) = q(\beta(k))$ d'où il découle que le carré de gauche du diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"'] & P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta'"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "j'"] & \mathrm{coker}(K \xrightarrow{(j,-\beta)} P \oplus M') \arrow[r, "p'"] & M'' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{0.7}$$

Par définition du conoyau, $p' \circ \beta' = p$. Il reste à voir que la suite du bas est exacte. Comme p est surjective, p' aussi puisque $p' \circ \beta' = p$. Par ailleurs $j'(m') = 0$ implique $(0, m') = (j(k), -\beta(k))$. Comme j est injective, $k = 0$ d'où $m' = \beta(0) = 0$. Ainsi, j' est injective. Il est immédait que $p' \circ j' = 0$. Il reste à voir que $\ker(p') \subset \mathrm{im}(j')$. Soit $(x, m') \in \mathrm{coker}(K \xrightarrow{(j,-\beta)} P \oplus M')$ tel que $0 = p'(x, m') = p(x)$. Par exactitude de la ligne du haut, on a $x = j(k)$. D'où $(x, m') = (j(k), -\beta(k)) + j'(\beta(k) + m') = j'(\beta(k) + m')$ puisque $(j(k), -\beta(k)) = 0$ dans le conoyau.

Conclusion : le diagramme (0.7) est commutatif à lignes exactes.

(d) Pour tout $x \in \mathrm{Ext}^1_A(M", M')$, par **(b)**, il existe $\beta : K \to M'$ telle que $\partial(\beta) = x$. Appliquons le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, M')$ au diagramme (0.7) de la question **(c)**, en notant $M = \mathrm{coker}(K \xrightarrow{(j,-\beta)} P \oplus M')$. Par fonctorialité de la longue suite exacte associée à une suite courte, on obtient un diagramme commutatif de longues suites exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M", M') \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_A(P, M') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(K, M') \arrow[r, "\partial"] & \mathrm{Ext}^1_A(M", M') \arrow[r] \arrow[d, equal] & \dots \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M", M') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M, M') \arrow[r] \arrow[u, "\beta'^*"] & \mathrm{Hom}_A(M', M') \arrow[r, "\partial_{\xi_{j',p'}}"] \arrow[u, "\beta^*"] & \mathrm{Ext}^1_A(M", M') \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

On déduit de la commutativité du diagramme que $\partial_{\xi_{j',p'}}(\mathrm{Id}_{M'}) = \partial(\beta^*(\mathrm{Id}_{M'})) = \partial(\beta) = x$. Ainsila suite horizontale du bas du diagramme (0.7) (avec le β choisi) répond à la question.

(e) Soit $\xi_{f,g} : 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$, $\xi_{h,k} : 0 \to M' \xrightarrow{h} N \xrightarrow{k} M'' \to 0$ deux suites exactes et

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "h"] & N \arrow[r, "k"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un isomorphisme entre $\xi_{f,h}$ et $\xi_{h,k}$. On raisonne comme dans la question précédente : on applique le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, M')$ et du diagramme de longues suites exactes associé on obtient $\partial_{\xi_{f,g}} = \partial_{\xi_{h,k}}$, d'où $\partial_{\xi_{h,k}}(\mathrm{Id}_{M'}) = \partial_{\xi_{f,g}}(\mathrm{Id}_{M'})$. Par conséquent, l'application $\xi_{f,g} \mapsto \partial_{\xi_{f,g}}(\mathrm{Id}_{M'})$ ne dépend que des classes d'isomorphismes de suites exactes. De plus par **(d)**, cette application est surjective.

(f) On fixe P et K comme dans la question **b)**. Pour tout $x \in \mathrm{Ext}^1_A(M", M')$, on choisit $\beta_x \in \mathrm{Hom}_A(K, M')$ tel que $\partial(\beta_x) = x$. Par **d)**, on obtient une suite exacte

$$\xi_{f_x,g_x} := \; 0 \longrightarrow M' \longrightarrow \mathrm{coker}(K \stackrel{(j,-\beta_x)}{\longrightarrow} P \oplus M') \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

telle que $\Theta(\xi_{f_x,g_x}) = x$. On note désormais $M_x = \mathrm{coker}(K \stackrel{(j,-\beta_x)}{\longrightarrow} P \oplus M')$ pour alléger les notations. On note aussi $\gamma : x \mapsto \xi_{f_x,g_x}$ le morphisme induit de $\mathrm{Ext}^1_A(M", M')$ vers l'ensemble des classes d'isomorphismes de suites exactes $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$. On vient de voir que $\Theta \circ \gamma = \mathrm{Id}$. Il reste à montrer que $\gamma \circ \Theta = \mathrm{Id}$; c'est à dire que si $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ vérifie $\partial_{\xi_{f,g}} = x$ alors $\xi_{f,g} \cong \xi_{f_x,g_x}$. Il suffit de trouver un morphisme de A-modules $\psi : M_x \to M$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f_x"] \arrow[d, equal] & M_x \arrow[r, "g_x"] \arrow[d, "\psi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{0.8}$$

commutatif. Alors par le lemme des 5, ψ est un isomorphisme et les suites exactes ξ_{f_x,g_x}, $\xi_{f,g}$ sont isomorphes.

On reprend la construction de ξ_{f_x,g_x}. L'idée est d'utiliser que P est projectif pour construire ψ. En effet, P projectif et $g : M \to M"$ surjective implique qu'il existe $\nu : P \to M$ tel que $p = g \circ \nu : P \to M"$. Par propriété universelle du noyau il existe un morphisme $\beta : K \to M'$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"'] & P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\nu"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{0.9}$$

commutatif. Comme dans **(d)** on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M", M') \arrow[r, "p^*"] & \mathrm{Hom}_A(P, M') \arrow[r, "j^*"] & \mathrm{Hom}_A(K, M') \arrow[r, "\partial"] & \mathrm{Ext}^1_A(M", M') \arrow[r] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M", M') \arrow[r] \arrow[u, equal] & \mathrm{Hom}_A(M, M') \arrow[r] \arrow[u, "\nu^*"] & \mathrm{Hom}_A(M', M') \arrow[r, "\partial_{\xi_{f,g}}"] \arrow[u, "\beta^*"] & \mathrm{Ext}^1_A(M", M') \arrow[r] \arrow[u, equal] & \dots .
\end{tikzcd}$$

En particulier, on a $x = \partial_{\xi_{f,g}}(\mathrm{Id}_{M'}) = \partial(\beta)$. De plus $x = \partial(\beta_x)$ par définition de β_x; donc $\beta - \beta_x \in \ker(\partial)$. D'où par exactitude de la ligne du haut du diagramme précédent, il existe $h : P \to M'$ tel que $h \circ j = \beta_x - \beta$. On a tous les ingrédients pour construire ψ. Par propriété universelle d'un conoyau, il est équivalent de construire $\tilde{\psi} : P \oplus M' \to M$ telle que $\tilde{\psi} \circ (j, -\beta_x) = 0$. On définit $\tilde{\psi}$ comme la composée

$$P \oplus M' \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}} P \oplus M' \xrightarrow{(\nu, f)} M.$$

C'est à dire pour tout $(z, m') \in P \oplus M'$, on pose $\tilde{\psi}(z, m') = \nu(z) + f(m') + f(h(z)))$. On a

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ (j, -\beta_x) &= \nu \circ j + f \circ h \circ j - f \circ \beta_x \\ &= \nu \circ j + f \circ (\beta_x - \beta) - f \circ \beta_x \\ &= 0 \quad \text{(par commutativité de (0.9));} \end{aligned}$$

d'où $\psi : M_x \to M$ est bien défini. Il reste à montrer la commutativité de (0.8). On a $\psi \circ f_x = \psi \circ (0, \mathrm{Id}_{M'}) = f$. Et, comme $g \circ f = 0$, on a $g \circ \tilde{\psi} = g \circ \nu = p$ (par commutativité de (0.9)). D'où $g \circ \psi = p_x$ par unicité de la factorisation au travers d'un conoyau. Ceci termine la preuve de la commutativité du diagramme; donc Θ est un isomorphisme. L'astuce (qui est en fait "forcée") ici est d'introduire le morphisme h pour passer de β à β_x et ainsi utiliser le morphisme ψ donné par la projectivité de P (notons que le fait que ψ ne soit pas uniquement déterminé n'a aucune importance).

Il reste à calculer $\Theta(0 \to M' \to M' \oplus M'' \to M'' \to 0)$. On raisonne comme dans la question **(1)** : il existe une rétraction $r : M \to M'$ telle que $r \circ i_{M'} = \mathrm{Id}_{M'}$ (en notant $i_{M'} : M' \to M' \oplus M$" l'injection canonique). De l'exactitude de la suite (0.6), on obtient que $\partial_{0 \to M' \to M' \oplus M'' \to M'' \to 0}(\mathrm{Id}_{M'}) = \partial_{0 \to M' \to M' \oplus M'' \to M'' \to 0} \circ i_{M'}(r) = 0$; c'est à dire que les suites exactes scindées correspondent à la classe nulle de $\mathrm{Ext}_1^A(M", M')$.

Exercice 9 (**Exactitude et** $\lim^1$**).** *Cet exercice montre que le foncteur limite n'est pas exact dans les groupes abéliens. Il est plus dur que les autres, mais les résultats sont utiles.* Soit R un anneau commutatif unitaire. Si I est un ensemble, on appelle suite exacte de R-$\mathbf{Mod}^I$ une collection $(\ldots A_i \to B_i \to \ldots)_{i \in I}$ de suites exactes de R-$\mathbf{Mod}$.

1. Montrer que $\oplus$ est exact[1] ainsi que le foncteur produit $\prod_{i \in I}$ (où I est un ensemble).

2. Soit I un ensemble totalement ordonné vu comme une catégorie. Démontrer que $\operatorname{colim}_I : R\text{-}\mathbf{Mod}^I \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ (resp. $\lim_I$) est exact à droite (resp. à gauche).

3. On considère maintenant $I = \mathbb{N}^{op} = \cdots \to 3 \to 2 \to 1 \to 0$, c'est à dire les entiers avec la relation d'ordre opposée à l'usuelle. Montrer que colim mais que lim ne l'est pas (indic: considérer $\lim \mathbb{Z}[x]/(x^n)$).

4. On considère $R = \mathbb{Z}$ et soit $\cdots \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_0} A_0$ un foncteur de I dans $\mathbf{Ab}$.
   (a) Démontrer que $H^1(\mathbb{R}\lim(A_i)) \cong \operatorname{coker}(\delta)$ où $\delta : \prod_{\mathbb{N}} A_i \to \prod_{\mathbb{N}} A_i$ est l'application $\delta(a_0, a_1, \ldots) = (a_0 - f_0(a_1), a_1 - f_1(a_2), \ldots)$.
   (b) En déduire que si les $f_i : A_{i+1} \to A_i$ sont surjectives $H^1(\mathbb{R}\lim(A_i)) = 0$.
   (c) Démontrer que l'on a toujours $H^n(\mathbb{R}\lim(A_i)) = 0$ pour tout $n \geq 2$.

[1] cela fait partie de l'exercice de préciser de quoi dans quoi

(d) (**Condition de Mittag-Lefler**) On suppose que pour tout k, il exite $j \geq k$ tel que pour tout $i \geq j$ l'image de A_i dans A_k est la même que l'image de A_j dans A_k.

Démontrer que $\lim^1(A_i) = 0$.

5. (**Application à la cohomologie des espaces**). Soit X un complexe quasi-simplicial et $X_0 \subset X_1 \subset \cdots$ une suite croissante de sous-complexes telle que $X = \bigcup X_n$. On note $i_{k,\infty} : X_k \to X$ et $i_{k,k+1} : X_k \to X_{k+1}$ les inclusions et on dispose ainsi d'applications $i^*_{k,k+1} : H^i(X_{k+1}) \to H^i(X_k)$ ainsi que de $i^*_{k,\infty} : H^i(X) \to H^i(X_k)$. Démontrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a une suite exacte courte

$$0 \to \lim_{\mathbb{N}^{op}}{}^1 H^{i-1}(X_k) \to H^i(X) \to \lim_{\mathbb{N}^{op}} H^i(X_k) \to 0.$$

(Indication: vérifier que le complexe des cochaines quasi-simpliciales vérifie la condition de Mittag-Leffler en tout degré i).

Remarque: le foncteur dérivé $H^1(\mathbb{R}\lim)$ se note classiquement $\lim^1$ dans la littérature.

Solution 9. 1. On doit donc montrer que $- \oplus - : R\text{-}\mathbf{Mod}^2 \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ est exact. Supposons que $A \overset{f}{\hookrightarrow} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C$ et $A' \overset{f'}{\hookrightarrow} B' \overset{g'}{\twoheadrightarrow} C'$ sont des suites exactes courtes. On note $p_A : A \oplus B \to A$, $p_B : A \oplus B \to B$ et $i_A : A \to A \oplus B$, $i_B : B \to A \oplus B$ les applications canoniques de R-modules. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, hook, "f"'] & A \oplus A' \arrow[r, "p_{A'}"] \arrow[d, "f \oplus f'"] & A' \arrow[d, "f'"] \\
B \arrow[r, "i_B"] \arrow[d, "g"'] & B \oplus B' \arrow[r, "p_{B'}"] \arrow[d, "g \oplus g'"] & B' \arrow[d, "g'"] \\
C \arrow[r, "i_C"] & C \oplus C' \arrow[r, "p_{C'}"] & C'
\end{tikzcd}$$

qui est trivialement commutatif. Toutes les lignes sont exactes, ainsi que les colonnes de droite et gauche. De plus la colonne du milieu vérifie $(g \oplus g') \circ (f \oplus f') = g \circ f \oplus g' \circ f' = 0$; c'est donc un complexe. Que $f \oplus f'$ soit injective découle de ce que si $f \oplus f'(x + x') = 0$, alors $f'(P'_A(x + x') = 0$ et par injectivité de f' et exactitude de la première ligne, cela implique que $x + x' = i_A(a)$. Mais comme $i_B \circ f$ est injective et que $i_b \circ f(a) = 0$ par commutativité du diagramme, il suit que $a = 0$ donc $x + x'$ aussi. La surjectivité de $g \oplus g'$ se fait dualement. Il reste à montrer que $\ker(g \oplus g') \subset \mathrm{im}(f \oplus f')$. Si $g \oplus g'(y) = 0$, alors $g' \circ p_{B'}(y) = 0$ par commutativité du diagramme et donc il existe $b \in B$ tel que $i_B(b) = y$. la commyutativité du carré en bas à gauche et l'injectivité de i_C assure que $b \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{im}(f)$ D'où $y = f \oplus f' \circ i_A(a)$ ce qui conclut que la colonne du milieu est exacte.

Pour montrer que $\prod_{i \in I}$ est exact il suffit de noter $\prod_{i \in I} f_i : \prod A_i \to \prod B_i$ est simplement donnée par $(a_i) \mapsto (f_i(a_i))$, c'est à dire coordonnées par coordonnées pour conclure pour les problèmes d'injectivité et surjectivité.

2. On considère le foncteur $\operatorname{colim}_I : R\text{-}\mathbf{Mod}^I \to R\text{-}\mathbf{Mod}$. Montrons qu'il est exact à droite; soit $(0 \to A_i \overset{f_i}{\to} B_i \overset{g_i}{\to} C_i \to 0)_{i \in I}$ une famille de suites exactes courtes et onnnote $a^i_j : A_j \to A_i$ (respectivement b^i_j, c^i_j) les flèches induites par le diagramme de suites exactes, ainsi que α_i, β_i et γ_i les flèches canoniques dans la colimite. La propriété universelle de la colimite donne un

diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[r, hook, "f_j"] \arrow[d, "a^i_j"] \arrow[dd, bend right=60, "\alpha_j"'] & B_j \arrow[r, two heads, "g_j"] \arrow[d, "b^i_j"] \arrow[dd, bend right=60] & C_j \arrow[d, "c^i_j"] \arrow[dd, bend left=60, "\gamma_j"] \\
A_i \arrow[r, hook, "f_i"] \arrow[d, bend right, "\alpha_i"'] & B_i \arrow[r, two heads, "g_i"] \arrow[d, bend right, "\beta_i"'] & C_i \arrow[d, bend left, "\gamma_i"] \\
\operatorname*{colim}_I A_i \arrow[r, "\operatorname*{colim}_I f_i"'] & \operatorname*{colim}_I B_i \arrow[r, "\operatorname*{colim}_I g_i"'] & \operatorname*{colim}_I C_i.
\end{tikzcd}$$

Pour montrer que $\operatorname*{colim}_I g_i$ est surjective, il suffit de montrer que pour tout paire de flèches $f, g : \operatorname*{colim}_I C_i \to M$ telles que $f \circ \operatorname*{colim}_I g_i = g \circ \operatorname*{colim}_I g_i$ on a $f = g$. On a, par commutativité du diagramme que pour tout i, $g \circ \gamma_i \circ g_i = f \circ \gamma_i \circ g_i$ et donc $f \circ \gamma_i = g \circ \gamma_i$ pour tout i. Par unicité de la factorisation au travers de la colimite, on en déduit que $f = g$. Pour l'exactitude en $\operatorname*{colim}_I B_i$, on commence par remarquer que la composée $\operatorname*{colim}_I g_i \circ \operatorname*{colim}_I f_i = 0$ par propriété universelle puisque les $g_i \circ f_i$ sont tous nuls. Il reste à voir que le noyau de $\operatorname{colim} g_i$ est inclus dans l'image de $\operatorname{colim} f_i$. Soit $(y_i \in B_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de la colimite (c'est à dire que $b^i_j(y_j) = y_i$ pour tous les $j \leq i$). Si cette famille est dans le noyau de $\operatorname{colim} g_i$ alors pour tout i, $g_i(y_i) = 0$ et donc par exactitude $y_i = f_i(x_i)$. Comme les f_i sont injectives on obtient que $a^i_j(x_j) = x_i$ et donc (x_j) est dans $\operatorname{colim} A_i$. On en déduit que $\operatorname{colim} f_i((x_i)) = (y_i)$ et donc la conclusion.

Ceci prouve que la colimite est exacte à droite. On montre de manière duale que la limite est exacte à gauche.

3. Un élément de la colimite sur $I = \mathbb{N}^{op}$ de $\ldots A_i \xrightarrow{a_i} A_{i-1} \to \cdots \to A_0$ est un élément du quotient $\bigoplus_i A_i/(x_{i-1} \sim a_i(x_i))$ comme on le voit en vérifiant que ce dernier objet vérifie la propriété universelle de la colimite sur $\mathbb{N}^{op}$. On en déduit par un calcul direct que la colimite sur $\mathbb{N}^{op}$ préserve les noyaux ce qui conclut vu son exactitude à droite. Considérons les surjections canoniques $R[x] \xrightarrow{p_i} R[x]/(x^{i+1})$ qui donnent un morphisme de suites exactes courtes dans $R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathbb{N}^{op}}$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & x^{i+1}R[x] \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, hook] & x^i R[x] \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, hook] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & x^2 R[x] \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, hook] & xR[x] \arrow[d, hook] \\
\cdots \arrow[r] & R[x] \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, two heads] & R[x] \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, two heads] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & R[x] \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, two heads] & R[x] \arrow[d, two heads] \\
\cdots \arrow[r] & R[x]_{/(x^{i+1})} \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & R[x]_{/(x^i)} \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & R[x]_{/(x^2)} \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & R[x]_{/(x)}.
\end{tikzcd}$$

On a que $\lim(\cdots R[x] \xrightarrow{\mathrm{Id}} R[x] \xrightarrow{\mathrm{Id}} R[x]) = R[x]$ (il suffit de vérifier la propriété universelle) mais que $\lim(\cdots R[x]_{/(x^3)} \to R[x]_{/(x^2)} \to R[x]_{/(x)}) \cong R[[x]]$ les séries formelles en x. Or l'inclusion des polynômes dans les séries formelles n'est pas surjective ce qui prouve que lim n'est pas exacte à droite.

Remarque: de manière générale la colimite sur une catégorie filtrante est exacte.

4. On remarque que l'application $\delta : \prod_{\mathbb{N}} A_i \to \prod_{\mathbb{N}} A_i$ définie dans l'énoncé induit une suite exacte

$$0 \to \lim_{\mathbb{N}^{op}} A_i \to \prod_{\mathbb{N}} A_i \xrightarrow{\delta} \prod_{\mathbb{N}} A_i \to \operatorname{coker}(\delta) \to 0.$$

Notons maintenant que si les $f_i : A_{i+1} \to A_i$ sont surjectives, alors par définition $\operatorname{coker}(\delta) = 0$.

(a) Soit maintenant $(A_i) \overset{(q_i^0)}{\to} (I_i^0) \overset{(q_i^1)}{\to} (I_i^1) \overset{(q_i^2)}{\to} (I_i^2) \to \dots$ une résolution injective dans R-$\mathbf{mod}^{\mathbb{N}^{op}}$. On a par définition que $H^1(\mathbb{R}\lim((A-i))) = H^1(\lim((I_i^*))) = \ker(\lim(q_i^2))/\operatorname{im}(\lim(q_i^1)) \cong \lim(\ker(q_i^2))/\operatorname{im}(\lim(q_i^1))$ car on a vu que les limites commutent avec les noyaux.

lemme: *Soit* $0 \to (A_i) \to (B_i) \to (C_i) \to 0$ *une suite exacte de* $\mathbf{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$*, alors on a une suite exacte*

$$0 \to \lim(A_i) \to \lim(B_i) \to \lim(C_i) \to \operatorname{coker}(\delta_A) \to \operatorname{coker}(\delta_B) \to \operatorname{coker}(\delta_C) \to 0.$$

Preuve du lemme: On a que $\operatorname{coker}(\delta_A)$ est le premier groupe de cohomologie du complexe de cochaines $(\prod A_i, \delta) := \prod A_i \xrightarrow{\delta} \prod A_i \to 0 \to 0 \to \dots$ alors que $\lim(A_i)$ est $H^0(\prod A_i, \delta)$. La suite exacte du lemme induit une suite exacte de complexe de cochaines

$$0 \to (\prod A_i, \delta_A) \to (\prod B_i, \delta) \to (\prod C_i, \delta) \to 0$$

car le produit est un foncteur exact d'après la question (1). Ainsi, en prenant la suite exacte longue associée à cette suite exacte courte (sachant qu'il n'y a pas de cohomologie en degré supérieur à 1 on obtient le résultat du lemme. *cqfd.*

On applique le lemme à la suite exact courte $0 \to (A_i) \overset{(q_i^0)}{\to} (I_i^0) \overset{(q_i^1)}{\to} \ker(q_i^2) \to 0$ (en utilisant que les $(I_i^\bullet)$ sont une résolution):

$$0 \to \lim(A_i) \to \lim(I_i^0) \overset{\lim(q_i^1)}{\to} \lim(\ker(q_i^2)) \to \operatorname{coker}(\delta_A) \to \operatorname{coker}(\delta_{I^0}).$$

Il nous suffit maintenant de montrer que $\operatorname{coker}(\delta_{I^0})$ est nul pour obtenir le résultat de la question ! Ceci découle du fait que ce coker s'annule si les morphismes $I_i^0 \to I_{i-1}^0$ sont tous surjectifs d'après ce que l'on a remarqué ci-dessus. Or ce dernier point découle lui même de la propriété de relèvement des modules injectifs appliqué aux injections de tours de la forme
$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$
dans $\mathbf{Ab}^{\mathbb{N}^{op}}$.

(b) L'identification précédente et le calcul immédiat que l'on a fait sur le $\operatorname{coker}(\delta)$ donne le résultat.

(c) On applique le même schéma de preuve que le (a) pour calculer $H^p(\lim(I_i^*)) \cong \ker((q_i^{p+1}))/\lim(q_i^p)$ via l'application du foncteur lim à la suite exacte $0 \to (I_i^{p-2}) \to (I_i^{p-1}) \overset{(q_i^p)}{\to} \ker(q_i^{p+1}) \to 0$. L'annulation des foncteurs $\operatorname{coker}(\delta_{I^q})$ que nous avons montré en (a) donne alors que les groupes de cohomologie sont nuls en degré $q \geq 2$.

(d) On commence par supposer que pour tout j il existe $k > j$ tel que $A_k \to A_j$ est nul (ce qui est évidemment un cas particulier très fort de la condition de Mittag Leffler de l'énoncé). Soit $x_i \in A_i$; notons $y_i = x_i + f_i(x_{i+1}) + \dots + f_{k-2}(x_{k-1})$). Alors $\delta((y_i)) = (x_i)$ et on en déduit que δ est surjective et donc $H^1(\mathbb{R}\lim) = \operatorname{coker}(\delta) = 0$.

Dans le cas général, on se ramène au précédent en considérant, pour tout i, le sous-groupe abélien $Q_i := \operatorname{im}(A_k \overset{f_{k-1}}{\to} \cdots \overset{f_i}{\to} A_i) \subset A_i$. Par construction A_i/Q_i est une tour qui vérifie la condition du début de la question et donc $H^1(\mathbb{R}\lim(A_i/Q_i)) = 0$. Comme les $B_i \to B_{i-1}$ sont tous surjectifs, leur $H^1(\mathbb{R}\lim))$ s'annule aussi. Maintenant on applique la suite exacte des foncteurs $\mathbb{R}\lim$ à $0 \to Q_i \to A_i \to A_i/Q_i$ pour conclure.

5. On note que le complexe quasi-simplicial est un complexe de groupes abéliens libres tel que le morphisme canonique (induit par l'inclusion $X_{i-1} \hookrightarrow X_i$) $\operatorname{Hom}(C_*(X_i), \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}(C_*(X_{i-1}, \mathbb{Z})$ est surjectif pour tout i. Sachant que $X = \operatorname{colim} X_i$ en tant qu'espace topologique, on a

$\mathrm{Hom}(C_*(X), \mathbb{Z}) \cong \lim \mathrm{Hom}(C_*(X_i), \mathbb{Z})$. Il nous suffit maintenant de voir que l'on a une suite exacte courte

$$0 \to \lim_{\mathbb{N}^{op}}{}^1 H^{i-1}(X_k) \to H^i(\lim C^*(X_i)) \to \lim_{\mathbb{N}^{op}} H^i(C^*(X_i)) \to 0.$$

Pour obtenir cette dernière suite exacte courte, on applique la suite exacte associée à $\mathbb{R}\lim$ à la suite exacte courte $Z^*(X_i) \hookrightarrow C^*(X_i) \overset{d}{\twoheadrightarrow} B^*(X_i)$. On obtient de l'annulation des foncteurs dérivés en degré ≥ 2 de la question précédente en (c), que $H^1(\mathbb{R}\lim(B^*(X_i))) = 0$ et une suite exacte courte $0 \to B^*(X_i) \to \lim B^*(X_i) \to H^1(\mathbb{R}\lim(Z^*(X_i))) \to 0$ car les $C^*(X_i)$ vérifient la condition de Mittag-Leffler et que leur $H^1(\mathbb{R}\lim))$ s'annule. Maintenant la suite exacte courte $0 \to B^*(X_i) \to Z^*(X_i) \to H^*(X_i) \to 0$ nous donne que $H^1(\mathbb{R}\lim(Z^*(X_i))) \cong H^1(\mathbb{R}\lim(H^*(X_i)))$ et que $0 \to \lim B^*(X_i) \to \lim Z^*(X) \to \lim H^*(X_i) \to 0$ est exacte. On déduit maintenant le résultat énoncé de $H^*(X) = Z^*(X)/B^*(X)$.