

TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE

GRÉGORY GINOT

RÉSUMÉ. La topologie algébrique, du moins à ses origines, a été conçue comme un pont entre la géométrie et l'algèbre. Le but (un peu utopique) est de classer, à homéomorphisme près ou homotopie près, les objets géométriques (ou plus généralement les espaces topologiques) en leur associant des invariants de nature algébrique (nombres entiers, groupes, anneaux, ...). Les idées et structures issues de la topologie algébrique irriguent l'ensemble des mathématiques modernes et ont trouvé de nombreuses applications. Le but de ce cours est de présenter d'une part les bases de la topologie algébrique et d'autre part une de ses axiomatisations, l'algèbre homologique, qui a des applications en géométrie algébrique ou arithmétique, théorie des groupes, représentations et même informatique théorique et mathématiques discrètes. Si l'on partira du cadre proposé, il y a près de 130 ans, par Poincaré dans ses mémoires fondateurs sur l'"*Analysis Situs*", nous suivrons une présentation, un style et démonstrations du 21^{ème} siècle ainsi que l'influence des idées et méthodes catégoriques que nous introduirons au fil du cours.

TABLE DES MATIÈRES

I. Introduction à la topologie algébrique et deux théorèmes célèbres	3
1.1. Notion d'invariant topologique	5
1.2. Théorème d'invariance du domaine et du point fixe de Brouwer	7
1.3. Autour de la notion d'invariants topologiques équivalents et des notions catégoriques associées	8
II. Espaces topologiques et homotopie	12
2.1. Notion d'homotopie	12
2.2. Homotopie entre fonctions, entre espaces	12
2.3. Quelques constructions et exemples d'espaces topologiques	17
2.4. Complexes cellulaires	27
III. Construction d'une théorie homologique	29
3.1. Complexes simpliciaux et polyèdres	29
3.2. Homologie simpliciale : l'homologie des complexes simpliciaux	33
3.3. Formule d'Euler-Poincaré	39
IV. Homologie singulière	41
4.1. Définitions et premières propriétés	41
4.2. Techniques de calcul de l'homologie singulière	47
4.2.1. Homologie relative et théorème d'écrasement	47
Homologie d'un bouquet d'espaces topologiques	50
Homologie des suspensions	51
4.2.2. Homologie des recouvrements : théorèmes de Mayer-Vietoris et des petites chaînes	51
Suite exacte de Mayer-Vietoris	55
4.2.3. Excision et démonstration du théorème d'écrasement	57
Formule d'excision	57
4.3. Equivalence des théories homologiques	59
4.3.1. Généralisations des complexes simpliciaux et triangulations	61

4.3.2.	Unicité des théories homologiques d'un point de vue axiomatique	63
4.4.	Cochânes singulières et structure produit de la cohomologie	66
4.5.	Un aperçu de la dualité de Poincaré	73
4.6.	(co)homologie des espaces produits et formule de Künneth	76
V.	Algèbre homologique	80
5.1.	Modules et groupes abéliens	80
5.2.	Complexes de chaînes et suites exactes	85
5.3.	Groupes d'homologie et quasi-isomorphismes	88
5.4.	Les lemmes fondamentaux de l'algèbre homologique	90
5.5.	Complexes de cochaînes et groupes de cohomologie	93
VI.	Résolutions et foncteurs dérivés	97
6.1.	Résolutions projectives et injectives	97
6.2.	Foncteurs dérivés	105
6.3.	Théorèmes des coefficients universels et coefficients locaux	111
VII.	Application : (co)homologie des groupes	115
7.1.	Définition	115
7.2.	Lien avec la topologie	118
7.3.	Quelques propriétés de la (co)homologie des groupes	121
VIII.	Appendice : généralités sur les espaces topologiques	128
8.1.	Espaces séparés, compacts et variantes	128
8.1.1.	Topologie compacte-ouverte pour les espaces de fonctions	130
8.2.	Espaces topologiques définis par des propriétés universelles	131
8.2.1.	Limites et (co)limites dans des catégories	133
	Références	136

Comme essentiellement tout ouvrage de mathématiques, ce cours n'est pas destiné à être lu de manière totalement linéaire et le lecteur est invité à ne pas hésiter à faire des aller-retour dans le texte. En particulier, les notions rappelées ou introduites dans le chapitre algèbre homologique seront progressivement utilisées dans les chapitres **III** et **IV** et 3.3. De même pour certaines notions de topologie et de catégorie de l'appendice. Par ailleurs, certaines parties seront traitées superficiellement en cours et sont là à titre culturel et pour permettre d'aller un peu plus loin que ce qui est vu en cours.

Notations et Conventions. Dans tout ce cours, nous noterons

- I le segment compact $[0, 1]$, S^n la sphère de dimension n , D^n la boule unité de l'espace euclidien \mathbb{R}^n , dont le bord ∂D^n est S^{n-1} .
- Le produit $X \times Y$ de deux espaces topologiques sera systématiquement muni de la topologie produit 8.2.1 sauf mention express du contraire.
- De même, la réunion *disjointe* $\coprod X_i$ d'espaces topologique sera munie de la topologie "réunion" (dont les ouverts sont les réunions des ouverts de chaque composante X_i), et plus exactement appelée topologie coproduit (définition 8.2.4).

I. INTRODUCTION À LA TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE ET DEUX THÉORÈMES CÉLÈBRES

L'objet de la topologie algébrique est de classifier, et plus généralement d'étudier, les "espaces" topologiques en leur associant des invariants qui sont en général des objets, structures algébriques (par exemple des groupes abéliens).

Si espace est en italique, c'est que selon les cas on peut s'intéresser à tous les espaces topologiques, ou bien seulement à ceux qui sont géométriques, les variétés différentiables par exemple, et à bien d'autres variantes issus de la topologie ou d'autres domaines des mathématiques.

On va maintenant préciser (ou rappeler) un peu les termes de ce slogan, en commençant par ce qu'on veut classer :

Définition 1.0.1 (Espace topologique). Un espace topologique X est un ensemble muni d'une famille de sous-ensembles $U \subset X$ appelés ouverts, satisfaisant les propriétés suivantes :

- (1) X et l'ensemble vide \emptyset sont ouverts,
- (2) une réunion quelconque $\bigcup_I U_i$ d'ouverts est un ouvert,
- (3) l'intersection d'une famille *finie* d'ouverts est un ouvert.

Un *sous-espace topologique* de X est un sous-ensemble $A \subset X$ muni de la *topologie induite*¹, c'est-à-dire dont les ouverts sont ceux les sous-ensemble $U \cap A$ où U est un ouvert de X .

Un *homéomorphisme* est une bijection continue dont la réciproque est aussi continue.

Notation 1.0.2. On notera $X \cong Y$ lorsque X et Y seront homéomorphes.

On renvoie à l'appendice 8.1 et à la partie 2.3 pour quelques rappels ou compléments sur les notions de topologie générale.

Reprenons l'étude des termes de notre premier énoncé heuristique. Le mot *classifier* demande bien sûr à être précisé : dans cette introduction il s'agit de déterminer les espaces topologiques à *homéomorphisme près*, mais on peut aussi s'intéresser aux variétés à difféomorphismes près et bien d'autre cas. En particulier dans ce cours, et en topologie algébrique de manière générale, nous nous intéresserons surtout à la classification à *homotopie près*, notion qui sera définie dans le chapitre 1.3 suivant.

Quant au mot *invariant*, il signifie qu'on associe à un espace topologique des quantités qui sont les mêmes lorsque deux espaces sont homéomorphes. Si l'invariant est un nombre (par exemple la caractéristique d'Euler-Poincaré 3.3.3), le sens de "le même" ne pose aucun soucis. En revanche, si l'invariant est par exemple un groupe, alors "le même" signifie en fait *isomorphe* en tant que groupe. On voit ainsi qu'il convient à la fois de regarder non seulement les espaces topologiques à homéomorphismes près mais aussi les invariants à des notions d'équivalence/isomorphisme près.

Exemple 1.0.3. Un premier exemple est donné par la règle qui à un espace topologique X associe l'ensemble $\pi_0(X)$ dont les éléments sont les composantes connexes par arcs de X (autrement dit chaque composante connexe par arc de X définit un et un seul élément). Il est évident que si $\varphi : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors φ induit une bijection² entre les ensembles de composantes connexes par arcs de X et Y . Cette construction d'apparence assez naïve permet cependant de distinguer le cercle d'un intervalle. En effet, supposons qu'il existe un homéomorphisme $f : [0, 1] \rightarrow S^1$. Alors $[0, 1] \setminus \{1/2\} \cong S^1 \setminus \{f(1/2)\}$. Mais $\pi_0(S^1 \setminus \{f(1/2)\})$ est réduit à un seul point et n'est donc pas isomorphe à $\pi_0([0, 1] \setminus \{1/2\})$. Un même argument permet aussi de démontrer que \mathbb{R} n'est pas homéomorphe à \mathbb{R}^2 .

1. on laisse en exercice de démontrer que A muni de la topologie induite est bien un espace topologique.

2. en revanche, on voit déjà là que ces ensembles ne sont pas égaux au sens strict du terme et que cette question d'égalité n'a d'ailleurs que peu de sens dans ce contexte.

Cet argument simple, en revanche, ne suffit plus pour distinguer \mathbb{R}^2 de S^2 ou \mathbb{R}^2 de \mathbb{R}^3 . On va construire d'autres invariants généralisant cette notion dans la suite du cours et permettant de généraliser l'idée précédente. En un sens, cette idée simple consiste à compter des trous dans des espaces et d'en comprendre des versions en plus grande dimension.

Reprenons notre étude du slogan et de "classifier". Si on veut, par ailleurs, pouvoir non-seulement étudier les espaces topologiques mais aussi les transformations entre eux, c'est-à-dire les applications continues³; il nous faut alors aussi considérer des transformations entre les invariants d'une manière "cohérente". Ceci est la première des raisons⁴ pour lesquelles on a introduit et développé le langage des *catégories* en topologie algébrique. Nous introduirons de fait petit à petit diverses notions et outils catégoriques assez universels tout au long de ce cours !

Et pour commencer nous allons en donner une

Définition 1.0.4 (Catégorie). Une catégorie \mathbf{C} est la donnée d'une collection d'*objets*, notée $\text{obj}(\mathbf{C})$ et pour tout couple (A, B) d'objets, la donnée d'un ensemble de *morphismes*, noté⁵ $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ et dont on désignera souvent un élément f sous la forme $f : A \rightarrow B$, pour tout objet A d'un morphisme appelé *identité* de A dans A , noté $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$ et d'un opérateur de composition, pour tout triplet (A, B, C) d'objets,

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, C) \xrightarrow{\circ} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, C)$$

(noté pour $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ par $g \circ f$) satisfaisant les propriétés suivantes :

- (1) La composition est associative : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ pour tout $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$;
- (2) la composition est unitaire : $\text{id}_B \circ f = f = f \circ \text{id}_A$ pour tout $f : A \rightarrow B$.

Étant donné une catégorie \mathbf{C} , un morphisme $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ sera appelé un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$ tel que $f \circ g = \text{id}_B$ et $g \circ f = \text{id}_A$.

Une sous-catégorie de \mathbf{C} est simplement une sous-classe d'objets et des sous-ensembles des morphismes entre ces objets qui contiennent les identités et est stable par composition.

Autrement dit, une catégorie est la donnée d'une famille d'objets et d'une famille "abstraite" d'applications entre ces objets.

Exemple 1.0.5 (La catégorie des espaces topologiques). Un exemple fondamental pour nous sera bien sûr la catégorie **Top** des espaces topologiques dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes les applications continues. La composition et l'identité sont simplement celles des fonctions usuelles.

En particulier les isomorphismes de **Top** sont précisément les homéomorphismes.

Exemple 1.0.6 (La catégorie des ensembles). La catégorie **Ens** sera celle dont les objets sont les ensembles et les morphismes sont toutes les applications.

On peut bien entendu regarder plusieurs sous-catégories intéressantes de **Ens** : par exemple celle des ensembles finis (où on ne garde que les ensembles finis et conserve tous les morphismes), celle des surjections (où on se restreint seulement aux applications qui sont surjectives), celle des injections etc. Un isomorphisme dans n'importe laquelle de ces catégories est simplement une bijection.

Exemple 1.0.7 (Monoïdes). On peut penser à la définition d'une catégorie comme celle d'un monoïde "à plusieurs objets". En effet, si M est un monoïde, alors on peut lui associer

3. ou différentiables et bien d'autres variantes selon les cas

4. mais ce n'est pas forcément la plus fondamentale. L'ubiquité et les nombreuses méthodes et constructions des catégories les rendent très utiles en topologie algébrique, toutes ses généralisations et applications, ainsi que dans plusieurs domaines des mathématiques.

5. lorsque la catégorie \mathbf{C} sera claire, il arrivera qu'on note simplement $\text{Hom}(A, B)$ les morphismes de A vers B dans \mathbf{C} .

une catégorie BM qui a un *unique* objet noté $*$ et telle que $\text{Hom}_{BM}(*, *) = M$ de telle sorte que la composition et l'identité soient données respectivement par la multiplication et l'unité de M .

Réciproquement, si on fixe un objet X dans une catégorie \mathbf{D} , alors $(\text{Hom}_{\mathbf{D}}(X, X), \circ)$ est un monoïde.

Exemple 1.0.8. A l'opposé d'un monoïde de l'exemple 1.0.7, tout ensemble E donne lieu à une catégorie dont les objets sont les éléments de la catégorie et les flèches sont les identités de chaque objet seulement.

Un exemple avec plus de structure (et fort utile) est le cas d'un ensemble partiellement ordonné (X, \leq) : Les objets de la catégorie associée sont encore les éléments de X et on se donne en sus exactement un morphisme $x \rightarrow y$ pour toute paire d'objets $x \leq y$.

On peut se représenter une catégorie générale comme une "interpolation ou généralisation simultanée" des deux exemples 1.0.7, 1.0.8 précédents.

Exemple 1.0.9 (Espaces topologiques pointés). Une variante courante de la catégorie des espaces topologiques sera la catégorie \mathbf{Top}_* des espaces pointés. Ses objets sont les espaces $(X, *)$ topologiques munis⁶ d'un point distingué $* \in X$. Les morphismes $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ entre espaces pointés sont donc les applications continues qui préservent les points bases, i. e., telles que $f(x_0) = y_0$.

On notera que \mathbf{Top}_* n'est cependant⁷ une sous-catégorie de \mathbf{Top} .

Exemple 1.0.10 (Catégorie des groupes abéliens, modules). Soit k un anneau commutatif unitaire. On notera $k\text{-Mod}$ la catégorie, dite des k -modules, dont les objets sont les k -modules et les morphismes sont les applications k -linéaires. En particulier, on a la catégorie $\mathbf{Ab} := \mathbb{Z}\text{-Mod}$ la catégorie des groupes abéliens. Cette dernière est une sous-catégorie de la catégorie \mathbf{Gp} de tous les groupes.

Parmi les sous-catégories de $k\text{-Mod}$, on notera $k\text{-Mod}^f$ celle des k -modules de *type fini* (c'est-à-dire admettant un nombre fini de générateurs).

Exemple 1.0.11 (Catégorie opposée). Si \mathbf{C} est une catégorie, on peut lui associer sa catégorie opposée \mathbf{C}^{op} qui a les mêmes objets que \mathbf{C} mais dont les flèches sont inversées. Autrement dit : $\text{Hom}_{\mathbf{C}^{op}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X)$. Si \mathbf{C} est la catégorie BM associée à un monoïde dans l'exemple 1.0.7, alors $(\mathbf{C})^{op} = B(M^{op})$ est la catégorie associée au monoïde avec la multiplication opposée.

Exercice 1.0.12. Montrer que les exemples précédents forment bien des catégories.

Remarque 1.0.13. On pourra remarquer que dans de nombreux exemples précédents (\mathbf{Top} , \mathbf{Ens} par exemple) les objets ne forment pas un ensemble (mais en fait ce qu'on appelle une classe en logique). En revanche les morphismes entre deux objets forment bien un ensemble. Ce point n'est pas essentiel et il existe une théorie des *univers* qui permet de gérer les problèmes de tailles relatives entre objets et morphismes qui remplace les considérations ensemblistes. On en aura cependant pas besoin dans ce cours.

1.1. NOTION D'INVARIANT TOPOLOGIQUE

Nous allons maintenant préciser la notion d'invariant. Comme on l'a vu, on souhaite associer à tout espace topologique un objet d'une nature algébrique, par exemple, un groupe abélien, de sorte que des objets homéomorphes soient envoyés sur des groupes isomorphes. Si on veut par ailleurs, contrôler aussi des applications continues, on va alors associer des applications linéaires à des applications continues. Si on souhaite faire cela de manière cohérente, on aboutit vite à la définition de foncteur.

6. en particulier, ils ne sont pas vides

7. pas

Définition 1.1.1. Soit \mathbf{C} , \mathbf{D} deux catégories. Un foncteur $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ associe à tout objet X de \mathbf{C} un objet $F(X)$ de \mathbf{D} et à tout couple (A, B) d'objets de \mathbf{C} , une application $F(-) : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), F(B))$ vérifiant

- (1) $F(id_A) = id_{F(A)}$,
- (2) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

La définition d'un foncteur doit être assez naturelle et vue comme généralisation "à plusieurs objets" de la notion de monoïde à la lumière de l'exemple 1.0.7. Plus exactement, cela se comporte comme une application au niveau des objets et comme un morphisme de monoïde au niveau des morphismes.

Puisque un foncteur préserve les compositions et l'identité, il suit aisément que :

Proposition 1.1.2. *Un foncteur $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ envoie tout isomorphisme de \mathbf{C} sur un isomorphisme de \mathbf{D} .*

Démonstration. Si $g : Y \rightarrow X$ est un inverse de $f : X \rightarrow Y$, $F(g)$ est un inverse de $F(f)$ car $F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(id_Y) = id_{F(Y)}$ et de même pour l'autre composition. \square

On peut⁸ maintenant vérifier que la définition suivante d'un invariant remplit les critères demandés (la version faible correspondant à différencier les espaces, la version plus forte permettant également d'étudier les applications continues entre espaces).

Définition 1.1.3. Un invariant topologique à valeur dans une catégorie \mathbf{C} est un foncteur $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{C}$.

Un invariant topologique faible est un foncteur $\mathbf{Top}^{\sim} \rightarrow \mathbf{C}$ où \mathbf{Top}^{\sim} est le sous-groupoïde⁹ maximal de \mathbf{Top} , c'est-à-dire la sous-catégorie de \mathbf{Top} dont on a gardé que les isomorphismes.

Il existe bien sûr autant de variantes de cette définition que de variantes de \mathbf{Top} (en particulier, on considérera souvent les exemples pointés). Bien entendu, selon la complexité de la catégorie \mathbf{C} , l'invariant sera plus ou moins facile à calculer, et plus ou moins à même de différencier des espaces topologiques.

Remarque 1.1.4. Notons que pour montrer que deux espaces sont non-homéomorphes, il suffit donc de trouver un invariant topologique pour lequel les valeurs sur ces espaces de l'invariant sont non-isomorphes.

Exemple 1.1.5. Un premier exemple d'invariant topologique est donné par $\pi_0 : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ens}$ défini par $\pi_0(X)$, l'ensemble des composantes connexes par arcs de X vu dans l'exemple 1.0.3. Si $f : X \rightarrow Y$ est continue, et C est une composante connexe par arcs de X , alors $f(C)$ est connexe par arcs et donc inclus dans une unique composante connexe par arcs de Y . Ceci permet de définir le foncteur π_0 sur les morphismes de \mathbf{Top} .

Exercice 1.1.6. Démontrer que π_0 est un foncteur.

Les invariants sur lesquels nous allons essentiellement nous concentrer seront de type "homologique". Nous allons construire dans la suite du cours ?? les groupes d'**homologie singulière**, ce sont des foncteurs

$$H_n : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

pour tout entier $n \geq 0$. Donnons en quelques propriétés.

8. et doit

9. un groupoïde est une catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes. Au vu de l'exemple 1.0.7, on peut voir cela comme un groupe à plusieurs objets donc.

Proposition 1.1.7. *L'homologie singulière vérifie que pour tous entiers $p, n \geq 1$, on a*

$$H_p(\mathbb{S}^n) \cong H_p(\mathbb{R}^n \setminus \{*\}) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n, 0 \\ \mathbb{Z} & \text{si } p = n > 0, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } p = n = 0 \end{cases} .$$

$$H_p(D^n) \cong H_p(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } p > 0 \\ \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \end{cases} .$$

Cette proposition sera démontrée plus loin et on verra que l'homologie singulière a bien d'autres propriétés utiles. Nous allons nous servir cependant de cette proposition pour donner deux applications topologiques célèbres.

Notons que cette proposition implique déjà directement que les sphères S^n et S^m ne sont pas homéomorphes si $n \neq m$ et que de même la sphère S^n n'est pas homéomorphe à \mathbb{R}^m quels que soient n, m (puisque il existe des invariants topologiques pour lesquels leurs valeurs sont non-isomorphes).

1.2. THÉORÈME D'INVARIANCE DU DOMAINE ET DU POINT FIXE DE BROUWER

La première application que nous allons donner est le résultat, intuitif, suivant qui dit que la topologie d'un espace euclidien dépend de sa dimension et plus encore *la détecte*.

Théorème 1.2.1 (Invariance du domaine). *Si deux ouverts non-vides $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ sont homéomorphes alors $n = m$.*

Démonstration. Nous ne démontrons que le cas de $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m$ dans cette introduction. Le cas général nécessitant de connaître un peu plus que la proposition 1.1.7 et sera vu ultérieurement, en TD. Un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ induit un homéomorphisme $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\} \cong \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ et donc des isomorphismes

$$H_p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H_p(\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}) \cong H_p(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$$

pour tout $p \geq 0$. Mais alors la proposition 1.1.7 implique que pour que ces groupes soient égaux il faut que $n = m$. \square

Ce théorème est crucial pour vérifier que la notion de variété *topologique*, en particulier leur dimension, est bien définie et se généralise pour des ouverts de deux variétés. Le théorème de séparation de Jordan et ses variantes en dimension supérieures se démontrent par des méthodes similaires (après avoir introduit l'homologie relative).

Le résultat suivant au lieu de différencier des espaces, s'intéresse aux propriétés des fonctions sur un espace. Nous allons voir qu'il utilise que l'on a un invariant non-faible et la *functorialité*.

Théorème 1.2.2 (Brouwer). *Toute application continue de $f : D^n \rightarrow D^n$ a un point fixe.*

Comme le cas $n = 0$ est trivial, dans la suite on suppose $n \geq 1$.

Le point clé est le lemme suivant.

Lemme 1.2.3 (de non-rétraction). *Il n'existe pas d'applications continues $f : D^n \rightarrow \partial D^n \cong S^{n-1}$ dont la restriction au bord soit l'identité.*

Démonstration. Sinon, en se rappelant que ∂D^n est le bord de D^n , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{f} & \partial D^n \\ \uparrow & \searrow id & \\ \partial D^n & & \end{array}$$

qui induit par functorialité de l'homologie et la proposition 1.1.7 un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(D^n) \cong 0 & \xrightarrow{H_{n-1}(f)} & H_{n-1}(\partial D^n) \cong \mathbb{Z} \\ \uparrow & \nearrow \text{id} & \\ H_{n-1}(\partial D^n) \cong \mathbb{Z} & & \end{array}$$

pour $n \geq 2$. Ce diagramme implique que l'identité $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ se factorise à travers l'application nulle, ce qui est évidemment absurde. Pour $n = 1$, on a une contradiction similaire en considérant les rangs des groupes d'homologie en degré 0. \square

Démonstration du Théorème 1.2.2 de Brouwer. On conseille au lecteur de faire un dessin pour visualiser la construction suivante. Supposons qu'il existe une application continue $f : D^n \rightarrow D^n$ sans point fixe. Considérons $r : D^n \rightarrow \partial D^n$ l'application qui à x associe le point d'intersection avec ∂D^n de la demi-droite (ouverte) portée par $(f(x), x]$ et issue de $f(x)$ (c'est-à-dire $\{f(x) + t(x - f(x)), t > 0\}$). C'est une application continue¹⁰ qui est l'identité sur le bord du disque. Ceci est absurde en vertu du lemme 1.2.3. \square

Il existe de nombreuses variantes et généralisations de ces résultats utilisant des outils homologiques.

Dans ce premier chapitre nous avons surtout insisté sur la relation d'homéomorphie entre les espaces. En fait l'homologie singulière est un invariant plus faible, mais important et plus fondamental en topologie ou pour les applications en dehors de la topologie/géométrie différentielle. Il s'agit de l'homotopie que nous allons introduire dans le prochain chapitre.

1.3. AUTOUR DE LA NOTION D'INVARIANTS TOPOLOGIQUES ÉQUIVALENTS ET DES NOTIONS CATÉGORIQUES ASSOCIÉES

Revenons un instant sur notre définition d'invariant topologique, pour nous demander quand deux invariants sont effectivement différents, ou plus précisément quand est-ce que deux invariants sont égaux. Là encore, si nos invariants sont des nombres, c'est-à-dire si on considérait des fonctions, la réponse serait évidente : ils prennent exactement la même valeur en chaque espace topologique.

Mais dès que l'on considère des invariants un peu plus fin, la question nécessite d'être formulée. Par exemple, si un tel invariant F associe à X , l'espace vectoriel $F(X) = \mathbb{R}^{(n_X)^2}$ et à G l'espace vectoriel $G(X) = \text{End}(\mathbb{R}^{n_X})$ (où n_X est un entier dépendant¹¹ de X) des endomorphismes linéaires de \mathbb{R}^{n_X} , on a envie d'identifier ces 2 valeurs qui sont évidemment deux présentations différentes d'un même objet : un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{R} .

Pour faire cela, on doit cependant garantir, que notre identification ne dépend pas de X en quel que sorte mais se fait "naturellement", c'est-à-dire de manière compatible avec les (iso)morphismes de notre catégorie d'arrivée. Pour préciser cette idée, on introduit la notion de transformation naturelle entre foncteurs, Définition 1.3.2.

Remarque 1.3.1. De manière générale, on peut se demander quelle est la différence entre la catégorie des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{R} et la catégorie \mathbf{Rev}^f dont les objets sont les entiers naturels et les ensembles de morphismes sont les $\text{Hom}_{\mathbf{Rev}^f}(n, m) := M_{m,n}(\mathbb{R})$ sont les matrices de taille $m \times n$ munie de la multiplication matricielle comme composition. Étant donné que tout espace vectoriel réel de dimension finie admet une base le rendant isomorphe à \mathbb{R}^n et que les applications linéaires, une fois les bases choisies, sont

10. il n'est pas dur de donner une formule. Noter que si $f(x) = x$, cette demi-droite n'a plus de direction bien définie...

11. par exemple un foncteur $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbb{N}$. Précisons qu'il existe de tels foncteurs ; nous en verrons d'ailleurs un : la valeur absolue de la caractéristique d'Euler 3.3.3

complètement et uniquement déterminées par leurs matrices. on a envie de voir que ces catégories sont “les mêmes”. Et c’est bien le cas, pour la “bonne” notion d’être les mêmes, voir l’exercice 1.3.8!

Définition 1.3.2 (Transformations et équivalences naturelles). Soient $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ deux foncteurs. Une *transformation naturelle* de F vers G est la donnée, pour tout objet $X \in \mathbf{C}$, d’un morphisme $\tau_X : F(X) \rightarrow G(X)$ dans \mathbf{D} vérifiant que pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans \mathbf{C} le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \tau_X \downarrow & & \downarrow \tau_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

est commutatif.

Une *équivalence naturelle*¹² entre F et G est une transformation naturelle pour laquelle les τ_X sont des isomorphismes.

Intuitivement on doit penser qu’être naturellement équivalent est la “bonne” notion identifiant les mêmes foncteurs¹³. Ceci conduit naturellement à la bonne notion d’équivalence de catégories :

Définition 1.3.3 (Équivalence de catégories). Un foncteur $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ est une *équivalence de catégorie* s’il existe un foncteur $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ tel que les foncteurs $F \circ G$ et $G \circ F$ sont naturellement isomorphes à $\text{id}_{\mathbf{D}}$, $\text{id}_{\mathbf{C}}$ aux foncteurs identités de \mathbf{D} et \mathbf{C} .

Exercice 1.3.4. Soit \mathbf{C} , \mathbf{D} deux petites¹⁴ catégories, c’est à dire des catégories dont les objets forment un ensemble. Démontrer que l’on a bien une catégorie $\text{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ dont les objets sont les foncteurs de \mathbf{C} vers \mathbf{D} et les morphismes sont les transformations naturelles.

Démontrer également que la collection des petites¹⁵ catégories avec les foncteurs comme morphismes, forme une catégorie notée **cat**.

Si on considère **cat** et que l’on considère en plus la donnée des transformations naturelles, alors on obtient un exemple de ce que l’on appelle une 2-catégorie (c’est à dire des objets, des morphismes entre eux et des morphismes entre les morphismes vérifiant des axiomes que nous laissons au lecteur le soin d’imaginer puis d’aller vérifier en ligne ou en bibliothèque).

On a un critère pratique pour déterminer si deux catégories sont équivalentes.

Définition 1.3.5. Un foncteur $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ est

- *plein* si pour tous objets $X, Y \in \mathbf{C}$, l’application $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ est surjective ;
- *fidèle* si pour tous objets $X, Y \in \mathbf{C}$, l’application $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ est injective ;
- *essentiellement surjectif* si pour tout objet Z de \mathbf{D} , il existe un objet $X \in \mathbf{C}$ et un isomorphisme $F(X) \cong Z$. Autrement dit tout objet de la catégorie d’arrivée est isomorphe à l’image d’un objet de la catégorie source.

12. aussi appelé isomorphisme naturel ou isomorphisme de foncteur

13. on peut se convaincre qu’équivalence naturelle est une bonne notion d’équivalence en considérant que cette notion relève précisément l’idée naïve que deux foncteurs induisent le même foncteur sur les catégories “quotients” où on aurait identifié entre eux les objets isomorphes.

14. cette hypothèse n’est pas essentielle en pratique. Elle peut être enlevée si on travaille avec une hiérarchie *d’univers* ; autrement dit si on autorise les morphismes à ne pas être des ensembles mais à éventuellement appartenir à des classes plus grandes.

15. encore une fois, on peut s’affranchir de cette hypothèse en travaillant dans un cadre plus général que les ensembles

Un foncteur plein et fidèle est souvent appelé pleinement fidèle, et par définition cela veut dire qu'il induit des bijections entre les ensembles de morphismes.

Proposition 1.3.6. *Un foncteur $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ est une équivalence de catégorie si et seulement s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.*

Exercice 1.3.7. Démontrer la proposition 1.3.6.

Exercice 1.3.8. Démontrer que la catégorie $\mathbb{R}\text{-Mod}^f$ des espaces vectoriels de dimension finie est équivalente à la catégorie \mathbf{Rev}^f de la remarque 1.3.1, mais que ces catégories ne sont pas isomorphes¹⁶.

Remarque 1.3.9. On considérera que deux invariants topologiques sont "équivalents" si ils sont naturellement isomorphes (à équivalence de catégorie près, c'est-à-dire quitte à les composer par une équivalence de catégorie).

Remarque 1.3.10. Lorsque F est une équivalence de catégorie, il n'y a pas unicité du foncteur G remplissant les conditions de la définition 1.3.3. En revanche il y a unicité à équivalence naturelle près.

Exercice 1.3.11. Si G est un groupe on note G^{op} le même ensemble muni de la multiplication opposée : $x \star^{op} y = y \cdot x$.

- (1) Démontrer que $op : G \mapsto G^{op}, f \mapsto f$ est un foncteur de la catégorie des groupes dans elle-même.
- (2) Démontrer que op est naturellement isomorphe au foncteur identité.

Le résultat de cet exercice illustre qu'un groupe est naturellement isomorphe à lui-même muni de la multiplication opposée. C'est d'ailleurs pour cela qu'on ne fait jamais de différence entre ces deux notions.

Ce n'est pas le cas des monoïdes ou des algèbres associatives !

Exercice 1.3.12. Soit $\mathbb{F}\text{-Vect}$ la catégorie des \mathbb{F} -espaces vectoriels. Pour tout ensemble X , on note $\mathbb{F}\langle X \rangle$ le \mathbb{F} -espace vectoriel de base X , c'est-à-dire le sous-espace vectoriel du produit infini \mathbb{F}^X engendré par les vecteurs coordonnées $e_x = (0, \dots, 0, 10, \dots)$ (où la seule coordonnée non-nulle correspond à un élément $x \in X$). Notons que cet espace vectoriel est précisément l'espace $\bigoplus_{x \in X} \mathbb{F}$ de la définition 5.1.3.

- (1) Démontrer que $F : X \mapsto \mathbb{F}\langle X \rangle, (X \xrightarrow{f} Y) \mapsto (e_x \mapsto e_{f(x)})$ définit un foncteur $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbb{F}\text{-Vect}$.
- (2) Démontrer que la règle qui à un espace vectoriel associe son ensemble sous-jacent et à une application linéaire associe l'application sous-jacente est un foncteur¹⁷ $U : \mathbb{F}\text{-Vect} \rightarrow \mathbf{Ens}$.
- (3) Exhiber des transformations naturelles $\text{id}_{\mathbf{Ens}} \rightarrow U \circ F$ et $F \circ U \rightarrow \text{id}_{\mathbb{F}\text{-Vect}}$ et vérifier que ce ne sont pas des équivalences naturelles.
- (4) Vérifier que F n'est pas une équivalence naturelle. Les foncteurs F, U sont-ils pleins, fidèles, essentiellement surjectifs ?

Exercice 1.3.13. (Des exemples classiques et élémentaires de foncteurs)

- (1) Démontrer que la règle $(X, x_0) \mapsto X$ induit un foncteur $\mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}$. Est-il plein, fidèle, essentiellement surjectif ?

16. Par catégories isomorphes on étend bien sûr l'existence de foncteurs $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ tels que leurs compositions sont exactement les foncteurs identité de \mathbf{C} et \mathbf{D} . Cette notion comme le montre cet exemple est évidemment trop forte en pratique.

17. appelé souvent foncteur d'oubli puisqu'essentiellement il oublie la structure vectorielle mais ne modifie ni les objets ni les morphismes

- (2) Soit G un groupe. Démontrer que l'on a un foncteur $G \rightarrow G^{ab}$ de \mathbf{Gp} dans \mathbf{Ab} qui à un groupe associe son abélianisé $G^{ab} := G/[G, G]$ et construire une transformation naturelle entre l'identité et ce foncteur. Ce foncteur est-il plein, fidèle, essentiellement surjectif?
- (3) Soit \mathbf{Mnd} la catégorie des monoïdes. Montrer que $X \mapsto \tilde{X}$ où \tilde{X} est le plus grand sous-monoïde de X qui soit un groupe, induit un foncteur $\mathbf{Mnd} \rightarrow \mathbf{Gp}$. Peut-on trouver des transformations naturelles entre ce foncteur et l'identité (dans un sens ou dans l'autre). Est-il plein, fidèle, essentiellement surjectif?

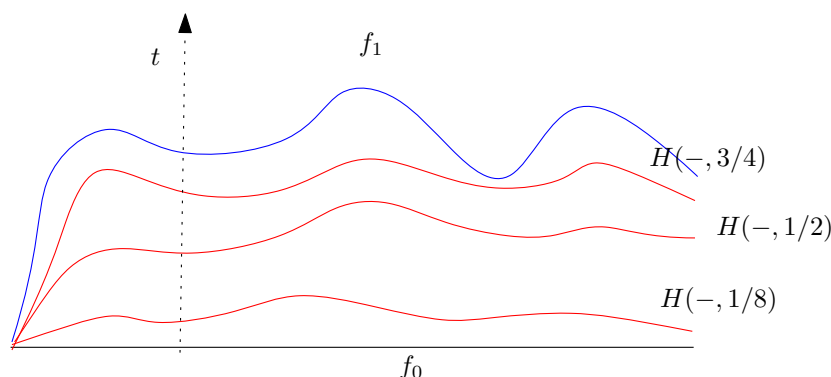


FIGURE 1. Le graphe d'une homotopie entre (les graphes de) f_0 et f_1 , les courbes $H(-, t)$ ($t \in]0, 1[$) étant représentées en rouge.

II. ESPACES TOPOLOGIQUES ET HOMOTOPIE

2.1. NOTION D'HOMOTOPIE

La notion d'homotopie sera une notion clé¹⁸, plus faible que celle d'homéomorphisme, pour identifier deux espaces topologiques. L'idée "intuitive" est que deux espaces topologiques sont homotopes si on peut les déformer continuellement l'un dans l'autre, c'est-à-dire en les étirant ou les contraignant mais sans les déchirer, cf figure (1).

2.2. HOMOTOPIE ENTRE FONCTIONS, ENTRE ESPACES

Définition 2.2.1. Deux applications continues $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques sont dites homotopes s'il existe une application continue $F : X \times \underbrace{[0; 1]}_I \rightarrow Y$ telle que

$$F|_{X \times \{0\}} = f_0 \text{ et } F|_{X \times \{1\}} = f_1.$$

On a une représentation graphique commode, voir figure (2).

Définition 2.2.2. Deux espaces topologiques X et Y sont dit homotopes s'il existe deux morphismes $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ tels que $f \circ g$ est homotope à id_Y et $g \circ f$ est homotope à id_X .

Notation 2.2.3. (1) Si deux morphismes $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sont homotopes, on notera : $f_0 \simeq f_1$.
 (2) Si deux espaces topologiques X et Y sont homotopes, on notera : $X \simeq Y$.
 (3) On rappelle que si deux espaces topologiques X et Y sont homéomorphes, on note : $X \cong Y$.

Proposition 2.2.4. *La relation d'homotopie entre deux applications continues (et par suite entre espaces) est une relation d'équivalence.*

Par ailleurs, si $f \simeq g$ alors $p \circ f \circ q \simeq p \circ g \circ q$ pour toute paire d'applications continues p, q (telle que les composées existent bien sûr).

Exercice 2.2.5. Démontrer ces affirmations. On pourra utiliser le lemme 8.0.2.

¹⁸ les outils et techniques développés pour classifier les espaces topologiques à homotopie près sont ceux qui ont le plus d'applications et d'analogies dans les autres branches des mathématiques ou de l'informatique.

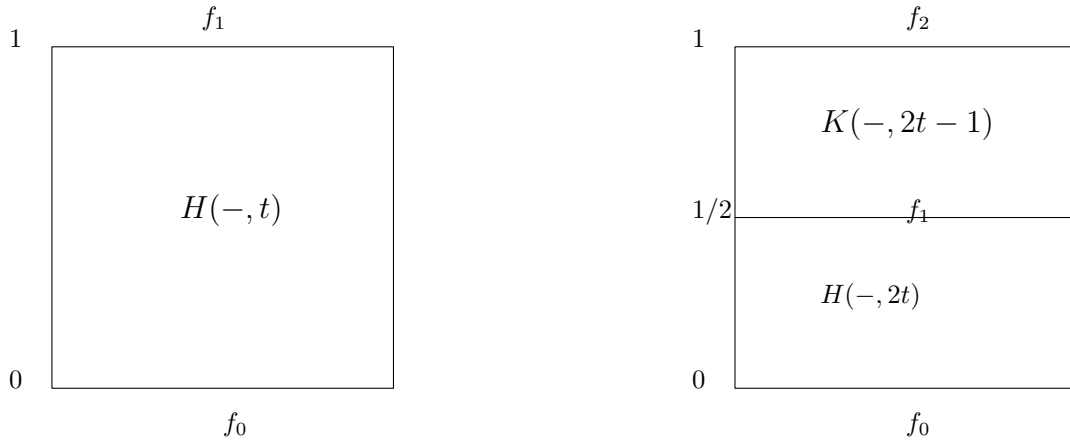


FIGURE 2. La représentation d’une homotopie. À gauche, X est représenté horizontalement, la coordonnée verticale étant celle de I . À droite, le schéma représentant la transitivité de la relation d’homotopie.

Proposition 2.2.6. *Si X et Y sont homéomorphes, alors ils sont homotopes.*

Proposition 2.2.7. *Si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d’homotopie, alors l’application induite $f_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ (cf exemple 1.1.5) est une bijection.*

Ceci montre que $\pi_0 : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est en fait mieux qu’un invariant topologique : c’est un invariant homotopique (fort).

Définition 2.2.8. Un invariant homotopique (fort) à valeur dans une catégorie \mathbf{C} est un foncteur $F : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{C}$ qui vérifie que $F(f) = F(g)$ lorsque f est homotope à g .

En particulier $F(X) \cong F(Y)$ si X et Y sont homotopes. Nous nous intéresserons essentiellement à de tels invariants dans la suite.

Si la catégorie d’arrivée a elle même une notion “d’homotopie” (c’est-à-dire essentiellement une relation d’équivalence sur les morphismes), on peut demander une condition plus faible : que les homotopies soient envoyées sur des homotopies ou une certaine relation naturelle sur les morphismes. Nous y reviendrons plus tard ; sans une telle précision, l’adjectif fort dans notre définition est inutile ! Notons que les H_n que nous avons introduit avant la proposition 1.1.7 sont aussi des invariants homotopiques forts.

Exemple 2.2.9. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction $t \mapsto \exp(2i\pi t)$ paramétrisant le cercle. Et soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ la fonction constante valant 1. On a que f et g sont homotopes. En effet, il suffit de prendre la fonction $H(t, u) = uf(t) + 1 - u$ pour obtenir une homotopie entre ces deux fonctions (essentiellement on contracte le cercle sur son centre et on translate ce dernier en 1). Considérons maintenant ces deux fonctions mais vue comme à valeur dans S^1 (et notée $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow S^1$ et $\tilde{g} : [0, 1] \rightarrow S^1$). Alors l’homotopie précédente n’est plus définie à valeur dans S^1 et on doit se rendre compte intuitivement qu’il paraît difficile de ramener tous les points du cercle sur 1 le long du cercle sans le “déchirer”. C’est effectivement le cas. Pour le voir, on peut encore utiliser la proposition 1.1.7.

En effet, tout d’abord, on remarque que ces deux applications se factorise pour donner des applications $S^1 \rightarrow S^1$ continues (cf le lemme 2.3.3 si on a un doute), \tilde{f} devenant l’identité de S^1 et \tilde{g} l’application constante de S^1 sur 1. Comme $H_1(-) : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$ est un foncteur, $H_1(\text{id})$ est l’application identité de $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ dans lui-même. Donc est non nulle. En revanche \tilde{g} se factorise sous la forme $S^1 \rightarrow \{1\} \hookrightarrow S^1$ et par functorialité on a

un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_1(S^1) & \xrightarrow{H_1(\tilde{g})} & H_1(S^1) \\ & \searrow & \nearrow \\ & H_1(\{1\}) \cong 0 & \end{array}$$

d'où, sachant que $H_1(\{1\}) \cong H_1(\mathbb{R}^0) \cong 0$, on déduit que $H_1(\tilde{g}) = 0$. Ces deux applications ne sont donc pas homotopes puisque l'homologie est un invariant homotopique.

Définition 2.2.10. Un espace contractile est un espace homotope à un point.

Exemple 2.2.11. Un point est évidemment contractile. De même une boule D^n , \mathbb{R}^n ou tout convexe sont contractiles. En effet on a l'homotopie $H : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par $(x, t) \mapsto tx$ qui est une homotopie entre l'application constante 0 dans \mathbb{R}^n et l'identité.

En revanche l'espace (discret) $\{a, b\}$ constitué de deux points ou $GL_n(\mathbb{R})$ ne sont pas contractile d'après la proposition 2.2.7 puisqu'ils ont deux composantes connexes par arcs. De même \emptyset n'est pas contractile.

Un cercle n'est pas contractile puisque son $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ est différent de celui d'un point $\{*\} \cong \mathbb{R}^0$. Mais il est homotope à \mathbb{C}^* car en effet $\mathbb{C}^* = S^1 \times]0, +\infty[\simeq S^1$, cf exercice 2.2.27.

Remarque 2.2.12. La plupart des espaces topologiques que nous étudierons dans la suite auront comme propriété fondamentale qu'ils ont une base d'ouverts contractiles, c'est par exemple le cas des variétés. Du point de vue la théorie de l'homologie/homotopie que nous allons voir, en fait tout espace topologique est faiblement¹⁹ homotope à un tel espace.

Exemple 2.2.13. On a les équivalences d'homotopie suivantes, essentiellement obtenues en contractant des droites (ou via la décomposition polaire) $S^1 \simeq \mathbb{C}^*$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^n$, $GL_n(\mathbb{R}) \cong O_n(\mathbb{R})$

Il existe des versions *relatives* de la notion d'homotopie, c'est-à-dire des notions où on demande que l'homotopie préserve un certain sous-espace de l'ensemble de départ.

Définition 2.2.14. Soit X, Y deux espaces topologiques, $A \subseteq X$ un sous-espace, et $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ tels que $f_0|_A = f_1|_A$. On dit que f_0 est homotope à f_1 relativement à A s'il existe une application continue $F : X \times \underbrace{[0; 1]}_I \rightarrow Y$ telle que $F|_{X \times \{0\}} = f_0$, $F|_{X \times \{1\}} = f_1$, et

$$F|_A = f_0|_A = f_1|_A.$$

Les propriétés et notations précédentes s'étendent sans difficulté au cas relatif.

Notation 2.2.15. On notera \simeq_A la relation être homotope relativement à A .

Exemple 2.2.16 (Le groupe fondamental). Un exemple important d'invariant homotopique fort est donné par le groupe fondamental, dû, bien évidemment, à Poincaré²⁰.

Soit (X, x) un espace topologique pointé. On considère le quotient

$$\pi_1(X, x) := \{f : [0, 1] \xrightarrow{C^0} X, f(0) = f(1) = x\} / \simeq_{\{0,1\}}$$

des applications continues envoyant les extrémités de I sur le point base x (une telle application s'appelle un lacet basé en x et on conseille de faire des dessins comme la figure (3)), quotienté par la relation d'homotopie relative aux extrémités de I . On peut composer les lacets de la manière suivante : si f et g sont deux lacets basé en x , on peut

19. Un terme que nous ne définirons pas. Mais qui implique en particulier que l'homologie de tout espace est canoniquement isomorphe à celle d'un tel espace.

20. et crucial complément à l'homologie que nous verrons plus tard dans sa célèbre conjecture caractérisant les sphères en fonction de leurs invariants homologiques et de leur groupes fondamentaux donc

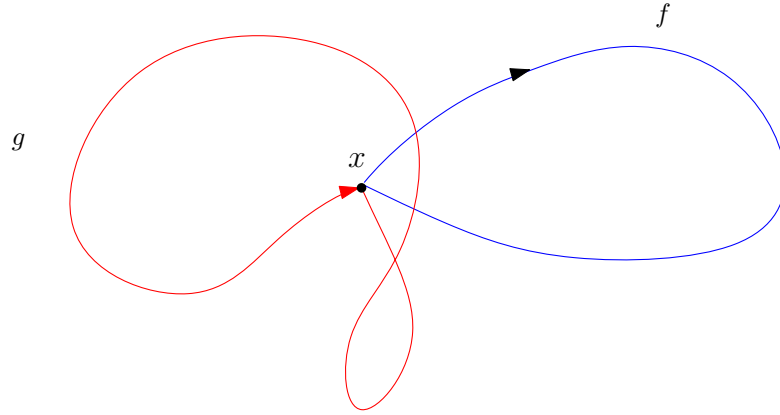


FIGURE 3. Deux lacets f et g basés au même point x .

parcourir²¹ le premier lacet deux fois plus vite puis le deuxième deux fois plus vite pour créer un nouveau lacet (puisque les lacets ont même origine et fin, à savoir x ; faire un dessin et consulter (3) !). Concrètement le lacet $f \star g$ est défini par la formule

$$f \star g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{pour } t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{pour } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

La continuité en $t = 1/2$ est précisément garantie par le fait que $f(1) = g(0)$.

Lemme 2.2.17. *Si $f \simeq f'$ et $g \simeq g'$ alors $f \star g \simeq f' \star g'$.*

Ce lemme montre que la composition des lacets passe à la relation d'homotopie relative aux extrémités et donc à $\pi_1(X, x)$. Cette composition n'est pas associative ou inversible au niveau des lacets mais le devient après passage à la relation d'homotopie.

Proposition 2.2.18. *La règle $X \mapsto (\pi_1(X, x), \star)$ est un invariant homotopique $\mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Gp}$ (c'est-à-dire un foncteur des espaces topologiques pointés dans les groupes).*

Ce foncteur est défini sur les applications pointées $\phi : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ par la composition : $[f] \mapsto [\phi \circ f]$. Que ce soit bien un foncteur suit essentiellement de la proposition 2.2.4.

Exemple 2.2.19. Un résultat important est que $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Pour des espaces généraux, le groupe fondamental peut être non-abélien. Par exemple, le groupe fondamental de ∞ , un bouquet de cercle (qu'on peut voir plongé dans \mathbb{R}^2 ou muni de la topologie quotient) est le groupe libre à 2 générateurs.

Démontrer que deux espaces sont homotopes est ardu de manière générale. On a cependant une notion pratique pour identifier qu'un sous-espace est homotope à son espace ambiant.

Rappelons qu'une rétraction de $A \subset X$ est une application continue $r : X \rightarrow A$ dont la restriction à A est l'identité : $\forall a \in A, r(a) = a$. Autrement dit, c'est une application qui scinde l'inclusion $A \hookrightarrow X$.

Définition 2.2.20. Un sous-espace $A \hookrightarrow X$ est un rétract par déformation (resp. déformation forte) s'il existe $p : X \rightarrow A$ telle que $p \circ i = id_A$ et $i \circ p \simeq id_X$ (resp. relativement à A).

On appellera évidemment une telle application p une rétraction par déformation (resp. forte).

²¹. Tout comme pour la transitivité de la relation d'homotopie, cela revient essentiellement à diviser l'intervalle en deux.

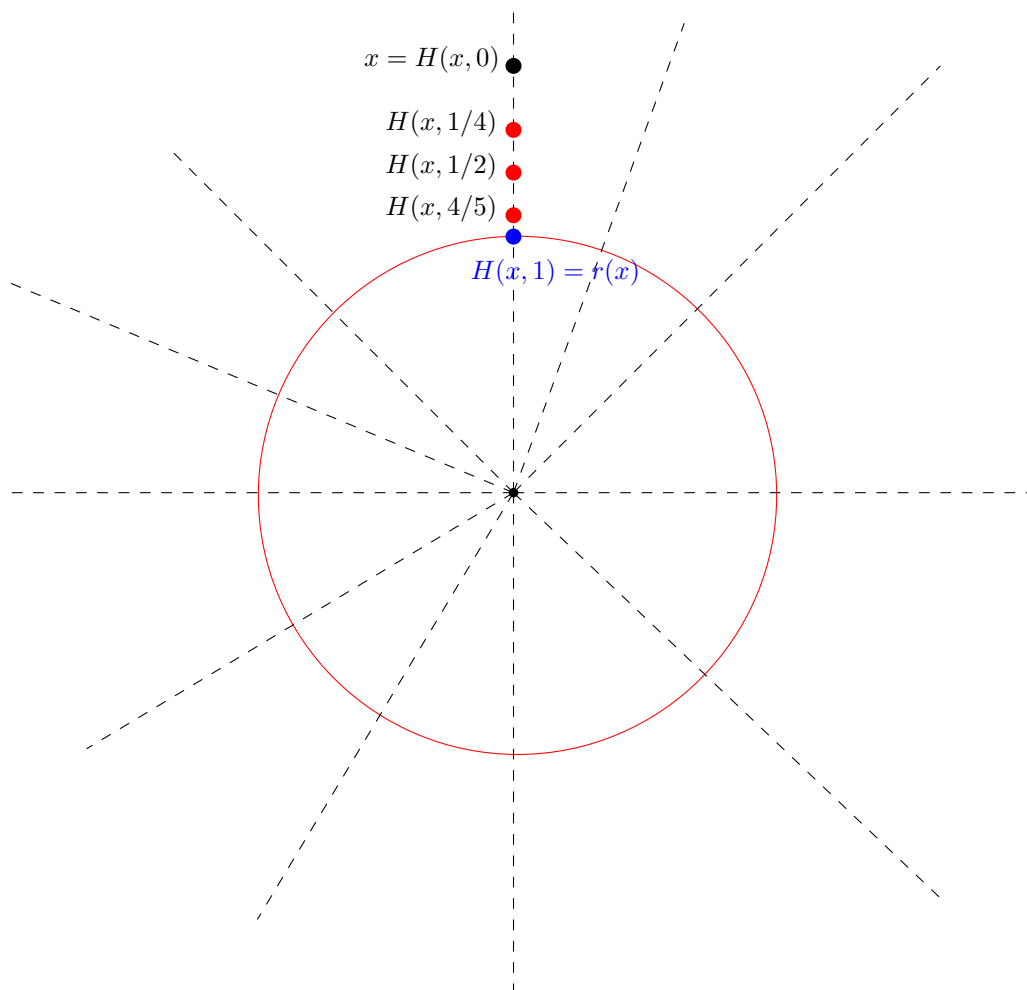


FIGURE 4. La rétraction par déformation standard de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sur le cercle. La rétraction est la projection radiale sur le cercle, c'est-à-dire le long des droites pointillées. En rouge on a décrit des étapes de l'homotopie ramenant le point x sur $r(x)$ (en bleu).

Proposition 2.2.21. *Si A est un rétract par déformation de X , alors A et X sont homotopes. Si de plus A est un rétract par déformation forte de X , alors A et X sont homotopes relativement à A .*

Exercice 2.2.22. Démontrer la proposition précédente.

Exemple 2.2.23. L'exemple standard est la sphère S^n qui est un rétract par déformation forte de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ (et de $D^{n+1} \setminus \{0\}$). En effet, soit r l'application $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$ définie par $x \mapsto x/\|x\|$, cf figure 4. Soit alors $H : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$ définie par $(x, t) \mapsto \frac{x}{t\|x\| + 1 - t}$. Cette application est bien définie et continue et par ailleurs $H(x, 0) = x$ et $H(x, 1) = r(x)$. Enfin, $H|_{S^n} = id_{S^n}$. Plutôt que de comprendre la formule, il vaut mieux comprendre le dessin donné par la figure (4).

Il suit que ces espaces sont homotopes entre eux.

Exemple 2.2.24. Un exemple de rétract par déformation non-forte est donné par le sous-espace P de \mathbb{R}^2 donné par la réunion des segments $[(0, 0), (1, 0)]$ avec les segments $[(0, 0), (1, \frac{1}{n})]$

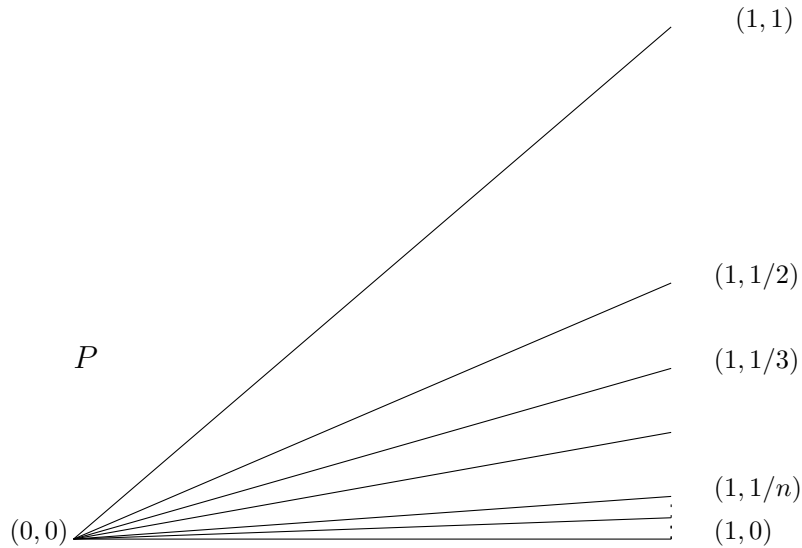


FIGURE 5. Un exemple de rétraction non-forte.

(où $n \in \mathbb{N}^*$), voire figure 5. Il est facile de voir que l'inclusion du point $(1, 0)$ est bien un rétract par déformation de P car on peut tout d'abord contracter P sur $(0, 0)$ en contractant chaque segment (et on voit de fait que $(0, 0)$ est un rétract par déformation forte de P), puis déplacer ce dernier point le long du segment horizontal. Cependant, il est facile de voir par des arguments de continuité que l'on ne peut pas trouver d'homotopie préservant le point $(1, 0)$ en tout temps. En effet, les points $(1, 1/n)$ ne peuvent être ramenés continuellement vers $(1, 0)$ qu'en passant par $(0, 0)$. Mais, par continuité, ceci force $(1, 0)$ à lui aussi devoir s'approcher de $(0, 0)$ à un moment donné !

Exercice 2.2.25. Démontrer soigneusement ce qui est affirmé dans l'exemple précédent.

Remarque 2.2.26. Nous conseillons plus que fortement au lecteur de faire des dessins et de se convaincre des différents exemples de rétractions par déformation donnés ici, que ce soit par des formules ou par des dessins pour s'habituer à cette notion et à celle d'homotopie en général.

Exercice 2.2.27. Soit X , Y et Y' deux espaces topologiques. Démontrer que si Y est homotope à Y' , alors $X \times Y$ est homotope à $X \times Y'$.

Exercice 2.2.28. Démontrer qu'un espace topologique X est contractile si et seulement s'il est non-vide et son application identité $id_X : X \rightarrow X$ est homotope à une application constante.

Exercice 2.2.29. Démontrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{x, y\}$ est homotope à un bouquet de deux cercles (un " ∞ "), cf le TD.

2.3. QUELQUES CONSTRUCTIONS ET EXEMPLES D'ESPACES TOPOLOGIQUES

De nombreux espaces topologiques intéressants (et important en théorie de l'homotopie) sont obtenus intrinséquement en recollant entre eux des espaces topologiques (plutôt que de les voir comme des sous-espaces d'autre chose). Commençons par préciser quelle topologie naturelle on peut mettre pour "recoller" des espaces topologiques.

On commence par la topologie quotient.

Définition 2.3.1. Soit X un espace topologique et \mathcal{R} une relation d'équivalence. On note $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient. On munit le quotient de la topologie, dite quotient,

dont les ouverts sont les $U \subset X/\mathcal{R}$ tel que $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X . Par définition, l'application π est continue et appelée projection canonique.

Exercice 2.3.2. Démontrer que X/\mathcal{R} est bien un espace topologique.

La topologie quotient a plusieurs propriétés importantes. La première est qu'elle est universelle au sens suivant.

Lemme 2.3.3 (Propriété universelle de la topologie quotient). *L'espace quotient X/\mathcal{R} vérifie que toute application continue $f : X \rightarrow Y$ qui est constante sur les classes d'équivalence de \mathcal{R} , se factorise de manière unique sous la forme*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \pi & \nearrow \tilde{f} \\ & X/\mathcal{R} & \end{array} .$$

Autrement dit, il existe une unique application continue $\tilde{f} : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$ qui relève f , c'est-à-dire telle que $f = \tilde{f} \circ \pi$.

Tout autre espace topologique \tilde{X} muni d'une application $p : X \rightarrow \tilde{X}$ vérifiant la même propriété de factorisation que la topologie quotient est canoniquement homéomorphe à X/\mathcal{R} .

Exercice 2.3.4. Démontrer cette propriété. On pourra consulter les feuilles de TDs pour plus de détails.

Ceci est une caractérisation de la topologie quotient par ce qu'on appelle une *propriété universelle*. C'est en fait une notion qui a du sens dans toute catégorie et que nous allons revoir souvent. L'unicité est une conséquence immédiate de l'unicité des factorisations (appliquée à $Y = \tilde{X}$). On peut noter que la caractérisation de la topologie quotient donnée par le lemme n'utilise que l'existence et l'unicité de morphismes rendant un certain diagramme commutatif²². Cette propriété a donc du sens dans toute catégorie (mais l'existence d'une solution n'est pas en revanche automatique). On pourra noter que la topologie quotient est la topologie la plus fine rendant la projection continue.

Un cas particulier qui revient souvent est lorsque la relation d'équivalence est induite par une structure de groupes. De manière générale, les groupes topologiques ont des propriétés assez remarquables. Rappelons qu'un groupe topologique est un groupe muni d'une structure d'espace topologique tel que la multiplication $G \times G \rightarrow G$ et l'inverse $G \rightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$ sont continues. Une action continue d'un groupe topologique sur un espace X est une application continue $G \times X \rightarrow X$ qui est une action de groupe sur les ensembles sous-jacent.

Définition 2.3.5. Soit X un espace topologique et G un groupe agissant continuellement sur X . On note X/G l'espace quotient associé à la relation d'équivalence donnée par $x \sim y$ s'il existe $g \in G$ tel que $x = g \cdot y$.

Notation 2.3.6. Si F est un sous-espace²³ de X , on notera X/F l'espace topologique quotient de X par la relation d'équivalence engendrée par $f \sim f'$ pour tout $f, f' \in F$.

²². Techniquement, pour écrire proprement ce diagramme ici, il convient de rajouter toutes les inclusions des classes et le fait qu'elle se factorise au travers d'un point

²³. dans le cas où F est aussi un groupe agissant sur G , on prendra garde de distinguer ce quotient et celui de la définition 2.3.5.

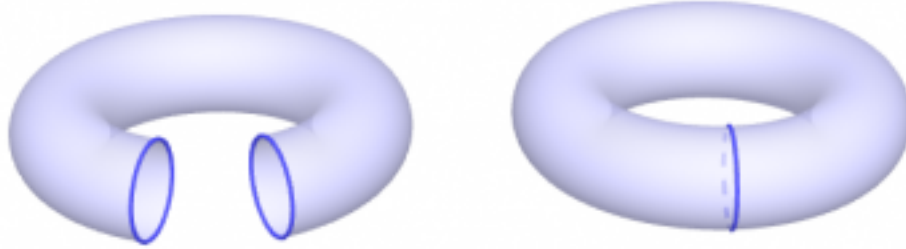


FIGURE 6. Le tore (à droite) obtenu en recollant un cylindre (à gauche).

Exemple 2.3.7. L'espace topologique S^1 est le quotient \mathbb{R}/\mathbb{Z} du groupe topologique $(\mathbb{R}, +)$ par son sous-groupe \mathbb{Z} . On peut remarquer que le lemme 2.3.3 implique que la factorisation $[0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ induit un homéomorphisme

$$[0, 1]/(0 \sim 1) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

après passage au quotient. L'isomorphisme topologique entre $[0, 1]/(0 \sim 1)$ et S^1 identifié aux nombres complexes de module 1 est induit par l'application $t \mapsto \exp(2i\pi t)$. En effet cette application est continue, surjective. Puisque $[0, 1]$ est compact et $\{0, 1\}$ fermé, il suffit de vérifier qu'elle est injective pour démontrer le résultat en vertu du corollaire 2.3.11. Cela dit, dans le cas présent, il est utile de construire l'application inverse et de se convaincre à la main que cette application est un isomorphisme. C'est un exercice *indispensable* pour tout lecteur.

De même le tore $T_2 = S^1 \times S^1$ (c'est-à-dire l'espace topologique ressemblant à un doughnut ou un anneau) est homéomorphe au quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Voir figure 6.

De manière générale, la topologie quotient est la topologie qui réalise l'idée intuitive de recollement de sous-espaces comme on peut s'en convaincre via les exemples précédents.

On prendra garde, cependant, qu'en général, un espace quotient n'a pas de raison d'être encore séparé... et donc pas compact non plus (au sens francophone du mot compacité, cf paragraphe 8.1).

Exercice 2.3.8. Montrer que le quotient \mathbb{R}/\mathbb{Q} est un espace topologique de cardinal non-dénombrable dont la topologie est la topologie grossière.

Voici maintenant quelques propriétés spécifiques à la topologie quotient

Proposition 2.3.9. Soit $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ la projection canonique sur un espace quotient.

- (1) Si X est connexe (resp. par arcs) alors X/\mathcal{R} est connexe (resp. par arcs).
- (2) Si G est un groupe, l'application quotient $p : X \rightarrow X/G$ est ouverte.
- (3) Si $H \subset G$ est un sous-groupe d'un groupe topologique G , alors G/H est séparé si et seulement si H est fermé.
- (4) Si X/\mathcal{R} est séparé, alors le graphe $\{(x, y), x \sim y\} \subset X \times X$ est fermé. Réciproquement, si ce graphe est fermé et que $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ est ouverte, alors X/\mathcal{R} est séparé.
- (5) Si X est compact, alors X/\mathcal{R} est séparé si et seulement si le graphe de \mathcal{R} est fermé dans $X \times X$.

Exercice 2.3.10. Démontrer cette proposition (ou consulter les feuilles de TDs).

On le voit, la propriété d'être séparé n'est pas complètement aisée à garantir dans un quotient. Il existe cependant une condition assez agréable pour garantir cela dans de nombreux exemples intéressants.

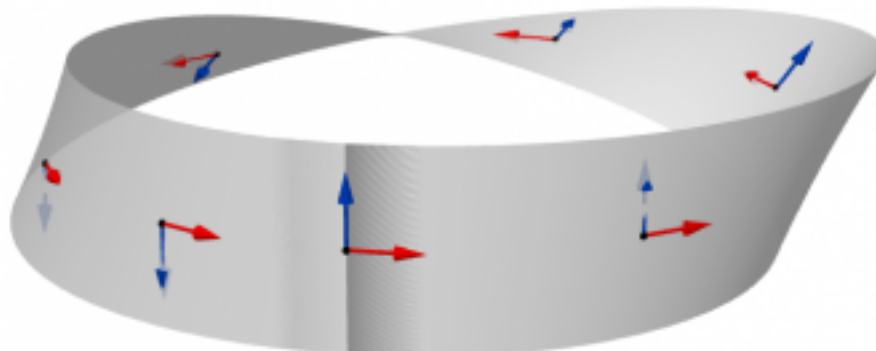


FIGURE 7. La bande de Mobius

Corollaire 2.3.11. *Si X est compact et F est un fermé alors l'espace quotient X/F est compact, en particulier séparé.*

Démonstration. Puisque X est compact, en vertu de la proposition 2.3.9, il suffit de vérifier que le graphe de la relation est fermé dans $X \times X$, puisque X/F sera alors l'image d'un compact dans un espace séparé. Or, en notant $p : F \rightarrow \{f\}$ l'unique application sur un point $f \in F$ quelconque, le graphe est la réunion de $\Delta := \{(x, x), x \in X\}$, $A = \{(x, p(x)), x \in F\}$, $B = \{(p(y), y), y \in F\}$, $\{(x, y) \in F \times F\}$. La diagonale est fermée car X est séparé. Les deux suivants sont l'image du compact F (c'est un fermé dans un compact) par des applications continues, donc sont compacts a fortiori fermés. Enfin $F \times F$ est fermé. \square

Exemple 2.3.12 (La bande de Mobius). La bande de Mobius (compacte) est l'espace topologique quotient $[-1, 1] \times [0, 1]/(x, 1) \sim (-x, 0)$. C'est le quotient d'un compact donc en vertu de la proposition 2.3.9, il suffit de montrer que le graphe de la relation est fermé pour montrer que la bande de Mobius est compacte. Ceci est vrai car si on prend une suite $((x_n, 1), (-x_n, 0)) \in ([-1, 1] \times [0, 1])^2$ convergente, alors la limite est de la forme $((y, 1), (-y, 0))$.

Il convient de vérifier que la bande de Mobius est une bande de papier que l'on a recollé sur elle-même tout en échangeant la face intérieure et extérieure, cf figure 7.

Exercice 2.3.13. Démontrer que la bande de Mobius est homotope à un cercle.

Exemple 2.3.14 (Bouteille de Klein). La bouteille de Klein est l'espace quotient K de \mathbb{R}^2 par la relation d'équivalence engendrée par $(x, y) \sim (x + 1, y)$ et $(x, y) \sim (-x, y + 1)$. Elle ne se plonge pas dans \mathbb{R}^3 (voir figure (8)) au contraire de son proche voisin le tore T^2 qui s'identifie avec le quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Les deux sont des espaces topologiques compacts comme on peut le voir car ils sont homéomorphes à des quotients de $[0, 1]^2$ par des relations fermées.

Les exemples précédents se représentent très bien comme des surfaces où on a identifié certains bords opposés, en les recollant (par la topologie quotient) en suivant le sens des flèches. Ceci se représente de la manière indiquée dans la figure (9).

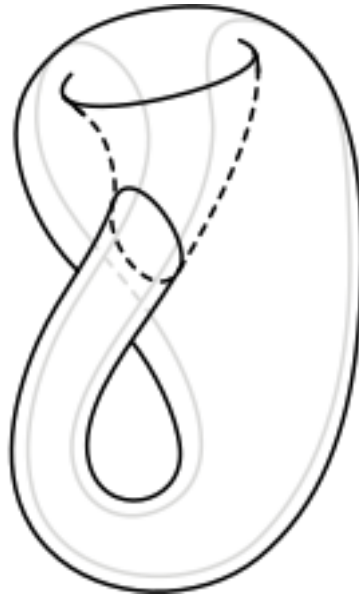


FIGURE 8. Une représentation standard de la bouteille de Klein dans \mathbb{R}^3 . On remarquera que ceci n'est pas un *plongement* : il y a des auto-intersections

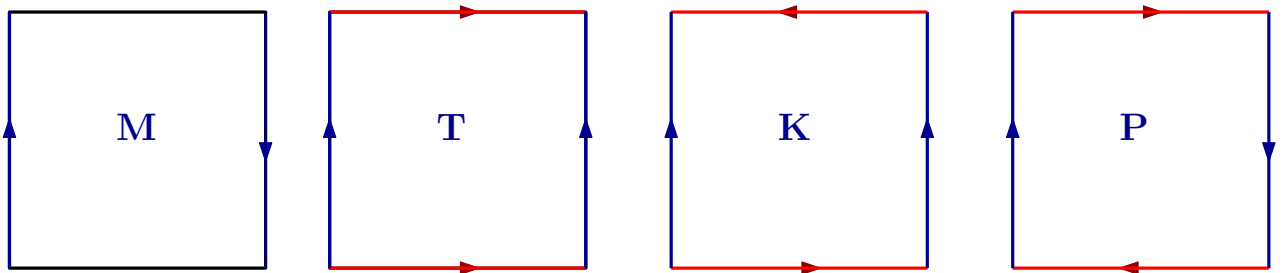


FIGURE 9. La représentation comme quotient du carré de la bande de Mobius à gauche, du Tore en deuxième position, de la bouteille de Klein en troisième position et enfin du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ complètement à droite.

Exemple 2.3.15. L'espace projectif réel de dimension n est l'espace topologique des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} qui est, *par définition*, l'espace topologique quotient

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{R}^*$$

où le groupe (topologique) multiplicatif \mathbb{R}^* agit par multiplication scalaire. On définit de même l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$. On note en général $[x_1 : \dots : x_{n+1}]$ la classe d'équivalence dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ du point $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ (et de même dans \mathbb{C}).

On peut vérifier que les espaces projectifs sont homéomorphes respectivement à $S^n/\{\pm 1\}$ et S^{2n+1}/S^1 . Ce sont des espaces topologiques compact et on a que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S^2$ (que l'on peut voir comme le plan complexe auquel on a rajouté un point "à l'infini") et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$.

De manière générale, on peut vérifier que $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est l'espace \mathbb{K}^n auquel on a rajouté un hyperplan à l'infini. On réfère aux exercices de Tds pour plus de détails.

Une construction importante pour nous sera celle de recollement. On va le définir en insistant sur la propriété universelle qui encode l'idée intuitive que l'on doit en avoir.

Définition 2.3.16 (Recollements). Soit X, Y deux espaces topologiques, A une partie non-vidée de X et $f : A \rightarrow Y$, une application continue. On munit $X \amalg Y$ de la topologie coproduit. Le *recollement de X sur Y par f* est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y := (X \amalg Y) / (x \sim f(x), x \in A).$$

Plus généralement, si $A \xrightarrow{f} X$ et $A \xrightarrow{g} Y$ sont deux applications continues, on appelle encore *recollement de X et Y le long de f, g* (ou par abus de terminologie le long de A) l'espace quotient

$$X \cup_A Y := (X \amalg Y) / (g(x) \sim f(x), x \in A).$$

Cet espace topologique est aussi appelé **coproduit cofibré** de X, Y par f, g ou encore **poussé-en-avant**²⁴ de X et Y par A ou parfois *somme amalgamée*.

Remarque 2.3.17. On prendra garde que le recollement $X \cup_A Y$ dépend de f , et g et pas seulement de A ! On fait donc un abus de notation.

Par construction, les inclusions canoniques de X, Y dans le coproduit suivi par l'application quotient donne des applications canoniques $j_X : X \rightarrow X \cup_A Y$, $j_Y : Y \rightarrow X \cup_A Y$ qui vérifient par définition de la relation d'équivalence sur le quotient que $j_X \circ f = j_Y \circ g$. Par composition, si $h : X \cup_A Y \rightarrow W$ est une application continue, on obtient alors deux applications $h \circ j_X : X \rightarrow W$ et $h \circ j_Y : Y \rightarrow W$. Nous énonçons maintenant la propriété fondamentale du recollement/coproduit fibré, tout d'abord par une phrase simple puis diagrammatiquement.

Lemme 2.3.18 (Propriété universelle du recollement). *L'ensemble des applications continues de $X \cup_A Y \rightarrow W$ est en bijection avec l'ensemble des couples $(X \xrightarrow{\phi} W, Y \xrightarrow{\psi} W)$ d'applications continues vérifiant $\phi \circ f = \psi \circ g$. La bijection est précisément donnée par $h \mapsto (h \circ j_X, h \circ j_Y)$.*

On va maintenant expliquer en quoi le lemme précédent dit que le recollement est solution d'un problème qui a du sens dans toute catégorie, et qui justifiera le terme de coproduit cofibré que nous avons utilisé.

Définition 2.3.19. Soit \mathbf{C} une catégorie et $A \xrightarrow{f} X$, $A \xrightarrow{g} Y$ deux morphismes. On appelle coproduit fibré²⁵ de f et g , un objet W , muni de morphismes $X \xrightarrow{j_X} W$, $Y \xrightarrow{j_Y} W$ vérifiant $j_X \circ f = j_Y \circ g$, tel que pour tout couple de morphismes $\phi_X : X \rightarrow Z$, $\phi_Y : Y \rightarrow Z$ rendant commutatif le diagramme (sans la flèche en pointillée) suivant

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow j_Y \\ X & \xrightarrow{j_X} & W \\ & \searrow & \downarrow \phi_Y \\ & & Z \end{array} \quad \begin{array}{l} \phi_X \\ \exists! h \end{array}$$

il existe *un unique* morphisme $h : W \rightarrow Z$ rendant le diagramme complet commutatif²⁶.

Un coproduit cofibré n'existe pas forcément pour des morphismes quelconques dans une catégorie quelconque. En revanche, s'il existe, il est unique à isomorphisme près :

24. traduction littérale du terme **pushforward** en anglais.

25. ou coproduit cofibré ou poussé-en-avant ou pushforward en anglais...

26. c'est-à-dire rendant les deux triangles, ainsi créés par la flèche pointillée, commutatifs

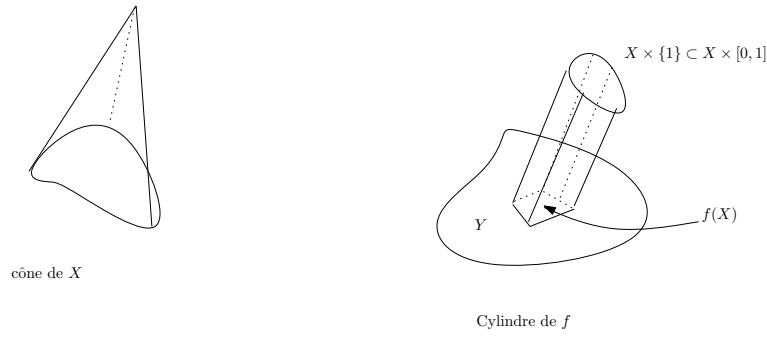


FIGURE 10. Le cône de X et le cylindre de $f : Y \rightarrow X$

Lemme 2.3.20. *Si W et W' sont deux objets qui sont des coproduits fibrés (en particulier on peut donc les munir respectivement des morphismes j_X, j_Y, j'_X, j'_Y) alors W et W' sont isomorphes. Il existe par ailleurs un unique tel isomorphisme compatible avec les choix des j_X, j_Y, j'_X, j'_Y .*

Exercice 2.3.21. Démontrer le lemme 2.3.20.

On peut maintenant réinterpréter le lemme 2.3.18 :

Lemme 2.3.22. *Le recollement $X \cup_A Y$ est un coproduit cofibré dans la catégorie **Top** des espaces topologiques.*

Exercice 2.3.23. Démontrer le lemme 2.3.18.

Ce lemme garantit donc que le recollement est l'unique (à homéomorphisme près) espace topologique vérifiant la propriété de factorisation donnée par le diagramme (1) ou, de manière équivalente, le lemme 2.3.18.

Remarque 2.3.24. Par analogie avec le cas topologique, on utilisera la notation $X \cup_A Y$ pour écrire le coproduit cofibré (lorsqu'il existe) dans une catégorie **C**.

Baucoup de constructions en topologie algébrique sont des recollements.

Exemple 2.3.25 (Bouquets de sphères). Soit I un ensemble. On se donne un point base $x_i \in S^n$ dans la sphère de dimension n pour tout $i \in I$. On appelle *bouquet de sphères* (indiqué par l'ensemble I), noté $\bigvee_I S^n$, le recollement $X = \coprod_I S^n \cup_{\coprod_I \{x_i\}} \{pt\}$ donné par l'unique application $f : \coprod_I \{x_i\} \rightarrow \{pt\}$. Un dessin doit convaincre que cet espace ressemble effectivement à un bouquet. Cela dit si I est infini, la topologie de cet espace n'est plus métrisable. Voir les feuilles de TD. On peut bien entendu plus généralement prendre des bouquets d'une famille quelconque d'espaces pointés.

Exemple 2.3.26 (Cônes et Cylindres d'une application). On pourra consulter la figure (10) pour visualiser les deux constructions suivantes.

Soit X un espace topologique. Le **cône sur X** est l'espace topologique quotient $C(X) := (X \times [0, 1]) / ((x, 1) \sim (y, 1))$. On a que X est naturellement homéomorphe à un sous-espace fermé de $C(X)$ (en prenant par exemple $X \times \{0\}$). En contractant X le long de $[0, 1]$ vers la classe de $[(x, 1)]$, on obtient que $C(X)$ est contractile. On vérifie facilement que $X \mapsto C(X)$ s'étend en un foncteur de **Top** dans lui-même.

Soit maintenant $f : X \rightarrow Y$ une application continue, on définit le **cône de f** comme le recollement $C(f) := C(X) \cup_{f \times \{0\}} Y$. Le **cylindre de f** est le recollement

$$Cyl(f) := X \times [0, 1] \cup_{f \times \{0\}} Y$$

où $f \times \{0\}$ est donné par $f \times \{0\} : X \times \{0\} \cong X \xrightarrow{f} Y$.

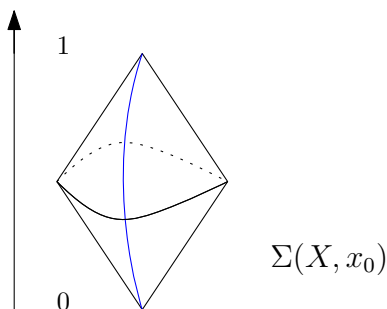


FIGURE 11. La suspension réduite, la classe du point base étant représentée en bleu.

On notera que $f \mapsto Cyl(f)$ et $f \mapsto C(f)$ sont des foncteurs de la catégorie $\mathbf{Arr}_{\mathbf{Top}}$ des flèches²⁷ de \mathbf{Top} dans \mathbf{Top} . On a une factorisation naturelle de f sous la forme

$$f : X \hookrightarrow Cyl(f) \xrightarrow{\cong} Y$$

d'une inclusion de X comme sous-espace fermé et d'une équivalence d'homotopie $Cyl(f) \rightarrow Y$ induite par l'unique application qui est l'identité sur Y et envoyant (x, t) sur $f(x)$.

À homotopie près, toute application continue est donc une inclusion.

Exercice 2.3.27. Démontrer les affirmations de l'exemple précédent.

Exemple 2.3.28 (Suspension, cf figure (11)). La suspension d'un espace topologique X est l'espace topologique quotient :

$$SX := X \times I /_{(x,0) \sim (x',0), (x,1) \sim (x',1)}$$

On peut donc aussi la voir comme le recollement de deux cônes.

De même, la suspension réduite d'un espace pointé (X, x_0) est l'espace topologique pointé :

$$\Sigma(X, x_0) := (X \times I /_{(x,0) \sim (x',0), (x,1) \sim (x',1), (x_0,t) \sim (x_0,t')}, (x_0, I))$$

La suspension et la suspension réduite définissent des endofoncteurs de \mathbf{Top} et \mathbf{Top}_* .

Lemme 2.3.29. Les sphères sont des suspensions réduites :

$$\Sigma(\mathbb{S}^n, *) \cong (\mathbb{S}^{n+1}, *)$$

Exercice 2.3.30. Démontrer le lemme précédent.

Lorsque X est pointé par un point x_0 , on a une application quotient canonique $SX \rightarrow \Sigma(X, x_0)$. Cette application n'est pas toujours une équivalence d'homotopie. Elle l'est cependant dès que (X, x_0) est un CW-complexe (Définition 2.4.2) ou une variété topologique quelconque.

Remarque 2.3.31 (Carré cocartésien). De manière générale dans une catégorie \mathbf{C} , on appelle carré cocartésien un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow j_Y \\ X & \xrightarrow{j_X} & W \end{array}$$

27. cette catégorie a pour objet les morphismes $f : X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques et comme morphismes entre f, g les diagrammes commutatifs de la forme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X' & \xrightarrow{g} & Y' \end{array}$$

par des couples de morphismes (ϕ, ψ) rendant le diagramme commutatif.

cofibré (au sens de la définition 2.3.19) de f, g . On note un tel carré sous la forme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X & \longrightarrow & W \end{array}$$

Dans les espaces topologiques, un tel carré signifie donc que W est homéomorphe au recollement $X \cup_A Y$.

Une notion “duale” ou plutôt en langage catégorique la co-notion associée à celle de coproduit cofibré est celle de produit fibré.

Définition 2.3.32. Soit $X \xrightarrow{f} Z, Y \xrightarrow{g} Z$ deux applications continues. Le *produit fibré* de X et Y au dessus de Z , appelé aussi tiré-en-arrière de Y par f (ou pullback en anglais) est l'espace topologique

$$X \times_Z Y := \{(x, y) \in X \times Y, f(x) = g(y)\}$$

vu comme un sous-espace du produit $X \times Y$.

Le produit fibré vérifie également une propriété universelle.

Définition 2.3.33. Soit \mathbf{C} une catégorie et $X \xrightarrow{f} Z, Y \xrightarrow{g} Z$ deux morphismes. On appelle produit fibré²⁸ de f et g , un objet P , muni de morphismes $P \xrightarrow{p_X} X, P \xrightarrow{p_Y} Y$ vérifiant $f \circ p_X = g \circ p_Y$, tel que pour tout couple de morphismes $\phi_X : Z \rightarrow X, \phi_Y : Z \rightarrow Y$ rendant commutatif le diagramme (sans la flèche en pointillée) suivant

(2)

$$\begin{array}{ccccc} T & & \xrightarrow{\phi_X} & & X \\ & \searrow \exists! h & & \searrow p_X & \downarrow f \\ & & P & \xrightarrow{p_X} & X \\ & \searrow \phi_Y & \downarrow p_Y & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

il existe *un unique* morphisme $h : T \rightarrow P$ rendant le diagramme complet commutatif²⁹. On appellera p_X, p_Y les morphismes *structuraux* (ou plus parfois canoniques).

Là encore le produit fibré n'existe pas forcément pour des morphismes quelconques dans une catégorie quelconque. En revanche, s'il existe, il est unique à isomorphisme près :

Lemme 2.3.34. Si P et P' sont deux objets qui sont des produits fibrés, alors P et P' sont isomorphes. Il existe par ailleurs un unique tel isomorphisme compatible avec les choix de morphismes structuraux reliant P, P' à X, Y .

Exercice 2.3.35. Démontrer le lemme 2.3.34.

Lemme 2.3.36. L'espace topologique $X \times_Z Y$ de la définition 2.3.32, muni des deux applications $p_x : (x, y) \mapsto x, p_y : (x, y) \mapsto y$, est un produit fibré dans la catégorie **Top** des espaces topologiques.

En particulier, l'ensemble des applications continues d'un espace topologique T dans $X \times_Z Y$ est en bijection avec les couples $(T \xrightarrow{\phi_X} X, T \xrightarrow{\phi_Y} Y)$ d'applications continues vérifiant $f \circ \phi_X = g \circ \phi_Y$; la bijection étant explicitement donnée par $h \mapsto (p_X \circ h, p_Y \circ h)$.

Exercice 2.3.37. Démontrer le lemme 2.3.36.

28. ou tiré-en-arrière ou pullback en anglais...

29. c'est-à-dire rendant les deux triangles, ainsi créés par la flèche pointillée, commutatifs

Ce lemme garantit donc que le tiré-en-arrière est l'unique (à homéomorphisme près) espace topologique vérifiant la propriété de factorisation donnée par le diagramme (2).

Remarque 2.3.38. Par analogie avec le cas topologique, on utilisera la notation $X \times_Z Y$ pour écrire le produit fibré (lorsqu'il existe) dans une catégorie \mathbf{C} . Encore une fois on notera l'abus de notation car évidemment cette construction dépend des morphismes f, g .

Les constructions de tiré-en-arrière sont très importantes en géométrie (quelle soit différentielle ou algébrique).

Nous allons nous intéresser à un exemple dual de 2.3.26.

Exemple 2.3.39. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. On note $Y^{[0,1]}$ l'espace des applications continues $[0, 1] \rightarrow Y$ muni de la topologie compacte-ouverte³⁰ et on note $e_i : Y^{[0,1]} \rightarrow Y$ les applications $\gamma \mapsto \gamma(i)$ d'évaluation aux extrémités.

On appelle *espace des chemins de f* , le produit fibré

$$P(f) := X \times_Y Y^{[0,1]}$$

associé à $f : X \rightarrow Y$ et $e_0 : Y^{[0,1]} \rightarrow Y$.

Concrètement cet espace est la donnée d'un chemin dans Y partant d'un point de l'image $f(X)$ et d'un antécédent dans X de ce point.

Notons que les applications identité $id : X \rightarrow X$ et $c_f : X \rightarrow Y^{[0,1]}$, $x \mapsto 1_{f(x)}$ (où on note 1_y le lacet constant $t \mapsto y$) définissent donc une application continue $X \rightarrow P(f)$ (en vertu du lemme 2.3.36). Par ailleurs nous avons l'application $e_1 : (x, \gamma) \mapsto \gamma(1)$ qui donne une factorisation

$$X \xrightarrow{\cong} X \times_Y Y^{[0,1]} \xrightarrow{e_1} Y$$

de f au travers d'une équivalence d'homotopie et d'une projection.

Exercice 2.3.40. Démontrer que l'application canonique $X \rightarrow X \times_Y Y^{[0,1]}$ est une équivalence d'homotopie (et même un rétract par déformation).

Remarque 2.3.41 (Carré cartésien). De manière générale dans une catégorie \mathbf{C} , on appelle carré cartésien un diagramme commutatif $W \longrightarrow Y$ tel que W est le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow g \\ W & \longrightarrow & Z \\ & \downarrow f & \\ & & X \end{array}$$

(au sens de la définition 2.3.33) de f, g . On note un tel carré sous la forme

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Dans les espaces topologiques, un tel carré signifie donc que W est homéomorphe au tiré en arrière $X \times_Z Y$.

Remarque 2.3.42. Puisque les (co)produits (co)fibrés vérifient les propriétés universelles des lemmes 2.3.36, 2.3.22, ils sont donc donnés précisément respectivement par la colimite du diagramme $X \leftarrow A \rightarrow Y$ et la limite du diagramme $X \rightarrow Z \leftarrow Y$ dans la catégorie \mathbf{Top} . Par limite et colimite on fait bisn sûr références aux constructions de la partie 8.2.1.

30. c'est-à-dire l'espace des chemins continus dans Y

2.4. COMPLEXES CELLULAIRES

Les complexes cellulaires, aussi appelés CW-complexes, sont une bonne (et large) sous-catégorie des espaces topologiques, obtenus à partir de recollements (définition 2.3.16) de boules de dimension n . Précisons cette idée.

Définition 2.4.1. On appelle i -cellule (ou cellule de dimension $i > 0$) fermée un espace homéomorphe à D^i la boule unité compacte de dimension i , alors qu'un espace homéomorphe à $D^i \setminus S^{i-1}$ sera appelé i -cellule ouverte.

Une 0-cellule est juste un espace homéomorphe à un point.

Si e est une n -cellule fermée, on note ∂e son bord (qui est homéomorphe à S^{n-1}) et $\overset{\circ}{e} = e \setminus \partial e$ est une cellule ouverte.

Soit maintenant $f : \partial e \rightarrow X$ une application continue définie sur le bord d'une cellule. On dispose du recollement de e sur X suivant f , c'est-à-dire l'espace topologique quotient

$$X \cup_f e := (X \amalg e) / (f(x) \sim x \text{ pour } x \in \partial e).$$

On dispose en particulier de l'application évidente (dîte caractéristique) $e \rightarrow X \cup_f e$ dont la restriction à $\overset{\circ}{e}$ est un homéomorphisme sur son image.

Définition 2.4.2 (CW-complexe). Un espace topologique X est appelé un CW-complexe s'il existe une suite $(X^{(n)})_{n \geq 0}$ telle que

- (1) $X^{(0)}$ est une réunion disjointe de 0-cellules (c'est-à-dire un espace discret);
- (2) $X^{(n)}$ est obtenu à partir de $X^{(n-1)}$ à partir de recollement de cellules de dimension n sur $X^{(n-1)}$;
- (3) $X = \bigcup_{n \geq 0} X^{(n)}$ est muni de la topologie de la réunion³¹, c'est-à-dire que la topologie de X est déterminée par celle des $X^{(n)}$ de la manière suivante : $F \subset X$ est fermé si et seulement si $F \cap X^{(n)}$ est fermé pour tout n .

Un CW-complexe est fini s'il est obtenu à partir d'un nombre fini³² de cellules.

On appelle $X^{(n)}$ le n -squelette de X . On appelle une suite $X^{(n)}$ vérifiant les propriétés ci-dessus une *décomposition cellulaire* de X .

La *dimension* d'un CW-complexe est le maximum (dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) des dimensions des cellules ouvertes de X .

On notera qu'un CW-complexe X admet (sauf pour ceux de dimension 0) une infinité de décompositions cellulaires.

Soit Y un sous-espace d'un complexe cellulaire $X = \bigcup X^{(n)}$. On dit que Y est un sous-complexe cellulaire de X si, la suite $(Y^{(n)} := Y \cap X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une décomposition cellulaire de Y (en particulier Y est donc un CW-complexe). Autrement dit un sous complexe cellulaire de X est un espace qui est la réunion d'un certain nombre de cellules de X .

Exemples 2.4.3. • Un complexe simplicial, cf 3.1.4 plus loin, K a une structure naturelle de CW-complexe donné par sa filtration $K^{(i)}$ par les i -simplexes. La principale différence entre les complexes simpliciaux et les CW complexes tient au fait que les applications de recollement d'un complexe simplicial sont en fait des injections cellulaires.

- Les graphes sont exactement les CW-complexes de dimension 1.
- La sphère S^n a une décomposition cellulaire donnée par une unique cellule de dimension 0 et une cellule de dimension n . On peut aussi l'obtenir en recollant deux disques sur S^{n-1} (en ayant au préalable construit S^{n-1} de manière cellulaire). En particulier n'importe quel équateur d'une sphère S^n est un sous CW-complexe.

31. c'est-à-dire la colimite dans **Top** du diagramme $X^{(0)} \rightarrow X^{(1)} \rightarrow \dots$

32. on peut vérifier que si une décomposition cellulaire de X est finie, alors toute décomposition de X va être finie par compacité des boules

- L'espace projectif 2.3.15 $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont des complexes cellulaires de dimension respective n et $2n$. Les $\mathbb{P}^{i \leq n}(\mathbb{R})$ sont des sous CW-complexes de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
- Le tore, $\mathbb{R}P^2$, la bande de Mobius ou la bouteille de Klein et de nombreux complexes simpliciaux ont des décompositions cellulaires avec moins de cellules que de simplexes à l'instar de la sphère.

Par construction, $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$ est une réunion disjointe de n -cellules ouvertes (en tant qu'espace topologique). On notera aussi que X est la réunion $X = \bigcup_{n \geq 0} (X^{(n)} \setminus X^{(n-1)})$ disjointe de ses cellules ouvertes (attention, la topologie n'est cependant pas celle de la réunion disjointe). Par ailleurs, les images (par les applications caractéristiques) des cellules fermées sont fermées dans X (cette propriété n'est en général pas vraie pour les cellules ouvertes).

D'autres propriétés topologiques utiles sont résumées dans la Proposition suivante :

Proposition 2.4.4. *Soit X un CW-complexe et $X = \bigcup X^{(n)}$ une décomposition cellulaire.*

- X est séparé et tout point de X admet une base de voisinages contractibles.
- X est paracompact (définition 8.1.13).
- Pour tout n , $X^{(n)}$ est fermé dans X .
- Si K est un sous-ensemble compact de X , alors il rencontre un nombre fini de cellules ouvertes de X . En particulier X est compact si et seulement s'il est fini.
- Pour tout n , le quotient $X^{(n)}/X^{(n-1)}$ est homéomorphe à un bouquet $\bigvee_{\alpha \in I_{X^{(n)}}} S^n$ de sphères (cf exemple 2.3.25) (où $I_{X^{(n)}}$ est l'ensemble des cellules de dimension n de la décomposition cellulaire de X).
- Si Y est un sous complexe fermé de X , alors Y est un rétract par déformation d'un voisinage ouvert de X .

Pour définir des catégories de CW-complexes, il nous reste à définir les morphismes.

Définition 2.4.5 (Morphismes cellulaires). Soient $X = \bigcup X^{(n)}$, et $Y = \bigcup Y^{(n)}$ deux décompositions cellulaires de CW-complexes. Une application continue $f : X \rightarrow Y$ est dite cellulaire si, pour tout n , $f(X^{(n)}) \subset Y^{(n)}$.

En particulier, l'inclusion d'un sous-complexe est cellulaire.

A partir de ce point on peut considérer une catégorie dont les objets sont les décompositions cellulaires et les morphismes, les applications cellulaires, ou bien une catégorie dont les objets sont les CW-complexes et les morphismes sont toutes les applications continues.

Remarque 2.4.6. Un des grands intérêts de la définition d'un CW-complexe et que l'on peut construire facilement des applications continues issues d'un CW-complexe : en effet, par définition de la topologie de la réunion, on peut les construire inductivement, sur chaque $X^{(n)}$ et pour les construire sur $X^{(n)}$ en les connaissant sur $X^{(n-1)}$ il suffit de donner des applications définies sur les n -cellules qui coïncident sur leur bord à celle sur $X^{(n-1)}$.

III. CONSTRUCTION D'UNE THÉORIE HOMOLOGIQUE

Depuis Euler on sait que des arguments de connexité (par exemple ceux naïfs que l'on a vu dans l'exemple 1.0.3) bien employés permettent de distinguer de nombreux espaces topologiques. Prolongeant ces idées dans le cadre de la géométrie (différentielle) Riemann et Betti définissent l'*ordre de connexion* d'une variété compacte connexe V comme le nombre maximal de sous-variétés compactes connexes de codimension 1 deux à deux disjointes dont la réunion ne disconnecte pas V . Dans le cas des surfaces orientables connexes on retrouve ainsi la notion de genre (topologique) que nous verrons plus loin. Cette idée sera reprise et exploitée par Poincaré en utilisant des découpages de variétés en variétés à coins, mais cette idée se montre relativement peu manipulable et source de difficulté. Dans ses premiers compléments à l'*Analysis Situs*, il change de point de vue pour se ramener à celui des objets simpliciaux que nous allons voir, point de vue à la fois plus simple, à définir et manipuler, et plus général que celui des variétés (différentiables).

L'idée naïve déjà évoquée et de comprendre ces variétés déconnectantes comme des "trous" de dimension supérieure, c'est-à-dire (quitte à les subdiviser...) comme des bords de disque de dimension n troués, ou dit autrement comme des sphères de dimension n qu'on ne peut pas "remplir" dans l'espace sous-jacent que l'on regarde. Pour cela on va regarder dans un premier temps des espaces topologiques pour lequel il est facile de donner du sens à cette intuition, des espaces "triangulés" avant, dans les chapitres suivants, de généraliser cette construction à tout espace topologique. Nous allons associer aux espaces des complexes de chaînes (voir 5.2) dont les groupes d'homologie en degré i encoderont en un sens la notion de "trous" de dimension i .

3.1. COMPLEXES SIMPLICIAUX ET POLYÈDRES

Commençons par donner une catégorie d'espace topologiques construits simplement et pour lesquels les notions de disques et de trou seront simples à comprendre.

Définition 3.1.1 (Simplexes). Un *simplexe* σ de dimension r dans un espace euclidien \mathbb{R}^n , pour un certain $n \geq r$, est l'enveloppe convexe de $r + 1$ points indépendants³³ s_0, \dots, s_r . Les s_i sont appelés *sommets* de σ . Les *faces* de σ sont les simplexes de dimension $r - 1$ dont les sommets sont des sommets de σ . Une *orientation* de σ est le choix d'un ordre sur ses sommets modulo les permutations paires³⁴.

Notation 3.1.2. On notera $\langle s_0, \dots, s_r \rangle$ le r -simplexe dont les sommets sont précisément s_0, \dots, s_r .

Exemple 3.1.3 (simplexe standard). Le simplexe standard de dimension n est le simplexe de \mathbb{R}^{n+1} défini comme l'enveloppe convexe de la base canonique, c'est-à-dire

$$\{(x_0, \dots, x_n), \forall i, x_i \geq 0 \text{ et } x_0 + \dots + x_n = 1\}.$$

Définition 3.1.4 (Complexe simplicial). Un *complexe simplicial* dans un espace euclidien \mathbb{R}^n est un ensemble K de simplexes dans \mathbb{R}^n tel que :

- (1) si $\sigma \in K$ alors toute face de σ appartient également à K ;
- (2) si $\sigma, \tau \in K$ et $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ alors $\sigma \cap \tau$ est le simplexe dont tous les sommets sont des sommets communs à σ et τ ;

33. C'est-à-dire que les vecteurs $v_1 = s_1 - s_0, \dots, v_r = s_r - s_0$ sont linéairement indépendants.

34. On peut vérifier que cette notion est équivalente au choix d'une orientation de l'espace affine engendré par les s_i ou encore de manière équivalente à une orientation de l'espace vectoriel engendré par $v_1 = s_1 - s_0, \dots, v_r = s_r - s_0$.

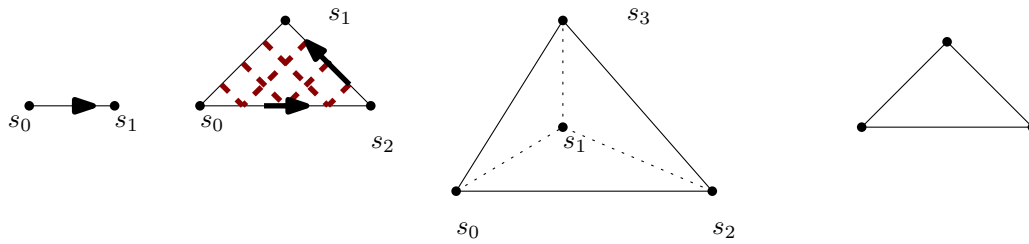


FIGURE 12. Des simplexes de dimension 1, 2 et 3 à gauche. On notera que, bien que n'étant pas hachuré, le tétraèdre est *plein*. À droite, on a le complexe simplicial donné par le bord $\partial\Delta^2$ du triangle (on a hachuré l'intérieur du premier triangle pour rendre visible la différence). Les flèches indiquent l'orientation des arêtes choisie de sorte que $s_i < s_{i+1}$.

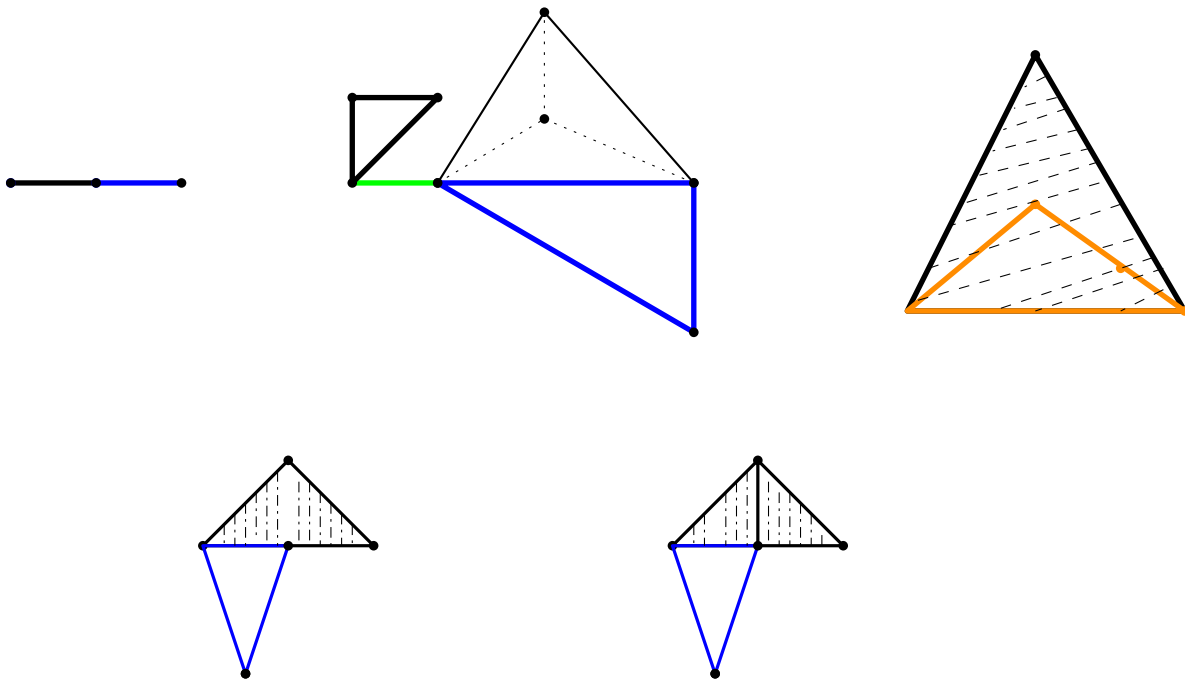


FIGURE 13. En haut : deux complexes simpliciaux à gauche et une réunion de simplexes qui n'est pas un complexe simplicial à droite. En dessous : une réunion de simplexes qui n'est pas simpliciale à gauche et à droite, un complexe simplicial dont la réalisation géométrique est la même que la réunion des simplexes de gauche.

- (3) si $x \in \sigma \in K$, il existe un voisinage U de x dans \mathbb{R}^n tel que U ne rencontre qu'un nombre fini de simplexes de K .

On appellera sous-complexe simplicial de K un sous-ensemble de K qui est un complexe simplicial.

La dernière condition est une condition de finitude locale ; dans la plupart des exemples l'ensemble K lui-même sera fini. La dimension maximale d'un simplexe de K est appelée *dimension de K* . Noter que les complexes simpliciaux forment une catégorie : un morphisme $f : K \rightarrow L$ est un ensemble d'applications linéaires sur les simplexes compatibles sur les faces, cf définition 3.1.13. Notre véritable objet d'intérêt n'est pas le complexe lui-même, mais l'espace topologique sous-jacent :

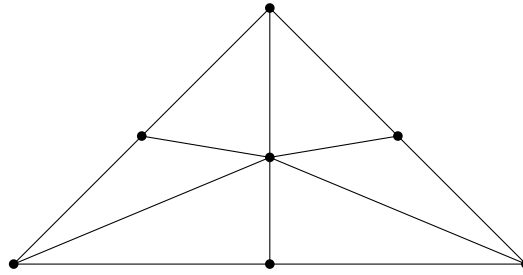


FIGURE 14. La subdivision barycentrique d'un 2-simplexe.

Définition 3.1.5 (Polyèdres). On appelle *polyèdre* associé à un complexe simplicial K — ou *réalisation* de K — la réunion $|K|$ de ses simplexes :

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

que l'on munit de la topologie induite par celle de l'espace euclidien ambiant.

On appelle *triangulation* d'un espace topologique X un homéomorphisme

$$T : |K| \rightarrow X$$

où K est un complexe simplicial.

Remarque 3.1.6. On notera que si X est la réalisation d'un complexe simplicial alors il est la réalisation d'une infinité de complexes simpliciaux (sauf dans le cas trivial où il est la réalisation d'un complexe de dimension 0) ; il suffit d'en prendre des subdivisions quelconques. En pratique, nous utiliserons les complexes simpliciaux comme des descriptions combinatoires simples d'un espace topologique qui nous intéresse, c'est-à-dire une triangulation.

Définition 3.1.7. Soit K un complexe simplicial. On dit que T est une *subdivision* de K si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) pour tout simplexe $\sigma' \in T$ il existe un simplexe $\sigma \in K$ tel que $\sigma' \subset \sigma$;
- (2) Tout $\sigma \in K$ est réunion d'un ensemble fini de $\sigma' \in T$.

En particulier $|K| = |T|$.

Exemple 3.1.8. Un exemple standard de subdivision est la subdivision barycentrique obtenue en rajoutant les barycentres de toutes les faces des simplexes, voir la figure 14

Lemme 3.1.9. Soit K et K' deux complexes simpliciaux réalisant le même polyèdre : $|K| = |K'|$. Alors il existe un complexe simplicial T qui soit une subdivision à la fois de K et K' .

Idée de la preuve : il s'agit d'intersecter les deux complexes simpliciaux. La figure obtenue n'est pas a priori un complexe simplicial, mais on peut la subdiviser de telle sorte qu'elle le devienne. On renvoie à [1] pour une preuve détaillée. \square

De la condition (3) de la définition 3.1.4, il résulte :

Lemme 3.1.10. Un complexe simplicial K est fini si et seulement si le polyèdre associé $|K|$ est compact.

Démonstration. S'il est fini, c'est une réunion de simplexes qui sont compacts dans \mathbb{R}^n , donc le résultat est compact. Réciproquement, supposons que $|K|$ est compact. Alors la condition (3) permet de construire un recouvrement ouvert de $|K|$ tel que chaque ouvert ne rencontre qu'un nombre fini de simplexes. Comme on peut en extraire un recouvrement

fini, il suit que $|K|$ est recouvert par un nombre fini de simplexes. Ces simplexes n'ont qu'un nombre fini de faces de toute dimension et comme tous les simplexes de K doivent en faire partie, on a qu'un nombre fini de simplexes. \square

Exemple 3.1.11 (un simplexe). Un n -simplexe σ dans \mathbb{R}^ℓ définit évidemment un complexe simplicial. Précisément, il s'agit du complexe simplicial donné par σ et toutes les faces de dimension quelconques de σ (autrement dit si $\sigma = \langle s_0, \dots, s_n \rangle$, les $k \leq n$ -simplexes du complexe simplicial sont tous les $\langle s_{i_0}, \dots, s_{i_k} \rangle$ pour tout $k = 0 \dots, n$ et $i_0 < \dots < i_k$, c'est-à-dire les simplexes obtenus en prenant une partie quelconque de l'ensemble des sommets). Trivialement, la réalisation géométrique est le simplexe lui-même et on ne fera dans la suite aucune distinction entre σ et le complexe simplicial associé.

Exemple 3.1.12 (Bord d'un simplexe = sphère). Le bord d'un n -simplexe Δ^n est aussi un complexe simplicial. On le définit en gardant tous les i -simplexes de Δ^n pour $i \leq n - 1$ (c'est-à-dire toutes les faces du simplexe) mais en ne mettant pas le simplexe lui-même. Autrement dit, si s_0, \dots, s_n sont les sommets de Δ , le complexe simplicial $\partial\Delta^{(n)}$ est la réunion des simplexes de la forme $\langle s_{i_0}, \dots, s_{i_k} \rangle$ pour tout $k = 0 \dots, n - 1$ et $i_0 < \dots < i_k$.

Le polyèdre associé est donc le bord (au sens topologique) du simplexe, c'est-à-dire la réunion de ses faces, et est homéomorphe à la sphère de dimension $n - 1$.

Morphismes associés aux complexes simpliciaux.

On a une notion naturelle de morphisme associé à un complexe simplicial, mais qui est très restrictive :

Définition 3.1.13 (Morphisme de complexe simplicial). Soit K, L deux complexes simpliciaux. Un morphisme de complexe simplicial $f : K \rightarrow L$ est une application continue de $|K|$ dans $|L|$ qui envoie les sommets sur des sommets et dont la restriction à chaque simplexe de K est affine³⁵.

En particulier, elle envoie un simplexe sur un simplexe (mais possiblement de dimension inférieure). Notons que la composée de deux morphismes d'ensembles simpliciaux est encore un tel morphisme.

Exemple 3.1.14. L'inclusion d'un sous-complexe simplicial est un morphisme de complexe simplicial.

On notera que l'inclusion d'une subdivision dans un complexe simplicial n'est pas un morphisme de complexe simplicial alors que pourtant, d'un point de vue géométrique, les polyèdres associés sont les mêmes. Ceci motive la définition suivante :

Définition 3.1.15 (Morphisme PL). Un morphisme PL³⁶ de K vers L est une application continue $f : |K| \rightarrow |L|$ telle qu'il existe une subdivision T de K pour laquelle la restriction de f à tout simplexe de T est affine.

Lemme 3.1.16. *La composée de deux morphismes PL est un morphisme PL. La réciproque d'une application PL qui est un homéomorphisme est une application PL.*

Démonstration. La première partie découle du lemme 3.1.9. La deuxième découle du fait que si T est une subdivision sur les simplexes de laquelle f est affine, alors son image par f définit une structure de complexe simplicial sur $|L|$. \square

On dispose donc de deux catégories des complexes simpliciaux : l'une munie seulement des morphismes de complexes simpliciaux et l'autre, comprenant la précédente munie des morphismes PL. Nous noterons **Poly** cette dernière catégorie et **CSimp** la première.

Puisque ce qui nous intéresse avant tout sont les espaces topologiques à homéomorphismes près, on va s'intéresser aux polyèdres à homéomorphismes près.

35. on rappelle que les simplexes de K et L vivent dans des espaces euclidiens de dimension finie.

36. pour Piecewise Linear en anglais, polyédral par morceaux en français

Définition 3.1.17 (Espaces triangulés et polyédraux). Un espace topologique X est

- *triangulable* s'il existe un complexe simplicial K et un homéomorphisme $\varphi : |K| \rightarrow X$. Un tel choix de K et φ s'appelle une triangulation de X .
- *polyédral* — ou PL — s'il existe une triangulation $\varphi : |K| \xrightarrow{\cong} X$ et que pour tout polyèdre L tel que $|L| = |K|$, il existe un homéomorphisme $\psi : |L| \rightarrow X$ tel que la composée $\psi^{-1} \circ \varphi$ soit un homéomorphisme PL.

Voici quelques résultats (difficiles) concernant ces notions à titre culturel

Théorème 3.1.18. *Toute variété différentiable est un espace polyédral.*

Théorème 3.1.19 (Moïse). *Toute variété topologique compacte de dimension ≤ 3 est polyédrale.*

Théorème 3.1.20 (Casson). *Il existe des variétés topologiques compactes de dimension 4 qui ne sont pas triangulables.*

Proposition 3.1.21. *Tout polyèdre compact est un espace polyédral.*

Ce qui se passe pour les variétés topologiques de dimension ≥ 5 est encore bien mystérieux. Cela dit, on a un théorème qui nous garantit que toute variété topologique est homotope à un CW-complexe. Toutefois, pour ce qui est de l'étude des variétés différentiables et de bien d'autres espaces, il est plus commode de travailler avec les polyèdres.

D'après le lemme 3.1.16, on a

Lemme 3.1.22. *Les espaces polyédraux munis des morphismes PL forment une sous-catégorie de **Top**, notée **PL**.*

Remarque 3.1.23. (Sur la terminologie "complexe simplicial") On a choisi de présenter une définition concrète (et essentiellement géométrique) des complexes simpliciaux, c'est-à-dire provenant d'un sous-espace de \mathbb{R}^n avec une topologie qui, localement, coïncide avec celle des simplexes.

Il existe aussi une notion *purement combinatoire* de *complexe simplicial abstrait* que l'on ne confondra pas avec celle présentée ici. Cette dernière est définie comme un ensemble de sommets et un ensemble "abstrait" de faces, c'est-à-dire un sous-ensemble des parties finies de l'ensemble de sommets, vérifiant la propriété 3.1.4, (1). À un tel espace, on peut définir une réalisation géométrique mais qui ne se plonge pas nécessairement dans \mathbb{R}^n (à moins de supposer des conditions analogues à 3.1.4.(3)).

Remarque 3.1.24. Puisqu'un simplexe est homéomorphe à une boule et que la réunion de ses faces est homéomorphe une sphère de codimension 1, il suit que la réalisation géométrique d'un complexe simplicial est un CW-complexe. Il s'agit d'un type particulier de CW-complexes pour lesquels les applications de recollement sont particulièrement triviales : elles sont injectives. En particulier, les polyèdres et par suite tout espace polyédral (même ceux associés aux complexes simpliciaux abstraits) satisfont les conclusions de la proposition 2.4.4.

3.2. HOMOLOGIE SIMPLICIALE : L'HOMOLOGIE DES COMPLEXES SIMPLICIAUX

Nous allons maintenant construire un complexe de chaînes canoniquement associé à tout complexe simplicial et ainsi obtenir des groupes d'homologie. Nous prouverons plus tard que ces groupes ne dépendent que de la réalisation géométrique du complexe simplicial. Nous invitons le lecteur à consulter les parties 5.2, 5.3 pour les notions de complexes de chaînes et de leur homologie.

Soit K un complexe simplicial. On pose :

$$K^{(i)} = \{\sigma \in K \mid \sigma \text{ est un simplexe de dimension } i\}$$

et pour tout $\sigma \in K$ on fixe un ordre total sur l'ensemble des sommets de K , et on munit les simplexes de K de l'orientation induite.

Définition 3.2.1 (Chaînes simpliciales). On note $C_i(K)$ le \mathbb{Z} -module des i -chaînes (à support compact) sur K , c'est-à-dire le groupe abélien librement engendré par $K^{(i)}$. Une i -chaîne $c \in C_i(K)$ est donc une combinaison linéaire

$$c = \sum_{\sigma \in K^{(i)}} c_\sigma \sigma$$

où $c_\sigma \in \mathbb{Z}$ est non-nul seulement pour un ensemble fini de σ .

On définit de même, pour tout anneau R , $C_i(K, R)$ comme le R -module libre³⁷ engendré par $K^{(i)}$. En particulier, pour tout corps \mathbb{F} , on dispose des i -chaînes à coefficients dans \mathbb{F} : $C_i(K, \mathbb{F})$ le \mathbb{F} -espace vectoriel librement engendré par $K^{(i)}$.

On dispose sur $C_i(K)$ d'une *application bord* naturelle

$$\partial : C_i(K) \rightarrow C_{i-1}(K)$$

linéaire. Par linéarité il suffit de donner son expression sur chaque simplexe $\sigma \in K^{(i)}$. Elle est donnée par la formule

$$\partial\sigma = \sum_{\tau \text{ face de } \sigma} \pm\tau,$$

où le signe \pm est $+$ si l'orientation de τ est induite par celle de σ en omettant un sommet d'indice pair et est $-$ sinon. Autrement dit, si $\sigma := \langle s_0, \dots, s_n \rangle$ où les s_i sont ordonnés par ordre croissant, on a la formule

$$(3) \quad \partial\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \langle s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_n \rangle$$

où la notation \widehat{s}_i signifie que l'on a retiré le sommet s_i de la liste.

Le lemme élémentaire suivant est le point clef.

Lemme 3.2.2. *On a $\partial \circ \partial = 0$.*

Autrement dit $(C_*(K, R), \partial)$ est un complexe de chaînes (quel que soit l'anneau de coefficient), cf définition 5.2.2.

Démonstration. Il suffit de vérifier la formule sur un simplexe $\sigma \in K^{(r)}$ de sommets s_0, \dots, s_r (indexés de manière cohérente avec l'orientation). On note σ_i , resp. σ_{ij} , le simplexe orienté de dimension $r-1$, resp. $r-2$, obtenu en omettant le sommet s_i , resp. les sommets s_i et s_j avec $i < j$. On a alors :

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^r (-1)^i \sigma_i,$$

$$\partial\sigma_i = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \sigma_{ji} + \sum_{j=i+1}^r (-1)^{j-1} \sigma_{ij}$$

et donc

$$\partial(\partial\sigma) = \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \sigma_{ji} + \sum_{i < j} (-1)^{j+i-1} \sigma_{ij} = 0.$$

□

37. On peut consulter la section 5.1 pour des (r)appels sur ces notions ; et en particulier la définition 5.1.6.

Remarque 3.2.3. On peut définir plus généralement un complexe simplicial dès qu'on a *suppose fixée une orientation* sur tous les simplexes. Le module sous-jacent est inchangé et la différentielle est donnée par la même formule :

$$\partial\sigma = \sum_{\tau \text{ face de } \sigma} \pm\tau,$$

où le signe \pm est $+$ si l'orientation de τ est induite par celle de σ en omettant un sommet d'indice pair ou si elle est opposée à celle induite par σ en omettant un sommet d'indice impair et est $-$ sinon.

Puisque $(C(K), \partial)$ est un complexe, nous disposons donc des notions de

- du module $Z_i(K)$ des *i-cycles*, c'est-à-dire des *i*-chaîne $c \in C_i(K)$ de bord nul : $\partial c = 0$;
- du module $B_i(K) = \text{im}(\partial : C_{i+1}(K) \rightarrow C_i(K))$ des *i-bords* ;
- des *i*-ièmes groupes d'homologie

$$H_i(K) = Z_i(K)/B_i(K)$$

du complexe simplicial K . Nous les appellerons groupe d'homologie simpliciale de K .

Exemples 3.2.4. 1. Le segment $I = [0, 1]$ peut-être vu comme un complexe simplicial avec un simplexe a de dimension 1 et deux simplexes α et β de dimension 0. On a alors $C_1 = \mathbb{Z}$ (avec a comme générateur), $C_0 = \mathbb{Z}^2$ (avec α et β comme générateurs) et $\partial(a) = \beta - \alpha$, de sorte que $H_1 = 0$ et $H_0 = \mathbb{Z}$.

2. Considérons le simplexe $\partial\Delta^2$ dont on a numéroté les sommets s_0, s_1, s_2 dans cet ordre. On a trois 1-simplexes : $e_2 := \langle s_0, s_1 \rangle$, $e_0 := \langle s_1, s_2 \rangle$ et $e_1 := \langle s_0, s_2 \rangle$ et $C_{i \geq 2}(\partial\Delta^2) = 0$. Notre complexe simplicial s'écrit donc

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z}e_0 \oplus \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \xrightarrow{d} \mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z}s_0 \oplus \mathbb{Z}s_1 \oplus \mathbb{Z}s_2.$$

Le même calcul qu'en 1. donne³⁸ que $\partial e_0 = s_2 - s_1$, $\partial e_1 = s_2 - s_0$, $\partial e_2 = s_1 - s_0$. De sorte que dans les bases données, d s'écrit $(x_0, x_1, x_2) \mapsto (-x_2 - x_1, -x_0 + x_2, x_0 + x_1)$. On remarque que l'image de d est exactement le sous-module H défini comme l'ensemble des solutions de $y_0 + y_1 + y_2 = 0$ dans $\mathbb{Z}s_0 \oplus \mathbb{Z}s_1 \oplus \mathbb{Z}s_2$ et que de plus on a un isomorphisme $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z}s_0 \oplus H$. Enfin le noyau de d est précisément $\{(x_0, x_1, x_2) ; x_0 = x_2 = -x_1\} \cong \mathbb{Z}$. Il suit que $H_1 = \mathbb{Z}$ et $H_0 = \mathbb{Z}^3/\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}$, c'est-à-dire la même chose que l'homologie du cercle.

3. Un simplexe de dimension k est un complexe simplicial. On a $\text{rang}(C_i) = \binom{k+1}{i+1}$ et la suite

$$0 \rightarrow C_k \rightarrow C_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_0$$

est exacte. Les groupes d'homologie H_i , $i > 0$, sont donc tous triviaux. Enfin on a $H_0 = \mathbb{Z}$. Ces calculs coïncident avec ceux de l'homologie de la réalisation géométrique du simplexe d'après la proposition 1.1.7.

Exercice 3.2.5. Démontrer ce résultat (c'est un peu pénible, mais faisable, à la main ; plus facile si on utilise, par exemple la notion de collapse ou une façon intelligente de faire un raisonnement par récurrence).

4. Le bord d'un $k+1$ -simplexe Δ (exemple 3.1.12) est un complexe simplicial. Le polyèdre associé est homéomorphe à la sphère de dimension k . Montrons que tous les groupes d'homologies de ce complexe simplicial sont triviaux sauf H_k et H_0 qui sont isomorphes à \mathbb{Z} (ce qui est cohérent avec la proposition 1.1.7). On laisse le cas de $k = 0$ qui est très

^{38.} notons que si nous avons orienté e_1 dans l'autre sens, et ainsi obtenu une orientation cohérente du bord du simplexe, l'application de bord aurait été plus symétrique, son noyau aurait été $\mathbb{Z}e_0 + e_1 + e_2$, mais les groupes d'homologie aurait bien sûr été les mêmes

facile en exercice et on suppose $k \geq 1$. Étant donné que pour $i \neq k+1$, les simplexes de $\partial\Delta$ et de Δ sont les mêmes, on a un morphisme de complexes de chaînes :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & 0 & \longrightarrow & C_{k+1}(\partial\Delta) = 0 & \xrightarrow{d} & C_k(\partial\Delta) & \xrightarrow{d} & C_{k-1}(\partial\Delta) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & C_0(\partial\Delta) \\ & & & \downarrow & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ \dots & 0 & \longrightarrow & C_{k+1}(\Delta) \cong \mathbb{Z} & \xrightarrow{d} & C_k(\Delta) & \xrightarrow{d} & C_{k-1}(\Delta) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & C_0(\Delta). \end{array}$$

En particulier les groupes d'homologie en degré $i \neq k, k+1$ des deux complexes sont identiques. Comme $C_{k+1}(\partial\Delta) = 0$, il suit que son homologie en degré $k+1$ aussi. Comme d'une part $H_k(\Delta) = 0$ par le 3. et que d'autre part $H_k(\Delta) = \ker(C_k(\Delta) \rightarrow C_{k-1}(\Delta)) / \text{Im}(C_{k+1}(\Delta) \cong \mathbb{Z} \rightarrow C_k(\Delta))$ par définition, on en déduit que $Z_k(\Delta) \cong \text{Im}(C_{k+1}(\Delta) \cong \mathbb{Z} \rightarrow C_k(\Delta)) \cong \mathbb{Z}$ car l'homologie de Δ étant triviale en degré $k+1$ on obtient que $\mathbb{Z} \rightarrow C_k(\Delta)$ est injective. Enfin comme $Z_k(\Delta) = Z_k(\partial\Delta)$, on obtient que

$$H_k(\partial\Delta) = \mathbb{Z}/0 \cong \mathbb{Z}.$$

Remarque 3.2.6. Dans les exemples précédents, si nous avons calculé l'homologie à coefficient dans un anneau R , nous aurions trouvé les mêmes groupe d'homologie simplement en changeant \mathbb{Z} par R (ce qui est facile à vérifier). C'est spécifique à ces exemples et ce n'est PAS le cas en général. Nous le verrons par exemple avec l'homologie du plan projectif.

Proposition 3.2.7 (Deux propriétés triviales). (1) Soit K un complexe simplicial de dimension³⁹ m . Alors $H_{i \geq m+1}(K) = 0$
(2) Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille de complexes simpliciaux disjoints dans \mathbb{R}^n . Alors,

$$H_*(\coprod_{i \in I} K_i) = \bigoplus_{i \in I} H_*(K_i).$$

(3) Si K est fini, alors il n'y a qu'un nombre fini de groupes d'homologie non-nuls (quel que soit l'anneau de coefficients) et de plus chaque $H_i(K)$ est de type fini et chaque $H_i(K, \mathbb{F})$ est de dimension finie pour tout corps \mathbb{F} .

Démonstration. Dans les deux premiers cas, le résultat est déjà vrai au niveau des complexes de chaînes : d'une part $C_{* > m}(K) = 0$ par définition et d'autre part $C_*(K \coprod K') = C_*(K) \oplus C_*(K')$ car l'opérateur de bord envoie une face dans une combinaison linéaire de sous-faces. C'est encore vrai pour un produit infini.

Pour le troisième point, si K est fini, les $C_i(K)$ sont non nul pour un nombre fini de i . Par ailleurs chaque $C_i(K)$ est de type fini. Il en résulte que $Z_i(K)$ aussi et a fortiori $H_i(K)$ est de type fini. L'argument est le même pour un corps à la place de \mathbb{Z} . \square

Proposition 3.2.8. Pour tout complexe simplicial K , le groupe $H_0(K)$ est un groupe abélien libre de rang égal au nombre de composantes connexes du polyèdre associé à K .

Démonstration. On peut supposer K connexe par la proposition 3.2.7. Le groupe $Z_0(K) = C_0(K)$ est engendré par les sommets de K . Maintenant, l'image d'une arête $\vec{\alpha\beta} = \langle \alpha, \beta \rangle$ par l'application bord ∂ est égal à $\pm(\alpha - \beta)$. Le sous-groupe $B_0(K) \subset Z_0(K)$ est donc engendré par les $\alpha - \beta$, où $\alpha\beta$ est une arête. En identifiant $Z_0(K)$ à \mathbb{Z}^M , où M est le nombre de sommets, on obtient que $B_0(K)$ est contenu dans l'hyperplan L d'équation $x_1 + \dots + x_M = 0$ et l'engendre, puisque K est supposé connexe. On en conclut que $H_0(K) = \mathbb{Z}^M / L$ est isomorphe à \mathbb{Z} . \square

L'homologie simpliciale est en fait fonctorielle par rapport aux morphismes d'ensembles simpliciaux 3.1.13. En effet, soit $f : K \rightarrow L$ un tel morphisme. On définit $f_i : C_i(K) \rightarrow$

39. La dimension de K est la dimension maximale d'un simplexe de K

$C_i(L)$ par la formule

$$(4) \quad f_i(\langle s_0, \dots, s_i \rangle) \begin{cases} = \pm \langle f(s_0), \dots, f(s_i) \rangle & \text{si les } f(s_j) \text{ sont affinement indépendants} \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où le signe \pm est $+$ si l'orientation⁴⁰ du simplexe $\langle f(s_0), \dots, f(s_i) \rangle$ est la même, à une permutation paire près, que celle de $\langle s_0, \dots, s_i \rangle$ et $-$ sinon⁴¹. On notera que cette application élimine toutes les images de simplexe qui ne sont pas de la même dimension que celui de départ.

Lemme 3.2.9. *La suite $f_* := (f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un morphisme de complexes de chaînes.*

Démonstration. Commençons par introduire une notation pour gérer le signe dans la définition de f_* . Si s_0, \dots, s_i sont des sommets ordonnés dans K , on note $[s_0, \dots, s_i] = \langle s_0, \dots, s_i \rangle \in C_i(K)$ le vecteur de base correspondant dans le complexe simplicial. On étend cette notation en posant, pour toute permutation σ de $\{0, \dots, i\}$

$$[s_{\sigma(0)}, \dots, s_{\sigma(i)}] := (-1)^\sigma [s_0, \dots, s_i] = \langle s_0, \dots, s_i \rangle$$

où $(-1)^\sigma$ est la signature de la permutation. On remarque alors que l'on peut écrire f_* sous la forme

$$f_i([s_0, \dots, s_i]) = [f(s_0), \dots, f(s_i)]$$

(lorsque les $f(s_j)$ sont affinement indépendants). Il suffit maintenant de montrer que

$$\partial[s_{\sigma(0)}, \dots, s_{\sigma(i)}] = \sum_{j=0}^i (-1)^j [s_{\sigma(0)}, \dots, \widehat{s_{\sigma(j)}}, \dots, s_{\sigma(i)}]$$

pour conclure. Étant donné que les permutations sont engendrées par les transpositions $\tau_{k,k+1}$ inversant deux nombres consécutifs, il suffit de démontrer le résultat pour ces dernières. Or, en remarquant que $[s_0, \dots, s_k, \widehat{s_{k+1}}, \dots, s_i] = [s_0, \dots, \widehat{s_{k+1}}, s_k, \dots, s_i]$ (ce qui est évident puisque on a enlevé le seul sommet dérangeant l'ordre), on trouve

$$\begin{aligned} \partial[s_0, \dots, s_{k+1}, s_k, \dots, s_i] &= -\partial[s_0, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots, s_i] \\ &= -\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j [s_0, \dots, \widehat{s_j}, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots, s_i] \\ &\quad - \sum_{k+1}^i (-1)^j [s_0, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots, \widehat{s_j}, \dots, s_i] \\ &\quad - (-1)^{k+1} [s_0, \dots, s_k, \widehat{s_{k+1}}, \dots, s_i] - (-1)^k [s_0, \dots, \widehat{s_k}, s_{k+1}, \dots, s_i] \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j [s_0, \dots, \widehat{s_j}, \dots, s_{k+1}, s_k, \dots, s_i] + \sum_{k+1}^i (-1)^j [s_0, \dots, s_{k+1}, s_k, \dots, \widehat{s_j}, \dots, s_i] \\ &\quad + (-1)^k [s_0, \dots, \widehat{s_{k+1}}, s_k, \dots, s_i] + (-1)^{k+1} [s_0, \dots, s_{k+1}, \widehat{s_k}, \dots, s_i] \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^j [s_{\tau_{k;k+1}(0)}, \dots, s_{\widehat{\tau_{k;k+1}(j)}}, \dots, s_{\tau_{k;k+1}(i)}]. \end{aligned}$$

□

On en déduit :

40. c'est-à-dire l'ordre sur ces sommets

41. notons que le fait qu'ils aient la même orientation signifie que la base affine $f(s_0), \dots, f(s_i)$ a la même orientation que la base affine donnée par l'ordre choisi dans L sur les sommets de ce simplexe image.

Proposition 3.2.10. *Pour tout anneau R , le complexe de chaînes simpliciales définit un foncteur $C_*(-) : \mathbf{CSimp} \rightarrow \mathbf{Ch}(R)$ et les foncteurs d'homologie sont des foncteurs $H_i(-) : \mathbf{CSimp} \rightarrow R\text{-mod}$.*

Démonstration. Cela découle du lemme 3.2.9 et du fait que $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ (puisque définie par l'image des sommets) et $id_* = id$. \square

La condition d'être un morphisme simplicial est assez restrictive, et ne permet pas de comparer via un tel morphisme deux complexes simpliciaux K et L qui définissent le même polyèdre : $|K| = |L|$. En particulier, on a pas de morphisme de complexe simplicial entre K et une subdivision T . Cependant, on peut tout de même construire un morphisme des complexes de chaînes associées. L'idée est que tout simplexe de K est une réunion de simplexes de T , donc en quelque sorte une « somme » de simplexes de T . On peut formaliser cette idée de somme dans le complexe des chaînes simpliciales puisque on peut justement prendre des combinaisons linéaires de faces.

Précisément :

Définition 3.2.11. Soit T une subdivision de K . On obtient une application linéaire F_i de $C_i(K)$ vers $C_i(T)$ qui associe à tout simplexe $\sigma \in K^{(i)}$ la somme

$$F_i(\sigma) = \sum_{\substack{\sigma' \in T^{(i)} \\ \sigma' \subset \sigma}} \pm \sigma',$$

où le signe \pm est $+$ si les orientations de σ et σ' sont les mêmes⁴² et $-$ sinon.

La proposition suivante est immédiate mais fondamentale.

Proposition 3.2.12. *L'application $F = (F_i) : C_\bullet(K) \rightarrow C_\bullet(T)$ est un morphisme de complexes de chaînes, autrement dit $F = (F_i)$ est une suite d'applications linéaires telles que le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_i(K) & \xrightarrow{\partial} & C_{i-1}(K) & \xrightarrow{\partial} & C_{i-2}(K) & \longrightarrow & \cdots \\ & & F_i \downarrow & & F_{i-1} \downarrow & & F_{i-2} \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_i(T) & \xrightarrow{\partial} & C_{i-1}(T) & \xrightarrow{\partial} & C_{i-2}(T) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

soit commutatif.

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que celle du lemme 3.2.9. \square

Théorème 3.2.13. *Soit K un complexe et T une subdivision de K . Le morphisme de complexes $F : C_*(K) \rightarrow C_*(T)$ est un quasi-isomorphisme, c'est-à-dire qu'il induit un isomorphisme au niveau des groupes d'homologie.*

Ce théorème sera démontré plus loin comme conséquence de l'identification de l'homologie simpliciale avec l'homologie singulière de son polyèdre associé, cf Théorème 4.3.3.

Corollaire 3.2.14. *Les groupes d'homologie simpliciales $H_i(K)$ ne dépendent que de la réalisation $|K|$ et l'homologie simpliciale induit un foncteur $H_i(-) : \mathbf{Poly} \rightarrow \mathbf{Ab}$.*

Esquisse de preuve. Si $|K| = |L|$ alors il existe une subdivision commune T à K et L . Le Théorème 3.2.13 implique alors $H_i(K) \cong H_i(T) \cong H_i(L)$ où les isomorphismes sont induits par les F_i . La functorialité découlera encore de l'identification avec l'homologie singulière, mais on peut aussi la déduire du même théorème 3.2.13 : soit $\varphi|K| \cong X$ une triangulation d'un espace polyédral et $f : |T| \rightarrow |L| \cong Y$ une application PL de X vers un autre espace PL Y . En particulier T est une subdivision de X et f est la réalisation d'un morphisme

^{42.} puisque les espaces affines engendrés par σ et σ' sont les mêmes, on peut comparer leurs orientations sans problèmes puisque elles reviennent à donner une orientation de cet espace affine

de complexe simplicial $T \rightarrow L$. On a alors par la proposition 3.2.10 et le théorème 3.2.13 une application induite $H_i(X) \cong H_i(T) \xrightarrow{H_i(f)} H_i(L) \cong H_i(Y)$. \square

Remarque 3.2.15. À ce stade, il n'est pas évident que l'on obtient ainsi une « bonne » théorie homologique : si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue il n'est pas immédiat que f induise une application linéaire f_* au niveau des groupes d'homologie ; c'est par contre bien le cas si l'on se restreint aux applications PL. Pour démontrer que cela reste vraie en prenant des applications continues (fonctorialité de l'homologie) nous allons introduire une théorie homologique plus abstraite. En chemin nous déduirons une démonstration du théorème 3.2.13 et corollaire 3.2.14.

Remarque 3.2.16 (Complexes quasi-simpliciaux). Le lien avec l'homologie singulière donnera aussi une équivalence entre l'homologie des complexes simpliciaux et l'homologie de quotients de complexes simpliciaux via des applications affines identifiants des sommets. L'intérêt de ces derniers est qu'ils offrent des modèles avec moins de simplexes et donc des complexes de chaînes plus petits et faciles à calculer. Voir le paragraphe 4.3.1 pour leurs définitions.

3.3. FORMULE D'EULER-POINCARÉ

Supposons K fini. Alors chaque $H_i(K)$ est un groupe abélien de type fini avec une partie libre et une partie de torsion.

Définition 3.3.1 (Nombres de Betti et groupes de torsion). Soit K un complexe simplicial dont les groupes d'homologie $H_i(K)$ sont de type fini pour tout i . On appelle *i -ème nombre de Betti de K* le rang de la partie libre de $H_i(K)$; on le note $b_i(K)$. On appelle *i -ème groupe de torsion de K* le sous-groupe de torsion de $H_i(K)$; on le note $\text{Tors}_i(K)$.

Enfin, si \mathbb{F} est un corps, on appelle *i -ème nombre de Betti de K à coefficient dans \mathbb{F}* la dimension de $H_i(K, \mathbb{F})$; on le note $b_i(K, \mathbb{F})$.

Notons que d'après le théorème 3.2.13, les groupes d'homologie $H_i(K)$ — et donc $b_i(K)$ et $\text{Tors}_i(K)$ — sont en fait des invariants topologiques de la réalisation $|K|$ de K .

Énonçons maintenant la formule d'Euler-Poincaré qui généralise la célèbre formule d'Euler

$$S - A + F = 2$$

liant les nombres de sommets S , d'arêtes A et de faces F d'un polyèdre de dimension 2 homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 .

Soit K un complexe simplicial fini de dimension d . On note $c_i(K)$ le rang de $C_i(K)$, c'est-à-dire le nombre de i -simplexes dans K . On a alors :

Théorème 3.3.2 (Formule d'Euler-Poincaré).

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i c_i(K) = \sum_{i=0}^d (-1)^i b_i(K).$$

Notation 3.3.3. Le nombre obtenu — noté $\chi = \chi(K) = \sum_{i=0}^d (-1)^i b_i(K)$ — est appelé *caractéristique d'Euler* du complexe K .

Démonstration. La démonstration est purement algébrique. On abrège par C_i, Z_i, B_i et H_i les \mathbb{Z} -modules $C_i(K), Z_i(K), B_i(K)$ et $H_i(K)$. On a alors des suites exactes de \mathbb{Z} -modules (de type fini)

$$0 \rightarrow Z_i \rightarrow C_i \xrightarrow{\partial} B_{i-1} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow B_i \rightarrow Z_i \rightarrow H_i \rightarrow 0.$$

On en conclut que

$$\text{rang } C_i = \text{rang } Z_i + \text{rang } B_{i-1} \quad \text{et} \quad \text{rang } Z_i = \text{rang } B_i + \text{rang } H_i.$$

On a donc

$$\text{rang } C_i = \text{rang } H_i + \text{rang } B_i + \text{rang } B_{i-1}$$

et

$$\sum_i (-1)^i \text{rang } C_i = \sum_i (-1)^i \text{rang } H_i.$$

□

Remarque 3.3.4. La formule d'Euler-Poincaré est vraie, avec la même démonstration, avec les nombres de Betti à coefficient dans tout corps :

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i c_i(K) = \sum_{i=0}^d (-1)^i b_i(K, \mathbb{F}).$$

On notera cependant que les nombres de Betti $b_i(K)$, $b_i(K, \mathbb{F})$ changent si on change de corps en général!

Exemple 3.3.5. En admettant le théorème 3.2.13, et en prenant comme triangulation de la sphère le bord du 3-simplexe, on obtient $b_0 = b_2 = 1$, $b_1 = 0$ d'après l'exemple 3.2.4.4. Il suit que l'on retrouve exactement la formule d'Euler $S - A + F = 2$.

Exemple 3.3.6. Considérons un graphe (complexe simplicial de dimension 1) connexe avec V sommets et E arêtes. Sa caractéristique d'Euler est égale à $V - E$ et à $b_0 - b_1$, où b_0 et b_1 sont les nombres de Betti. Il découle de la proposition 3.2.8 que $b_0 = 1$ et donc que $b_1 = 1 + E - V$.

Exemple 3.3.7 (Triangulations minimales d'une surface compacte). Soit Σ une surface compacte (sans bord) que l'on suppose triangulée. On note s , a , f les nombres de sommets, arêtes et faces (*i.e.* triangles) de la triangulation. D'après le théorème, la caractéristique d'Euler est égale à

$$\chi(\Sigma) = s - a + f.$$

Comme Σ est une surface sans bord, toute arête appartient à exactement 2 faces ; et chaque face contient exactement 3 arêtes. Ainsi

$$2a = 3f$$

d'où $s - \chi(\Sigma) = a/3$. Par ailleurs, dans une triangulation, deux sommets (distincts) déterminent au plus une arête et donc $a \leq s(s-1)/2$. On en déduit que $7s - 6\chi(\Sigma) \leq s^2$, c'est-à-dire $(s - 7/2)^2 \geq (49/4 - 6\chi(\Sigma))$ et donc (sachant que $s \geq 0$ et ⁴³ $\chi(\Sigma) \leq 2$) on en déduit la borne suivante sur les nombres de sommets d'une triangulation de Σ :

$$s \geq \frac{1}{2} \left(7 + \sqrt{49 - 24\chi(\Sigma)} \right).$$

En particulier, $s \geq 4$ pour la sphère, $s \geq 7$ pour le tore.

Exercice 3.3.8. Trouver des triangulations de la sphère avec 4 sommets, du tore ⁴⁴ avec 7 sommets.

Remarque 3.3.9. Une triangulation d'un espace topologique a en général beaucoup de faces. Ce qui complique le calcul de l'homologie. Comme nous le verrons plus loin, il suffit cependant d'avoir une quasi-triangulation 4.3.14 pour calculer son homologie.

43. la condition suivante sur la caractéristique d'Euler découle du fait qu'on sait calculer l'homologie de n'importe quelle surface

44. une triangulation facile du tore est obtenue en faisant le produit de la triangulation à 3 sommets du cercle par elle-même. Cette triangulation a évidemment 9 sommets.

IV. HOMOLOGIE SINGULIÈRE

Nous allons maintenant construire une théorie homologique (qui donnera des invariants homotopiques) pour tous les espaces topologiques.

L'idée va simplement être d'autoriser des triangulations avec singularités, c'est-à-dire de remplacer les simplexes par l'image par une application continue d'un vrai simplexe ⁴⁵.

4.1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Soit X un espace topologique ⁴⁶.

Définition 4.1.1. Un *i -simplexe singulier* de X est une application continue ⁴⁷

$$\sigma = \sigma_{\text{sing}} : \Delta^i \rightarrow X,$$

où

$$\Delta^i = \{(x_0, \dots, x_i) \in \mathbb{R}^{i+1} \mid x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$$

est le simplexe standard de dimension i (exemple 3.1.3). On note $C_i(X) = C_{i,\text{sing}}(X)$ le groupe abélien libre de base l'ensemble des i -simplexes singuliers de X . Un élément de $C_i(X)$ s'appelle un *i -chaîne singulière*.

Si R est un anneau commutatif quelconque, on notera de même $C_i(X, R) = C_{i,\text{sing}}(X, R)$ le R -module libre de base l'ensemble des i -simplexes singuliers de X .

Notation 4.1.2. On notera s_0, \dots, s_i les sommets ordonnés dans l'ordre croissant du i -simplexe standard Δ^i qui correspondent à l'orientation canonique de \mathbb{R}^{i+1} . Autrement dit $s_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, s_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ et $s_i = (0, \dots, 0, 1)$.

Remarque 4.1.3. À part si X est un espace topologique discret, $C_i(X)$ est en très grande généralité de dimension infinie en *tout* degré. En effet $C_0(X)$ n'est rien d'autre que le module libre de base l'ensemble des points de X . Par ailleurs on notera que pour tout $x \in X$, l'application constante $\Delta^i \rightarrow X, t \mapsto x$ définit un élément de $C_i(X)$.

On définit les « faces » d'un simplexe singulier de la façon suivante. Pour tout $k = 0, \dots, i$, on obtient un $(i-1)$ -simplexe singulier $\partial_k \sigma$ en composant l'application linéaire ⁴⁸

$$(x_0, \dots, x_{i-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{i-1}),$$

de $\Delta^{i-1} \subset \mathbb{R}^i$ vers la k -ème face $\{x_k = 0\}$ de Δ^i , par l'application σ .

On définit une application bord en prenant la somme alternée des faces comme pour les complexes simpliciaux :

$$\partial \sigma = \sum_{k=0}^i (-1)^k \partial_k \sigma.$$

L'application σ s'étend par linéarité en $\partial : C_i(X) \rightarrow C_{i-1}(X)$.

Lemme 4.1.4. On a $\partial \circ \partial = 0$.

Démonstration. Elle est identique à celle du lemme 3.2.2. En effet, les seules opérations que l'on fait sont au niveau de la source Δ^i du simplexe singulier. □

⁴⁵. plus précisément, on va garder non pas seulement l'image, mais aussi l'application continue afin de pouvoir déterminer, par exemple, les faces d'un tel simplexe singulier ; l'image géométrique pouvant être un objet très compliqué et singulier.

⁴⁶. et non plus nécessairement un polyèdre

⁴⁷. On mettra l'indice *sing* quand il sera nécessaire de distinguer les simplexes singuliers des simplexes simpliciaux ; de même plus bas avec les complexes de chaînes et les groupes d'homologie.

⁴⁸. cette application ne fait rien d'autre que d'identifier le $i-1$ -simplexe standard avec la k -ième face de Δ^i .

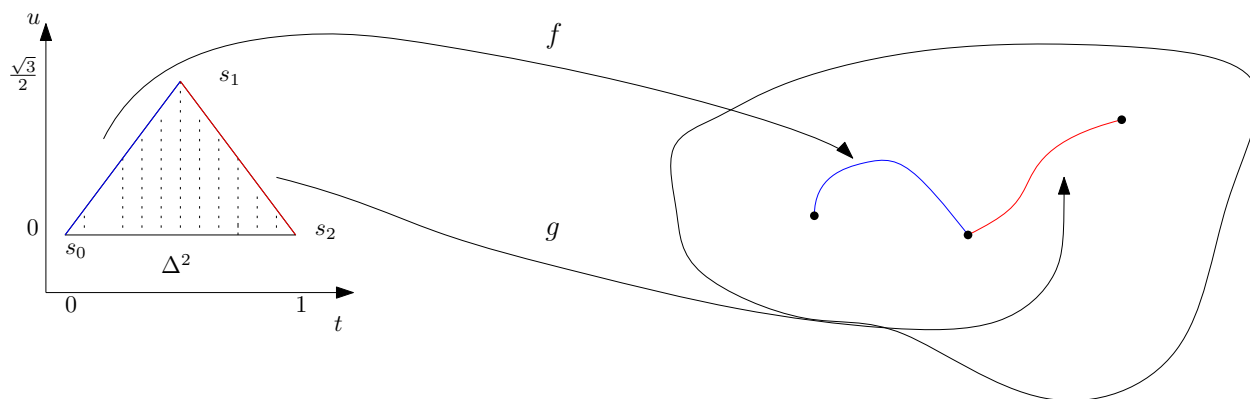


FIGURE 15. Une représentation du 2-simplexe singulier $\sigma : \Delta^2 \rightarrow X$ dont le bord est $f+g-f\star g$. Précisément σ a une valeur constante $\sigma(t, u) = \sigma(t)$ sur chaque ligne pointillée verticale, cette valeur étant donnée par l'intersection avec les deux segments bleus et rouges.

Définition 4.1.5 (Chaînes et homologie singulières). On appelle le complexe de chaîne $(C_*(X), \partial)$ le *complexe des chaînes singulières de X* . On note

$$H_i(X) = H_{i,\text{sing}}(X)$$

les *groupes d'homologie singulière*, c'est-à-dire les groupes d'homologie du complexe des chaînes singulières.

Pour tout anneau R , en particulier pour tout corps \mathbb{F} , on notera aussi $(C_*(X, R), \partial)$ le complexe des chaînes singulières et $H_i(X, R)$ son i -ième groupe d'homologie.

Terminologie : On dira que deux chaînes singulières $x, y \in C_i(X)$ sont *homologues* si elles diffèrent d'un bord :

$$x - y = \partial(z)$$

(avec donc $z \in C_{i+1}(X)$). En particulier si x est un cycle, alors y aussi et leurs classes d'homologie sont égales : $[x] = [y] \in H_i(X)$.

Exemple 4.1.6 (Chemins, lacets et 1-chaînes singulières). On a vu dans la remarque 4.1.3 que les 0-chaînes singulières sont exactement les combinaisons linéaires finies de points de X . Un 1-simplexe singulier de X est une application continue $f : \Delta^1 \rightarrow X$ ce qui est équivalent (via l'isomorphisme affine canonique entre $[0, 1]$ et Δ^1 qui envoie 0 sur s_0 et 1 sur s_1) à une application continue $f : [0, 1] \rightarrow X$, c'est-à-dire un chemin dans X de $f(0)$ vers $f(1)$. On a que $\partial(f) = f(1) - f(0) \in C_0(X)$.

En particulier, si $f : [0, 1] \rightarrow X$ est un lacet (c'est-à-dire $f(0) = f(1)$), alors la chaîne représentée par f est un 1-cycle : $f \in Z_{1,\text{sing}}(X)$ et définit donc une classe en homologie.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow X$ et $g : [0, 1] \rightarrow Y$ deux chemins composables, c'est-à-dire tels que $f(1) = g(0)$. On peut alors les composer pour obtenir le chemin continu $f \star g : [0, 1] \rightarrow X$ défini par $f \star g(t) = f(2t)$ pour $t \in [0, 1/2]$ et $g(2t - 1)$ sinon (voir l'exemple du groupe fondamental 2.2.16). Le chemin $f \star g$ ainsi construit ressemble, topologiquement parlant, vraiment à une somme des chemins f et g . Mais les trois 1-simplexes singuliers f , g et $f \star g$ étant linéairement indépendants par définition dans $C_*(X)$, $f \star g$ n'est *pas* la somme $f + g$ dans $C_1(X)$. Cependant, $f + g$ est bien "équivalent" à $f \star g$ au sens suivant : $f + g$ et $f \star g$ sont *homologues*, c'est-à-dire différent d'un bord :

$$f + g = f \star g + \partial(\sigma),$$

voir la figure 15 pour une description géométrique de cette formule.

En particulier si $f \star g$ est un lacet, alors $f + g$ aussi et ils ont les mêmes classes d'homologie $[f \star g] = [f + g]$. De manière générale, les sommes de simplexes singuliers correspondent, à homotopie/bord près, à leurs "sommes géométriques/topologiques".

Exercice 4.1.7. Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ deux chemins continus. Démontrer que si f et g sont homotopes alors les 1-cycles qu'ils représentent sont homologues : $f - g = \partial(\sigma) \in C_1(X)$. (Indication : écrire σ comme une somme de deux 2-simplexes singuliers en utilisant une construction similaire à celle de l'exemple 4.1.6)

En particulier, si $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ sont deux lacets homotopes, alors leurs classes d'homologie sont égales : $[f] = [g] \in H_1(X)$.

Exemple 4.1.8 (Homologie d'un point). Soit $X = \{*\}$ l'espace topologique réduit à un point. Montrons que

$$H_0(X) = \mathbb{Z} \text{ et } H_i(X) = 0 \text{ si } i > 0.$$

En effet $C_i = C_i(X) = \mathbb{Z}$ est engendré par l'unique i -simplexe singulier $\sigma_i : \Delta^i \rightarrow X$ (l'application constante). De plus, pour $i > 0$, on a $\partial_k \sigma_i = \sigma_{i-1}$, donc

$$\partial \sigma_i = \sum_{k=0}^i (-1)^k \sigma_{i-1} = \begin{cases} \sigma_{i-1} & \text{si } i \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les groupes d'homologie de X sont donc triviaux⁴⁹ sauf en degré 0 où on a $H_0(\{*\}) = \mathbb{Z}$.

Proposition 4.1.9. Si $X = \coprod_{i \in I} X_i$, on a $C_*(X, \partial) \cong \bigoplus_{i \in I} (C_*(X_i), \partial)$. En particulier $H_k(\coprod_{i \in I} X_i) \cong \bigoplus_{i \in I} H_k(X_i)$.

Démonstration. Comme les X_i sont dans des réunions de composantes connexes différentes les unes des autres dans le coproduit $\coprod_{i \in I} X_i$, on a qu'un simplexe singulier, ainsi que toutes ses faces, a son image dans un seul des X_i . La décomposition du complexe en découle et celle de l'homologie aussi. \square

Proposition 4.1.10. Si X est un espace topologique, le groupe $H_0(X)$ est le groupe abélien libre de rang engendré par les composantes connexes par arcs de X . De plus, pour tout point $x \in X$, la classe d'homologie $[x]$ est un générateur du facteur libre, isomorphe à \mathbb{Z} , qui correspond à la composante connexe par arcs de X qui contient x .

Démonstration. On vérifie facilement que si (X_α) est la famille des composantes connexes par arcs de X , pour tout $i \geq 0$, on a :

$$H_i(X) \cong \bigoplus_{\alpha} H_i(X_\alpha).$$

On peut donc supposer que X est connexe par arcs (et non vide). Maintenant, le module $C_0(X)$ est libre engendré par les points de X . Considérons le morphisme $\phi : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui vaut 1 sur chaque point de X . Il est surjectif et, puisque X est connexe, son noyau est précisément le sous-module $B_0(X)$. Comme $Z_0(X) = C_0(X)$ le morphisme ϕ induit un isomorphisme de $H_0(X)$ sur \mathbb{Z} . \square

À ce stade, l'espace réduit à un point est essentiellement le seul espace dont il soit facile de calculer l'homologie singulière! Qu'a-t-on gagné à introduire cette théorie homologique plus abstraite? La réponse est qu'elle est fonctorielle :

Si X et Y sont deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ est une application continue. Alors f induit une application linéaire $f_* : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$ qui à un simplexe singulier $\Delta^i \xrightarrow{\sigma} X$ associe le simplexe singulier $f \circ \sigma : \Delta^i \rightarrow Y$.

Lemme 4.1.11. L'application f_* est un morphisme de complexe de chaînes : $\partial \circ f_* = f_* \circ \partial$.

49. c'est le même calcul que dans l'exemple 5.2.12.4 au dernier terme près

Démonstration. C'est assez évident car f_* est définie en composant au but alors que la différentielle est obtenue en prenant des restrictions de la source. Plus précisément, pour tout $k = 0 \dots i$, on a

$$(5) \quad \begin{aligned} f_*(\partial_k \sigma)(x_0, \dots, x_i) &= f_*(\sigma(x_0, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_i)) \\ &= f \circ \sigma(x_0, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_i) = \partial_k(f_*(\sigma))(x_0, \dots, x_i). \end{aligned}$$

□

Notation 4.1.12. On notera $H_i(f) : H_i(X, R) \rightarrow H_i(Y, R)$ (ou parfois abusivement encore f_*) l'application induite de f_* en passant aux groupes d'homologie (à coefficients dans un anneau quelconque).

Proposition 4.1.13. *Pour tout anneau R , le complexe des chaînes singulières $X \mapsto (C_*(X), \partial)$ et la règle $f \mapsto f_*$ définissent un invariant topologique à valeur dans les complexes de chaînes, i.e., un foncteur, noté $C_* : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ch}(R)$ des espaces topologiques vers les complexes de chaînes.*

En particulier, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on en déduit un foncteur $H_i : \mathbf{Top} \rightarrow R\text{-Mod}$ en passant aux groupes d'homologie.

Démonstration. Le deuxième point découle du premier et du fait que l'homologie est un foncteur des complexes vers les modules (Lemme 5.3.7). Pour le premier, on doit seulement vérifier que $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$ et que $\text{id}_* = \text{id}_{C_*(X)}$ ce qui est immédiat par associativité de la composition de fonctions. □

Les invariants obtenus par l'homologie singulière sont en fait des invariants avec plusieurs propriétés qui vont nous aider à les calculer. La première est que c'est un invariant *homotopique*.

Proposition 4.1.14. *Soient f et g deux applications homotopes de X dans Y . Alors les applications induites f_* et g_* de $H_\bullet(X)$ dans $H_\bullet(Y)$ coïncident.*

Démonstration. Soient $\iota : X \rightarrow X \times [0, 1]$ et $\iota' : X \rightarrow X \times [0, 1]$ les applications définies par $\iota(x) = (x, 0)$ et $\iota'(x) = (x, 1)$. Si h est une homotopie entre f et g , alors $f = h \circ \iota$ et $g = h \circ \iota'$. Il suffit donc, par functorialité des chaînes singulières (proposition 4.1.13) de montrer que $H_i(\iota) = H_i(\iota')$ pour avoir que $H_i(g) = H_i(f)$.

D'après le lemme 5.3.13, il suffit de montrer que ι_* et ι'_* sont reliées par une homotopie de chaîne $K : C_*(X) \rightarrow C_*(X \times [0, 1])$. Par linéarité il suffit de plus de construire les K_i sur les i -simplexes singuliers.

Considérons donc un i -simplexe singulier $\sigma : \Delta^i \rightarrow X$. Il lui correspond une application $\sigma \times \text{id} : \Delta^i \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1]$. L'idée est alors de décomposer le prisme $\Delta^i \times [0, 1]$ en $(i+1)$ simplexes de dimension $i+1$ et de faire la somme de ces simplexes singuliers (munis de l'orientation induite par celle du prisme), cf figure 16. Ceci donnera une combinaison linéaire de $n+1$ -simplexes standards dans le prisme $\Delta^n \times [0, 1]$ et en composant cela par l'application $\sigma \times \text{id}$ on obtiendra un $n+1$ simplexe de $X \times [0, 1]$

Concrètement, on réalise cela comme suit. Notons s_0, \dots, s_n les sommets de Δ^n (autrement dit $s_i = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0)$). Pour toute famille $e_0, \dots, e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+2}$ de points, on définit $T_{e_0, \dots, e_{n+1}} : \Delta^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ l'unique application affine envoyant s_i sur e_i .

On pose alors

$$K_n(\sigma) := \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \times \text{id}) \circ T_{(s_0, 0), (s_1, 0), \dots, (s_i, 0), (s_i, 1), (s_{i+1}, 1), \dots, (s_n, 1)} \in C_{n+1}(X \times [0, 1]).$$

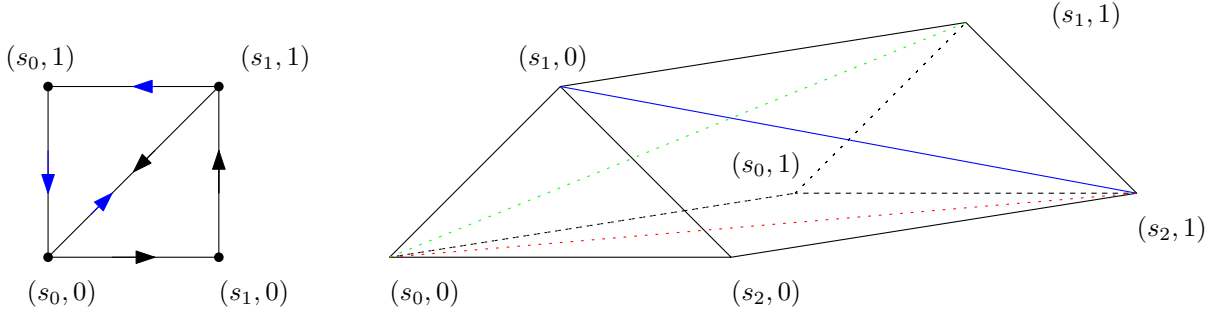


FIGURE 16. Subdivision du carré en deux simplexes (avec leur orientation) à gauche et subdivision du prisme de base Δ^2 à droite.

On a

$$\begin{aligned} \partial \circ K_n(\sigma) &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} (\sigma \times \text{id}) \circ T_{(s_0,0),(s_1,0),\dots,(\widehat{s_j,0}),\dots,(s_i,0),(s_i,1),(s_{i+1},1),\dots,(s_n,1)} \right. \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j+1} (\sigma \times \text{id}) \circ T_{(s_0,0),(s_1,0),\dots,(s_i,0),(s_i,1),(s_{i+1},1),\dots,(\widehat{s_j,1}),\dots,(s_n,1)} \\ &\quad + (-1)^{i+i} (\sigma \times \text{id}) \circ T_{(s_0,0),(s_1,0),\dots,(s_{i-1},0),(s_i,1),(s_{i+1},1),\dots,(s_n,1)} \\ &\quad \left. + (-1)^{2i+1} (\sigma \times \text{id}) \circ T_{(s_0,0),(s_1,0),\dots,(s_i,0),(s_{i+1},1),(s_{i+1},1),\dots,(s_n,1)} \right). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K_n \circ \partial(\sigma) &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1+j} (\sigma \times \text{id}) \circ T_{(s_0,0),(s_1,0),\dots,(\widehat{s_j,0}),\dots,(s_i,0),(s_i,1),(s_{i+1},1),\dots,(s_n,1)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j} (\sigma \times \text{id}) \circ T_{(s_0,0),(s_1,0),\dots,(s_i,0),(s_i,1),(s_{i+1},1),\dots,(\widehat{s_j,1}),\dots,(s_n,1)} \right). \end{aligned}$$

En faisant la somme, il reste

$$\begin{aligned} \partial \circ K_n(\sigma) + K_n \circ \partial(\sigma) &= \sum_{i=0}^n (\sigma \times \text{id}) \circ T_{(s_0,0),(s_1,0),\dots,(s_{i-1},0),(s_i,1),(s_{i+1},1),\dots,(s_n,1)} \\ &\quad - \sum_{i=0}^n (\sigma \times \text{id}) \circ T_{(s_0,0),(s_1,0),\dots,(s_i,0),(s_{i+1},1),(s_{i+1},1),\dots,(s_n,1)}. \end{aligned}$$

Les termes se simplifiant deux à deux, il ne reste que

$$\begin{aligned} \partial \circ K_n(\sigma) + K_n \circ \partial(\sigma) &= (\sigma \times \text{id}) \circ T_{(s_0,1),(s_1,1),\dots,(s_n,1)} - (\sigma \times \text{id}) \circ T_{(s_0,0),(s_1,0),\dots,(s_n,0)} \\ &= (i'_* - i_*)(\sigma) \end{aligned}$$

en faisant un calcul direct pour la dernière égalité. Ceci termine la démonstration. \square

Remarque 4.1.15. La preuve de cette proposition est symptomatique des techniques de preuve en homologie singulière. On démontre la propriété que l'on veut pour $X = \Delta^i$ un simplexe standard et pour le simplexe identité et on l'étend à tous les espaces topologiques en utilisant qu'un simplexe quelconque de X s'en déduit par functorialité. Plus précisément, si $\sigma : \Delta^i \rightarrow X \in C_i(X)$ est un simplexe singulier, alors on a que $\sigma = \sigma_*(\text{id}_{\Delta^i})$ où $\text{id}_{\Delta^i} : \Delta^i \rightarrow \Delta^i \in C_i(\Delta^i)$.

Corollaire 4.1.16. *Quel que soit R un anneau commutatif unitaire,*

- *si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie, alors $f_* : (C_*(X, R), \partial) \rightarrow (C_*(Y, R), \partial)$ est un quasi-isomorphisme : $\forall i \in \mathbb{N}, H_i(f) : H_i(X, R) \rightarrow H_i(Y, R)$ est un isomorphisme.*
- *En particulier, si X est un espace topologique contractile, alors*

$$H_i(X, R) = \begin{cases} R & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que la deuxième partie de ce corollaire établit la moitié du calcul des groupes d'homologie donné dans la proposition 1.1.7.

Démonstration. Pour la première, cela découle du fait que si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie, alors il existe $g : Y \rightarrow X$ tel que $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ et $g \circ f \simeq \text{id}_X$. La proposition 4.1.14 et la proposition 4.1.13 implique donc que pour tout entier i ,

$$H_i(f) \circ H_i(g) = H_i(f \circ g) = H_i(\text{id}_Y) = \text{id}_{H_i(Y)}$$

On a de même que $H_i(g) \circ H_i(f) = \text{id}_{H_i(X)}$ et ainsi $H_i(f)$ est un isomorphisme (d'inverse $H_i(g)$).

La deuxième partie suit du fait qu'un espace contractile est homotope à un point et du calcul de l'homologie d'un point 4.1.8. \square

D'après la définition 2.2.8, la proposition 4.1.13 et la proposition 4.1.14 on obtient :

Corollaire 4.1.17. *Pour tout i , le i -ième groupe d'homologie $H_i(-) : \mathbf{Top} \rightarrow R\text{-Mod}$ est un invariant homotopique.*

Remarque 4.1.18. Les chaînes singulières de l'espace topologique sont un invariant plus fin et fort que leurs groupes d'homologie. Ces derniers sont cependant utiles car ils sont plus faciles à calculer et manipuler et à distinguer que deux complexes de chaînes à quasi-isomorphisme près.

Il y a une relation entre H_1 et un autre invariant homotopique que nous avons introduit : le groupe fondamental. Nous avons vu que tout chemin continu $f : [0, 1] \rightarrow X$ donne un élément de $C_1(X)$ qui, lorsque f est un lacet ($f(0) = f(1)$) est un cycle ; notons $h(f) \in H_1(X)$ la classe d'homologie correspondant à ce lacet. D'après l'exercice 4.1.7, deux lacets homotopes donnent des cycles homologues (ce qui découle aussi de la proposition 4.1.14), ainsi si $f \simeq g$, alors $h(f) = h(g) \in H_1(X)$. En particulier, pour tout point base x_0 , si $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ est une classe, la classe d'homologie $h(f) \in H_1(X)$ est la même pour tout lacet f tel que $[f] = \alpha$. Ainsi l'application qui à un lacet f associe $h(f)$ passe au quotient par la relation d'homotopie pour donner une application $h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$. On note $\pi_1(X, x_0)^{ab}$ l'abélianisé du groupe fondamental (c'est-à-dire le quotient de $\pi_1(X, x_0)$ par le sous-groupe normal engendré par les commutateurs).

Proposition 4.1.19 (Hurewicz - Poincaré). *L'application $h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ est un morphisme de groupes qui se factorise au travers $\pi_1(X, x_0)^{ab}$.*

Si de plus X est connexe par arcs, le morphisme de groupes induit $h : \pi_1(X, x_0)^{ab} \rightarrow H_1(X)$ est un isomorphisme.

Le morphisme h est en général appelé **morphisme d'Hurewicz**. La proposition donne un moyen concret de calculer le premier groupe fondamental dans certains cas.

Exercice 4.1.20. Démontrer la proposition 4.1.19.

4.2. TECHNIQUES DE CALCUL DE L'HOMOLOGIE SINGULIÈRE

Nous allons maintenant énoncer des résultats généraux pour calculer l'homologie singulière. Contrairement au cas des complexes simpliciaux, le complexe des chaînes singulières est toujours très gros et donc peu adapté à des calculs directs. Il a en revanche d'excellentes propriétés dérivées de sa fonctorialité qui permettent des calculs au moyen de longues suites exactes (comme dans la partie 5.4) et de son invariance homotopique notamment. En pratique, on utilise souvent ces techniques pour se ramener à des espaces topologiques simples dont on connaît ou peut calculer l'homologie en utilisant des modèles simpliciaux/triangulations simples. Nous allons donc dans les parties qui suivent utiliser les suites exactes courtes de complexes de chaînes et leurs suites exactes longues associées en homologie pour lesquelles on renvoie à la partie 5.4.

4.2.1. Homologie relative et théorème d'écrasement. Nous allons considérer tout d'abord le cas de l'homologie d'un quotient X/A lorsque A est un « bon » sous-espace de X (le terme bon sera précisé dans le théorème 4.2.11 ci-dessous). Pour cela nous allons relier l'homologie de ce quotient à celle de X et de A au moyen d'une suite exacte qui a du sens même pour les mauvais quotients et est donnée par ce qu'on appelle l'homologie relative d'une paire.

Définition 4.2.1. Une *paire* (d'espaces topologiques) est un couple (X, A) où A est un sous-espace de X . Un morphisme de paires $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ est simplement une application continue $f : X \rightarrow Y$ telle que $f(A) \subset B$.

Dans la pratique on identifiera la restriction $f|_A$ de f à A avec l'application continue $A \rightarrow B$ sous-jacente, c'est-à-dire qu'on verra un morphisme de paires comme la donnée d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

- Exemples 4.2.2.*
- (1) Une paire importante pour nous sera la paire (D^n, S^{n-1}) constitué d'une boule euclidienne et de son bord.
 - (2) Si $x \in X$, alors on peut considérer la paire $(X, \{x\})$.
 - (3) On peut aussi considérer l'exemple "opposé" au précédent : la paire $(X, X \setminus \{x\})$.
 - (4) On peut toujours aussi considérer la paire (X, \emptyset) qui permet de plonger la catégorie des espaces topologiques dans celle des paires.

L'inclusion $i : A \hookrightarrow X$ donne (par fonctorialité du complexe des chaînes singulières) un morphisme de complexe de chaînes $i_* : C_*(A) \rightarrow C_*(X)$ qui est une injection en tout degré n (car i_n envoie la base des n -simplexes singuliers de A sur une famille libre). Il suit (voir Lemme 5.4.2) que les quotients

$$C_i(X, A) = C_i(X)/C_i(A)$$

muni de la différentielle induite par l'opérateur de bord de $C_*(X)$ forment encore un complexe de chaîne et qu'on a ainsi obtenu une suite exacte courte

$$0 \rightarrow C_*(A) \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(X, A) \rightarrow 0.$$

de complexes de chaînes.

Définition 4.2.3 (Chaînes relatives et groupes d'homologie relative). Le complexe $C_*(X, A)$ est appelé le **complexe de chaînes relatives** de (X, A) .

Les *groupes d'homologie relative* d'une paire (X, A) sont les groupes d'homologie du complexe de chaînes relatives $C_*(X, A)$; on note $H_i(X, A)$ le i -ième groupe d'homologie relative.

Exercice 4.2.4. Démontrer que le morphisme canonique $C_*(X) \rightarrow C_*(X, \emptyset)$ est un isomorphisme de complexes de chaînes.

Soit $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ un morphisme entre paires. Alors on a un diagramme, dont le carré de gauche est commutatif, de complexes de chaînes

$$(6) \quad \begin{array}{ccccc} C_*(A) & \hookrightarrow & C_*(X) & \twoheadrightarrow & C_*(X, A) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ C_*(B) & \hookrightarrow & C_*(Y) & \twoheadrightarrow & C_*(Y, B) \end{array}$$

d'où on déduit l'existence (par simple passage au quotient degré par degré) du morphisme de complexes de chaînes en pointillé rendant *tout* le diagramme commutatif. On notera encore $f_* : C_\bullet(X, A) \rightarrow C_\bullet(Y, B)$ le morphisme obtenu au niveau des complexes de chaînes et $H_*(f)$ celui induit entre les groupes d'homologie relative.

Le résultat suivant relie l'homologie relative à celle de X et A et prouve son invariance homotopique.

Théorème 4.2.5 (Suite exacte longue d'homologie relative). *Pour toute paire (X, A) , il existe, pour tout i dans \mathbb{N} , un morphisme*

$$\delta : H_i(X, A) \rightarrow H_{i-1}(A)$$

tel que la suite infinie

$$(7) \quad \dots \rightarrow H_i(A) \rightarrow H_i(X) \rightarrow H_i(X, A) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(A) \rightarrow \dots \rightarrow H_0(A) \rightarrow H_0(X) \rightarrow 0$$

soit exacte. Pour tout morphisme de paires $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, le diagramme induit entre suite exactes longues

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \longrightarrow & H_i(A) & \longrightarrow & H_i(X) & \longrightarrow & H_i(X, A) & \longrightarrow & H_{i-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & H_i(f) \downarrow & & H_i(f) \downarrow & & H_i(f) \downarrow & & H_i(f) \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_i(B) & \longrightarrow & H_i(Y) & \longrightarrow & H_i(Y, B) & \longrightarrow & H_{i-1}(B) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

est commutatif.

Si $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est un morphisme de paires tel que $f : X \rightarrow Y$ et l'application induite $f|_A : A \rightarrow B$ soient des équivalences d'homotopies, alors $f_* : C_i(X, A) \rightarrow C_i(X, B)$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. On applique le lemme 5.4.3 à la suite exacte courte de complexes $0 \rightarrow C_*(A) \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(X, A) \rightarrow 0$.

Enfin si $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est un morphisme de paires tel que $f : X \rightarrow Y$ et l'application induite $f|_A : A \rightarrow B$ soient des équivalences d'homotopies, alors les deux premières flèches verticales du diagramme (6) sont des quasi-isomorphismes en vertu du corollaire 4.1.17. Il suit du lemme fondamental 5.4.4 que la troisième aussi. \square

Remarque 4.2.6. Noter que toutes les applications $H_i(A) \rightarrow H_i(X)$ et $H_i(X) \rightarrow H_i(X, A)$ sont les applications naturelles, induites par les morphismes de complexes $C_i(A) \rightarrow C_i(X)$ et $C_i(X) \rightarrow C_i(X, A)$. On prendra toutefois garde au fait qu'une inclusion de complexes n'induit pas nécessairement une application injective en homologie : l'image d'un cycle non homologue à 0 dans le petit complexe peut être homologue à 0 dans le grand.

On peut reformuler le théorème comme énonçant que l'homologie relative est un invariant homotopique de la catégorie des paires d'espaces topologiques dans les groupes abéliens.

Pour tout espace topologique X , nous avons une unique application continue $X \rightarrow \{*\}$ vers le point. Cette application induit en tout degré un morphisme de R -modules $H_i(X, R) \rightarrow H_i(\{*\}, R)$.

Définition 4.2.7 (Homologie réduite). Soit X un espace topologique non-vide⁵⁰. Les groupes $\ker(H_i(X, R) \rightarrow H_i(\{*\}, R))$ sont appelés *groupes d'homologie réduite*; on les note $\tilde{H}_i(X)$.

Puisque l'homologie d'un point est triviale, sauf en degré 0, on a des isomorphismes canoniques

$$(8) \quad \tilde{H}_i(X) \cong H_i(X) \text{ pour tout } i > 0.$$

On a de plus que $\tilde{H}_0(X)$ diffère de $H_0(X)$ par un facteur \mathbb{Z} : en degré 0, si X est non-vide, on a $H_0(X) = \mathbb{Z}^d$ et $\tilde{H}_0(X) = \mathbb{Z}^{d-1}$, où d est le nombre de composantes connexes par arcs de X . On en déduit immédiatement que

Exemple 4.2.8. si X est contractile, alors $\tilde{H}_i(X) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Autrement dit l'homologie réduite des espaces contractiles est triviale.

Le fait de voir les espaces contractiles comme n'ayant aucune homologie réduite est un des attraits de l'homologie réduite qui simplifie parfois les notations.

Il est immédiat par définition et le corollaire 4.1.17 que l'homologie réduite est un invariant homotopique.

Exercice 4.2.9. Démontrer que l'homologie réduite est l'homologie du complexe de chaînes $\ker(C_*(X) \rightarrow C_*(\{*\}))$.

Si X est non-vide, pour tout choix d'un point base x dans X , on peut identifier homologie réduite et homologie relative à $\{x\}$.

Lemme 4.2.10. On a des isomorphismes

$$H_i(X, \{x\}) \cong \tilde{H}_i(X)$$

qui sont des équivalences naturelles de foncteurs $\mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Démonstration. Les isomorphismes découle de l'existence de la suite exacte longue d'homologie de la paire $(X, \{x\})$ et de l'exemple 4.1.8. Si $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ est pointée, alors elle envoie x sur y et la naturalité de la longue suite exacte assure que l'on a un diagramme commutatif $H_i(X, \{x\}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_i(X)$ ce qui traduit exactement le fait que

$$\begin{array}{ccc} H_i(X, \{x\}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_i(X) \\ \downarrow H_i(f) & & \downarrow H_i(f) \\ H_i(Y, \{y\}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_i(Y) \end{array}$$

l'isomorphisme est naturel. □

Le théorème suivant fait le lien entre l'homologie relative et l'homologie « absolue » du quotient X/A . Sa démonstration sera donné ultérieurement dans le paragraphe 4.2.3.

Théorème 4.2.11 (Théorème d'écrasement : homologie d'un bon quotient). Soit A un fermé (non-vide) de X , rétract par déformation d'un voisinage ouvert. L'application quotient $\pi : X \rightarrow X/A$ induit un quasi-isomorphisme naturel $\pi_* : C_i(X, A) \xrightarrow{\sim} C_i(X/A, \{A\})$.

⁵⁰. La définition que nous donnons s'étend à $X = \emptyset$. En revanche le lemme 4.2.10 n'a plus de sens dans ce cas et par ailleurs, selon le contexte les auteurs préfèrent définir l'homologie réduite de \emptyset différemment et la considérer comme nulle partout sauf en degré -1 . Ce dernier choix, étrange de prime abord, peut se justifier pour différentes raisons, l'une d'entre elle étant de rendre la suite exacte du théorème 4.2.11 encore valide dans ce cas si on fait ce choix.

En particulier

$$H_i(X, A) \cong H_i(X/A, \{A\}) = \tilde{H}_i(X/A),$$

où $\{A\}$ est le sous-ensemble de X/A qui est un singleton constitué du point qui correspond au sous-espace $A \subset X$.

Sous ces hypothèses, la suite exacte longue d'homologie devient :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \tilde{H}_i(A) \rightarrow \tilde{H}_i(X) \rightarrow \tilde{H}_i(X/A) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{i-1}(A) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(X) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \tilde{H}_0(X/A) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Le premier isomorphisme dans le théorème est donné (par functorialité) par l'application quotient $X \rightarrow X/A$.

Remarque 4.2.12. Le théorème reste valide avec n'importe quel anneau de coefficient à la place de \mathbb{Z} .

Nous pouvons en déduire la dernière partie manquante de la proposition 1.1.7 :

Corollaire 4.2.13. *Pour tout anneau de coefficient R , on a :*

$$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n, R) = R \quad \text{et} \quad \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n, R) = 0 \quad \text{pour } i \neq n.$$

Démonstration. Considérons la paire $(X, A) = (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ de sorte que $X/A = \mathbb{S}^n$. Les termes $\tilde{H}_i(X) = \tilde{H}_i(\mathbb{D}^n)$ de la suite exacte longue d'homologie associée à la paire (X, A) sont tous triviaux puisque \mathbb{D}^n est contractile. L'exactitude de la suite implique donc que les morphismes $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n, R) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}, R)$ sont des isomorphismes pour $i > 0$ et que $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^n, R) = 0$. On conclut par récurrence sur n à partir du cas $n = 0$ qui découle de la proposition 4.1.10. \square

Homologie d'un bouquet d'espaces topologiques. Soient $(X_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in I}$ un ensemble d'espaces topologiques pointés. Le *bouquet* des espaces X_α est le recollement de ces espaces sur leurs points de base, c'est-à-dire l'espace quotient

$$\bigvee_{\alpha \in I} (X_\alpha, x_\alpha) = \left(\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \right) / \{x_\alpha, \alpha \in I\}.$$

Proposition 4.2.14. *On suppose que chaque point x_α est rétract par déformation (forte) d'un ouvert de X_α ⁵¹.*

Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $\tilde{H}_i(\bigvee_{\alpha} X_\alpha) = \bigoplus_{\alpha} \tilde{H}_i(X_\alpha)$.

Démonstration. Posons $X = \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ et $A = \{x_\alpha, \alpha \in I\}$. D'un côté, on a

$$H_i(X, A) = \bigoplus_{\alpha} H_i(X_\alpha, \{x_\alpha\}) = \bigoplus_{\alpha} \tilde{H}_i(X_\alpha).$$

D'un autre côté la paire (X, A) vérifie les hypothèses du théorème 4.2.11 et on a

$$H_i(X, A) = H_i(X/A, \{A\}) = \tilde{H}_i(X/A) = \tilde{H}_i\left(\bigvee_{\alpha} X_\alpha\right).$$

\square

51. on appelle souvent un tel espace (X_α, x_α) un espace *bien pointé*

Homologie des suspensions. Rappelons que la *suspension* 2.3.28 d'un espace topologique A est l'espace quotient $\Sigma A = (A \times [0, 1]) / (A \times \{0\}) / (A \times \{1\}) = CA/A$ où $CA = A \times [0, 1] / (A \times \{1\})$ est le cône de A . Voir la figure 11.

Proposition 4.2.15. *On a, pour tout $i \geq 0$, des isomorphismes naturels⁵² $\tilde{H}_i(\Sigma A) \cong \tilde{H}_{i-1}(A)$.*

Pour $i = 0$, on retrouve juste le fait que la suspension d'un espace est toujours connexe par arcs.

Démonstration. Le sous-espace $A \cong A \times \{1\} \subset CA$ est un rétract par déformation d'un voisinage ouvert (par exemple $A \times]3/4, 1[$). Considérons alors la suite exacte longue associée à la paire (CA, A) par le théorème 4.2.11 :

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_i(CA) \rightarrow \tilde{H}_i(CA/A) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(A) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(CA) \rightarrow \dots$$

Pour tout i , $\tilde{H}_i(CA) = 0$ puisque CA est contractile. Ainsi $\tilde{H}_i(CA/A) \cong \tilde{H}_{i-1}(A)$. \square

Remarque 4.2.16. Dans toutes les définitions et résultats ci-dessus sur l'homologie relative, on peut se placer aussi se placer dans la catégorie des complexes simpliciaux ou des espaces polyédraux. La seule difficulté est lorsqu'on utilise le lemme 4.2.10 que l'on doit évidemment supposer que x est un sommet du complexe simplicial. Selon les cas la théorie homologique considérée est donc l'homologie simpliciale ou l'homologie singulière.

4.2.2. Homologie des recouvrements : théorèmes de Mayer-Vietoris et des petites chaînes. On va maintenant donner des outils pour déterminer l'homologie d'un espace à partir de l'homologie d'ouverts le recouvrant.

Soient X un espace topologique et $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on considère le sous-complexe $C_\bullet(X^{\{U_\alpha\}})$ de $C_\bullet(X)$ engendré par les simplexes singuliers d'image contenue dans l'un des U_α :

Définition 4.2.17. Pour tout anneau commutatif unitaire R et $i \in \mathbb{N}$, on note $C_i(X^{\{U_\alpha\}}, R)$ le sous- R -module de $C_i(X, R)$ donné par les combinaisons linéaires (finies) de simplexes singuliers $\sigma : \Delta^i \rightarrow X$ tels qu'il existe un $\alpha \in I$ vérifiant que $\sigma(\Delta^i) \subset U_\alpha$.

Lemme 4.2.18. *La différentielle $\partial : C_*(X, R) \rightarrow C_{*-1}(X, R)$ laisse $C_\bullet(X^{\{U_\alpha\}})$ stable de sorte que $(C_\bullet(X^{\{U_\alpha\}}), \partial)$ est un sous-complexe de chaînes de $C_*(X)$.*

Démonstration. Si $\sigma(\Delta^i) \subset U_\alpha$, alors les restrictions $\partial_k \sigma$ sont aussi d'image incluses dans U_α . \square

Terminologie : on appellera $(C_\bullet(X^{\{U_\alpha\}}), \partial)$ le complexe des petites chaîne singulières associées au recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de X .

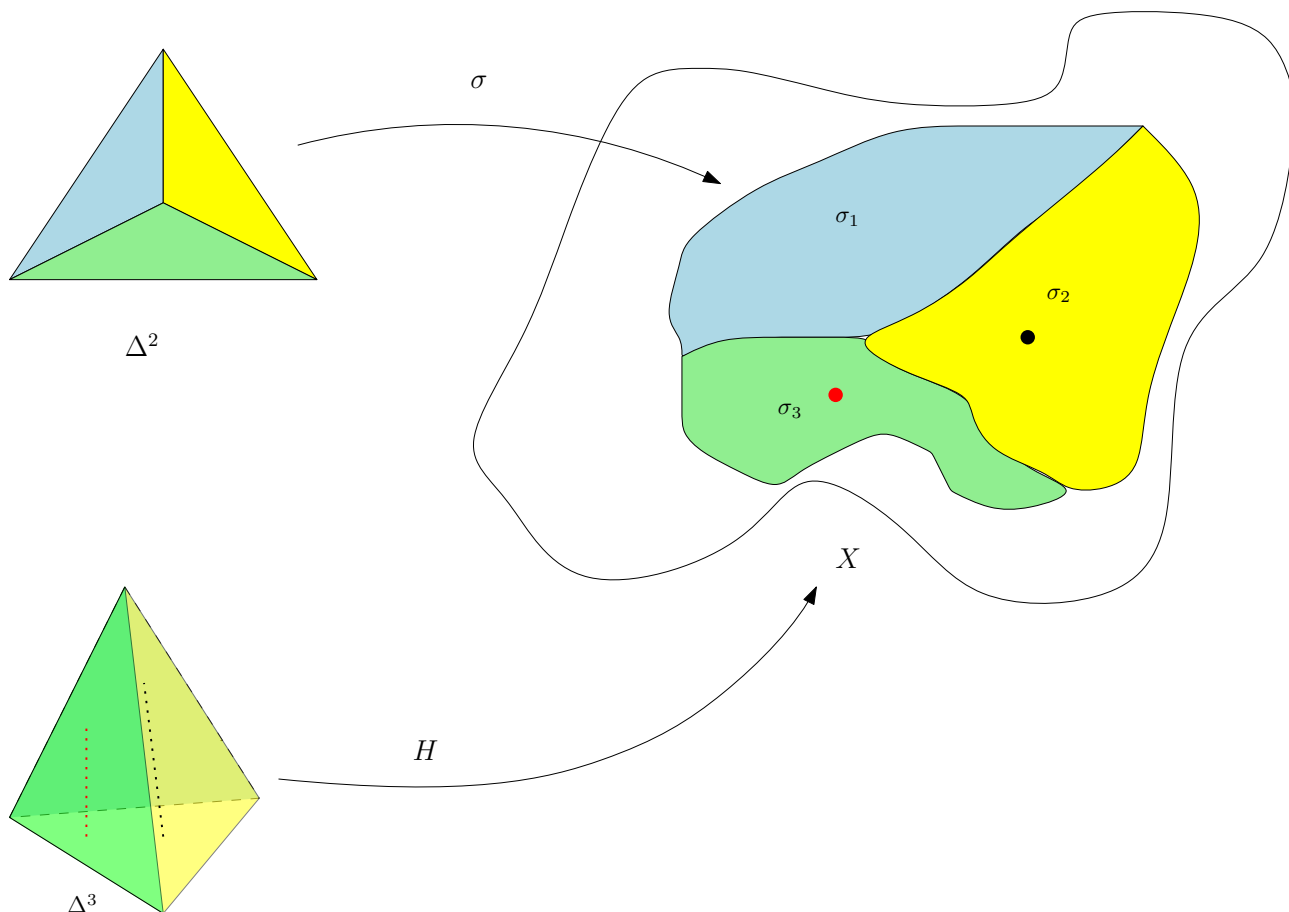
Théorème 4.2.19. *L'inclusion*

$$C_\bullet(X^{\{U_\alpha\}}) \rightarrow C_\bullet(X)$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. Idée générale de la preuve : l'idée est en fait assez simple. Si $\sigma : \Delta^i \rightarrow X$ est un simplexe singulier, et qu'on triangule σ , alors, géométriquement, σ est la même chose que la réunion des simplexes singuliers obtenus en prenant chaque simplexe de la triangulation, cf la figure (17). La somme de ces chaînes singulières doit donc être "équivalente" à σ . Elles ne sont évidemment pas égales dans $C_*(X)$, mais elles sont en fait homotopes au sens des complexes de chaînes (et donc équivalentes en homologie).

^{52.} autrement dit, ils commutent avec les morphismes induits en homologie par toute application continue $X \rightarrow Y$. C'est à dire qu'ils établissent une équivalence naturelle entre les foncteurs $H_i(-) \circ \Sigma$ et $H_{i-1}(-)$ de **Top** vers **Ab**



$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \partial H$$

FIGURE 17. Un simplexe singulier $\sigma : \Delta^2 \rightarrow X$ et ses restrictions à trois faces donnant lieu à $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ dont l'image est représentée respectivement en bleu, jaune et vert. Au dessous un 3-simplexe singulier $H : \Delta^3 \rightarrow X$ dont la valeur sur la face du bas est σ , sur chaque face colorée celle du σ_i correspondant et est constante sur toute ligne verticale issue de la base (la face non-colorée). La valeur constante de H sur la ligne pointillée rouge et celle sur la noire sont représentées par un point de couleur correspondante dans X . Le bord de H est égale à $\sigma - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$.

Ceci remarqué, alors l'idée est que pour tout simplexe singulier, quitte à le subdiviser en petits triangles, on peut supposer que chaque triangle vit dans un seul U_α . L'argument clé derrière cela étant la compacité de Δ^i et obtenir ainsi que σ est (équivalent à) une somme de petites chaînes.

Transformons maintenant l'idée précédente (qui est à retenir !) en une preuve détaillée.

Le premier point consiste donc à transformer une i -chaîne en une somme de plus petites chaînes par subdivisions (que l'on prend barycentrique pour simplifier) des i -simplexes standards. Afin de ne pas avoir à choisir des subdivisions adaptées à chaque fois, nous construisons un opérateur Sd réalisant la subdivision barycentrique une bonne fois pour toutes. Et qui sera universellement défini pour tout simplexe singulier.

Notons s_0, \dots, s_i les sommets du i -simplexe standard Δ^i . Étant donné $i + 1$ points x_0, \dots, x_i d'un espace euclidien \mathbb{R}^n , notons T_{x_0, \dots, x_i} l'unique application affine de Δ^i dans

\mathbb{R}^n qui envoie s_k sur x_k pour $0 \leq k \leq p$ (tout comme dans la preuve de la proposition 4.1.14). Si S est un sous-ensemble de $\{0, 1, \dots, i\}$ notons enfin b_S le barycentre des points $\{s_k \mid k \in S\}$.

Soit α un élément du groupe symétrique \mathfrak{S}_{i+1} des transformations de $\{0, 1, \dots, i\}$. On lui associe le i -simplexe singulier $\beta_\alpha : \Delta^i \rightarrow \Delta^i$ à valeur dans le i -simplexe standard⁵³ défini par

$$\beta_\alpha = T_{b_{\{\alpha(0)\}}, b_{\{\alpha(0), \alpha(1)\}}, \dots, b_{\{\alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(i)\}}}.$$

Posons alors, pour tout i -simplexe singulier σ ,

$$(9) \quad \text{Sd}(\sigma) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_{i+1}} \text{sgn}(\alpha) \sigma \circ \beta_\alpha$$

où $\text{sgn}(\sigma)$ est la signature de la permutation σ . En prolongeant par linéarité, on obtient des endomorphismes linéaires $\text{Sd} : C_i(X) \rightarrow C_i(X)$ pour tout entier i .

Lemme 4.2.20. *La collection des endomorphismes Sd ⁵⁴ est un morphisme de complexes de chaînes $\text{Sd} : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X)$.*

Démonstration du lemme 4.2.20. L'idée de la preuve est que les faces internes à un simplexe de la subdivision se compense deux à deux quand on prend la différentielle et qu'il ne reste que celles du bord. On encourage le lecteur à faire un dessin en dimension 1 et en dimension 2 pour vérifier cela et comprendre la preuve donnée ci-dessous et les notations qu'elle contient. Notons $(-1)^\sigma = \text{sgn}(\sigma)$. On a

$$(10) \quad \begin{aligned} \partial \text{Sd}(\sigma) &= \sum_{k=0}^i \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_{i+1}} (-1)^{\alpha+k} \sigma \circ \beta_\alpha \circ \partial_k \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_{i+1}} (-1)^{\alpha+k} \sigma \circ T_{b_{\{\alpha(0)\}}, b_{\{\alpha(0), \alpha(1)\}}, \dots, b_{\{\alpha(0), \dots, \alpha(k-1)\}}, b_{\{\alpha(0), \dots, \alpha(k), \alpha(k+1)\}}, \dots, b_{\{\alpha(0), \dots, \alpha(i)\}}} \\ &\quad + \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_{i+1}} (-1)^{\alpha+i} \sigma \circ T_{b_{\{\alpha(0)\}}, b_{\{\alpha(0), \alpha(1)\}}, \dots, b_{\{\alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(i-1)\}}} \end{aligned}$$

Comme $(-1)^{\tau_{\alpha(k), \alpha(k+1)} \circ \alpha} = -(-1)^\alpha$, les termes de la deuxième ligne de (10) se simplifient deux à deux.

Par ailleurs, notons que pour tout $k = 0 \dots i$ et $\beta \in \mathfrak{S}_i$, on a une bijection $\beta^{(k)} \in \mathfrak{S}_{i+1}$ définie par $\beta^{(k)}(j) = \alpha(j)$ si $j < k$, $\beta^{(k)}(k) = i$ et $\beta^{(k)}(j) = \beta(j-1)$ pour $j > k$. On observe alors (en évaluant ces applications affines sur leurs sommets) que

$$(11) \quad \begin{aligned} \partial_k \circ T_{b_{\{\beta(0)\}}, b_{\{\beta(0), \beta(1)\}}, \dots, b_{\{\beta(0), \beta(1), \dots, \beta(i-1)\}}} \\ = T_{b_{\{\beta^{(k)}(0)\}}, b_{\{\beta^{(k)}(0), \beta^{(k)}(1)\}}, \dots, b_{\{\beta^{(k)}(0), \beta^{(k)}(1), \dots, \beta^{(k)}(i-1)\}}} \end{aligned}$$

Comme d'une part $(-1)^{\beta^{(k)}} = (-1)^{\beta+i-k}$ et que d'autre part la collection des $\beta^{(k)}$ pour $\beta \in \mathfrak{S}_i$ et $k = 0 \dots i$ décrit exactement \mathfrak{S}_{i+1} , on déduit de (11) que la dernière ligne de (10) est égale à

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^i \sum_{\beta \in \mathfrak{S}_i} (-1)^{\beta+k} \sigma \circ T_{b_{\{\beta^{(k)}(0)\}}, b_{\{\beta^{(k)}(0), \beta^{(k)}(1)\}}, \dots, b_{\{\beta^{(k)}(0), \beta^{(k)}(1), \dots, \beta^{(k)}(i-1)\}}} \\ = \sum_{k=0}^i (-1)^k \sigma \circ \partial_k \circ \text{Sd} = \text{Sd}(\partial \sigma). \end{aligned}$$

□

53. dont on rappelle que c'est un sous-espace de \mathbb{R}^{i+1}

54. Sd est utilisé pour rappeler le mot subdivision

Rappelons que le *point clé* est que l'opérateur de subdivision que nous avons défini est juste un découpage des simplexes en plus petit simplexe : géométriquement, on s'attend donc à ce que ce soit l'identité du point de vue de l'homologie (comme nous l'avons énoncé précédemment). L'énoncé exact, et plus fort, est le suivant.

Lemme 4.2.21. *Les morphismes de complexes id et Sd sont homotopes.*

Démonstration du lemme 4.2.21. Il s'agit de construire des morphismes $K_i : C_i(X) \rightarrow C_{i+1}(X)$ tels que

$$(12) \quad \partial \circ K_i + K_{i-1} \circ \partial = \text{id} - \text{Sd}.$$

et ceci pour tout espace X . L'idée va, comme dans la proposition 4.1.14, être de définir K sur le simplexe standard et de l'étendre par functorialité.

On procède par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$.

Comme Sd est égale à l'identité en degré 0, on peut prendre $K_0 = 0 (= K_{-1})$.

Supposons donc construits K_0, \dots, K_{i-1} (vérifiant (12)) pour tout espace topologique X . Par abus de langage on voit Δ^i comme le i -simplexe singulier id_{Δ^i} de Δ^i . Par hypothèse de récurrence appliquée à la $(i-1)$ -chaîne singulière $\partial\Delta^i$ (et car $\partial^2 = 0$), on a

$$\partial\Delta^i - \text{Sd}(\partial\Delta^i) = \partial \circ K_{i-1}(\partial\Delta^i)$$

et donc

$$\partial(\Delta^i - \text{Sd}(\Delta^i) - K_{i-1}(\partial\Delta^i)) = 0.$$

Comme Δ^i est contractile, il existe alors (en vertu du corollaire 4.1.17) une $(i+1)$ -chaîne singulière $\sigma_{i+1} \in C_{i+1}(\Delta^i)$ telle que

$$(13) \quad \Delta^i - \text{Sd}(\Delta^i) - K_{i-1}(\partial\Delta^i) = \partial\sigma_{i+1}.$$

Soit maintenant un i -simplexe singulier $\sigma : \Delta^i \rightarrow X$ de X . Posons $K_i(\sigma) = \sigma_*(\sigma_{i+1}) \in C_{i+1}(X)$ (autrement dit, si $\sigma_{i+1} = \sum \lambda_j \tau_j$, avec $\tau_j : \Delta^{i+1} \rightarrow \Delta^i$, on a $K_i(\sigma) = \sum \tau_j \sigma \circ \tau_j$). En prolongeant par linéarité on obtient un morphisme de modules $K_i : C_i(X) \rightarrow C_{i+1}(X)$ qui, d'après (13), vérifie la relation (12). \square

Remarque 4.2.22. Nous avons en fait prouvé que Sd et id sont naturellement⁵⁵ homotopes. C'est-à-dire que l'on a trouvé une homotopie K qui vérifie que si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} C_*(X) & \xrightarrow{K} & C_{*+1}(X) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ C_*(Y) & \xrightarrow{K} & C_{*+1}(Y) \end{array}$$

est commutatif (ceci découle immédiatement du fait qu'on a défini les $K_i(\sigma)$ comme étant $\sigma_*(\sigma_{i+1})$). En particulier si $x \in C_\bullet(X^{\{U_\alpha\}})$, alors $K(x) \in C_{\bullet+1}(X^{\{U_\alpha\}})$ et donc x et $\text{Sd}(x)$ sont déjà homotopes dans le complexe des petites chaînes.

Il reste maintenant à montrer que, si on subdivise suffisamment de fois, toute chaîne singulière obtenue est une petite chaîne, c'est-à-dire une chaîne composée d'éléments dont les images sont incluses dans un U_α .

Lemme 4.2.23. *Pour tout $\sigma \in C_i(X)$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Sd}^r(\sigma) \in C_i(X^{\{U_\alpha\}})$.*

Démonstration du lemme 4.2.23. Par linéarité on peut supposer que σ est un i -simplexe singulier. Les ouverts $V_\alpha = \sigma^{-1}(U_\alpha)$ forment un recouvrement de l'espace compact Δ^i . Il

⁵⁵. au sens des transformations naturelles

existe donc $\varepsilon > 0$ tel que si $A \subset \Delta^i$ vérifie $\text{diam}(A) \leq \varepsilon$, alors il existe un α tel que $A \subset V_\alpha$. Le lemme découle donc du fait que

$$\text{diamSd}^r(\Delta^i) \leq \left(\frac{i}{i+1}\right)^r \text{diam}(\Delta^i).$$

□

On peut maintenant terminer la démonstration du théorème 4.2.19. Si z est un cycle singulier de X , pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\text{Sd}^r(z)$ est aussi un cycle singulier (puisque Sd est un morphisme de complexes) et, en itérant le lemme 4.2.21, on montre même que $\text{Sd}^r(z)$ est homologue à z . Il découle donc du lemme 4.2.23 que l'application $H_\bullet(X^{\{U_\alpha\}}) \rightarrow H_\bullet(X)$ est surjective. Elle est aussi injective : si z est un cycle dans le sous-complexe $C_\bullet(X^{\{U_\alpha\}})$, tel que sa classe $[z] = 0 \in H_i(X)$, alors il existe $t \in C_{\bullet+1}(X)$ tel que $z = \partial t$. Il suit que $\text{Sd}^r(z) = \text{Sd}^r(\partial t) = \partial \text{Sd}^r(t)$, donc $\text{Sd}^r(z)$ est un bord et comme par ci-dessus z et $\text{Sd}^r(z)$ différent d'un bord (dans $C_\bullet(X^{\{U_\alpha\}})$ d'après la remarque 4.2.22), il suit que z aussi. □

Remarque 4.2.24. (1) le théorème des petites chaînes s'étend sans difficulté au cas relatif. En effet, pour $A \subset X$, on dispose aussi du complexe $C_\bullet(A^{\{A \cap U_\alpha\}})$ de petites chaînes relatives au recouvrement $\{A \cap U_\alpha\}$ de A . On a un diagramme commutatif de suite exacte courte de complexes :

$$\begin{array}{ccccc} C_\bullet(A^{\{A \cap U_\alpha\}}) & \hookrightarrow & C_\bullet(X^{\{U_\alpha\}}) & \twoheadrightarrow & C_\bullet(X^{\{U_\alpha\}}, A^{\{A \cap U_\alpha\}}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_\bullet(A) & \hookrightarrow & C_\bullet(X) & \twoheadrightarrow & C_\bullet(X, A) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les inclusions naturelles. Les deux flèches verticales les plus à gauche sont des quasi-isomorphismes par le théorème des petites chaînes ; donc la troisième flèche $C_\bullet(X^{\{U_\alpha\}}, A^{\{A \cap U_\alpha\}}) \rightarrow C_\bullet(X, A)$ aussi par le lemme fondamental 5.4.4.

(2) Le théorème des petites chaînes reste vrai si on suppose que les U_α sont des sous-espaces quelconques dont les intérieurs $\overset{\circ}{U}_\alpha$ forment un recouvrement ouvert de X (la preuve étant inchangée).

Suite exacte de Mayer-Vietoris. Nous allons appliquer le théorème des petites chaînes au cas très important en pratique du recouvrement d'un espace par 2 ouverts.

Théorème 4.2.25. *Soient X un espace topologique et U, V deux ouverts de X recouvrant X . Il existe une suite exacte longue de modules, dite suite exacte de Mayer-Vietoris de X ,*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_i(U) \oplus H_i(V) &\xrightarrow{(1)} H_i(X) \xrightarrow{(2)} H_{i-1}(U \cap V) \\ &\dots \xrightarrow{(3)} H_{i-1}(U) \oplus H_{i-1}(V) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Démonstration. Commençons par expliciter les morphismes (1), (2) et (3).

(1) Les inclusions de U et V dans $X = U \cup V$ fournissent des morphismes de complexes $j_U : C_*(U) \rightarrow C_*(X)$ et $j_V : C_*(V) \rightarrow C_*(X)$ et ainsi un morphisme de complexes de chaînes $C_*(U) \oplus C_*(V) \rightarrow C_*(X)$ donné par $(x, y) \mapsto j_U(x) + j_V(y)$. Le morphisme (1) est induit par ce morphisme de complexes en passant à l'homologie. Autrement dit, si α et β sont des classes d'homologie dans U et V et α' et β' sont celles correspondant à leur image dans l'homologie de X , le morphisme (1) associe à $\alpha \oplus \beta$ la classe $\alpha' + \beta'$.

(3) L'inclusion de $U \cap V$ dans U , resp. V , induit une application $\iota_U : C_\bullet(U \cap V) \rightarrow C_\bullet(U)$, resp. $\iota_V : C_\bullet(U \cap V) \rightarrow C_\bullet(V)$ et donc des applications similaires en homologie. Le morphisme (3) est égal à $\iota_U \oplus (-\iota_V)$. Par définition des petites chaînes associées au recouvrement $\{U, V\}$, $j_U + j_V : C_*(U) \oplus C_*(V) \rightarrow C_*(X)$ a pour image le complexe des

petites chaînes $C_\bullet(X^{\{U,V\}})$. Le noyau de ce morphisme surjectif de complexe est exactement formé du complexe des chaînes singulières de l'intersection. Ainsi on a une suite exacte courte

$$C_\bullet(U \cap V) \rightarrow C_\bullet(U) \oplus C_\bullet(V) \rightarrow C_\bullet(X^{\{U,V\}})$$

de complexes de chaînes. Finalement, l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris découle

- de la propriété 2 pour 3 du lemme 5.4.4 appliquée à la suite exacte courte

$$C_\bullet(U \cap V) \rightarrow C_\bullet(U) \oplus C_\bullet(V) \rightarrow C_\bullet(X^{\{U,V\}})$$

et

- du théorème des petites chaînes appliqué au recouvrement $X = U \cup V$.

□

Remarque 4.2.26. On peut décrire le morphisme (3) du théorème directement comme suit. Il s'obtient en composant l'application naturelle

$$H_i(X) \rightarrow H_i(X, V) = H_i(U, U \cap V),$$

où la dernière égalité résulte du théorème des petites chaînes appliqué au recouvrement $X = U \cup V$, avec le morphisme « de bord »

$$\delta : H_i(U, U \cap V) \rightarrow H_{i-1}(U \cap V)$$

dans la suite exacte longue associée à la paire $(U, U \cap V)$ (cf 5.4.3).

Exercice 4.2.27. Démontrer le résultat énoncé dans la remarque précédente.

Exercice 4.2.28. Utiliser le théorème 4.2.25 pour retrouver l'homologie des sphères et des bouquets.

En dehors des résultats de calcul, la suite de Mayer-Vietoris a des applications conceptuelles. Donnons en un exemple avec la caractéristique d'Euler.

Définition 4.2.29 (Caractéristique d'Euler d'un espace topologique). Soit R un corps ou \mathbb{Z} . Soit X un espace topologique dont les groupes d'homologie $\bigoplus_{i \geq 0} H_i(X, R)$ sont de type fini. Le $i^{\text{ème}}$ -nombre de Betti de X à coefficient dans R est $b_i(X, R) = \text{rang } H_i(X, R)$.

La caractéristique d'Euler de X est $\chi(X, R) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i b_i(X, R)$.

Corollaire 4.2.30 (Additivité de la caractéristique d'Euler). Soient X un espace topologique et U, V deux ouverts de X recouvrant X . On suppose que les groupes d'homologie de U, V et $U \cap V$ sont de type fini. Alors ceux de X sont aussi de type fini et de plus

$$\chi(X, R) = \chi(U, R) + \chi(V, R) - \chi(U \cap V, R).$$

Démonstration. On fait la preuve pour $R = \mathbb{Z}$. Le cas général étant identique. Par la suite exacte de Mayer-Vietoris, les groupes d'homologie de X sont de type fini. Notons respectivement r_i, k_i le rang et la dimension du noyau de $H_i(X) \xrightarrow{(2)} H_{i-1}(U \cap V)$, r_i^\cup, k_i^\cup le rang et la dimension du noyau de $H_i(U) \oplus H_i(V) \xrightarrow{(1)} H_i(X)$. On a alors $b_i(X) = r_i + k_i$, $b_i(U) + b_i(V) = r_i^\cup + k_i^\cup$ et, comme la suite de Mayer-Vietoris est exacte, $b_i(U \cap V) = k_i^\cup + r_{i+1}$ et $r_i^\cup = k_i$. On obtient

$$\begin{aligned} \sum (-1)^i b_i(X) &= \sum (-1)^i (r_i + k_i) = \sum (-1)^i (r_i - k_i^\cup) + \sum (-1)^i (r_i^\cup + k_i^\cup) \\ &= - \sum (-1)^i (r_{i+1} + k_i^\cup) + \chi(U) + \chi(V) \\ &= -\chi(U \cap V) + \chi(U) + \chi(V). \end{aligned}$$

□

4.2.3. Excision et démonstration du théorème d'écrasement. Nous allons maintenant démontrer le théorème d'écrasement 4.2.11. Pour cela on va utiliser la formule d'excision qui permet de calculer l'homologie relative dans certains cas.

Formule d'excision. Si U est un fermé dans l'intérieur d'un fermé A , il est clair que les espaces quotients $(X \setminus U)/(A \setminus U)$ et X/A sont homéomorphes. Au vu du théorème 4.2.11, cela suggère que les homologies relatives des paires $(X \setminus U, A \setminus U)$ et (X, A) sont isomorphes, au moins dans de bons cas. Ce résultat est en fait vrai de manière générale grâce au théorème des petites chaînes.

Proposition 4.2.31 (Formule d'excision). *Soient $U \subset A \subset X$. Notons $j : (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ l'inclusion de paires. On suppose de plus que $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$. Alors le morphisme*

$$j_* : C_\bullet(X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow C_\bullet(X, A)$$

est un quasi-isomorphisme. En particulier, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme $j_ : H_i(X \setminus U, A \setminus U) \cong H_i(X, A)$.*

Démonstration. On applique le théorème des petites chaînes 4.2.19 au recouvrement $\mathcal{U} = (X \setminus U, A)$. Le résultat suit de l'identification de $C_\bullet(X^{\{\mathcal{U}\}}, A^{\{A \cap \mathcal{U}\}})$ avec le complexe de chaînes $C_\bullet(X \setminus U, A \setminus U)$. \square

Remarque 4.2.32. Un exemple important d'utilisation de la formule d'excision est le suivant, qui établit que l'homologie relative capture la topologie au voisinage d'un point. Considérons la paire $(X, X \setminus \{x\})$ associée à un espace X et un point $x \in X$ (cf 4.2.2.3). Soit alors U un voisinage ouvert de x dans X . Alors $X \setminus U \subset X \setminus \{x\} \subset X$ vérifie les hypothèses de la proposition 4.2.31 et on en déduit des isomorphismes :

$$H_i(U, U \setminus \{x\}) \cong H_i(X, X \setminus \{x\}).$$

Autrement dit l'homologie $H_*(X, X \setminus \{x\})$ (et même le complexe $C_*(X, X \setminus \{x\})$ à quasi-isomorphisme près) ne dépend que d'un voisinage ouvert de x dans X .

Corollaire 4.2.33. *Soit X un espace localement homéomorphe à \mathbb{R}^n ⁵⁶, par exemple $X = \mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $x \in X$, on a*

$$\tilde{H}_i(X, X \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z} \text{ si } i = n \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Exercice 4.2.34. Démontrer le corollaire 4.2.33.

Exercice 4.2.35. En utilisant la formule d'excision, démontrer l'énoncé général du théorème d'invariance du domaine 1.2.1.

On peut appliquer la formule d'excision pour prouver le théorème 4.2.11 comme suit.

Preuve du théorème 4.2.11. Soit (X, A) une paire telle que A est un fermé de X qui est un rétract par déformation (forte) d'un voisinage ouvert, dénoté V . Le triplet $A \subset V \subset X$ vérifie les hypothèses de la Proposition 4.2.31. De plus, l'inclusion de la paire (X, A) dans (X, V) est une équivalence d'homotopie et induit (car la rétraction par déformation est forte) une équivalence d'homotopie $A/A \rightarrow V/A$. On en déduit un diagramme commutatif dont les flèches horizontales sont des quasi-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc} C_\bullet(X, A) & \xrightarrow{\sim} & C_\bullet(X, V) & \xleftarrow{\sim} & C_\bullet(X \setminus A, V \setminus A) \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \downarrow \gamma \\ C_\bullet(X/A, A/A) & \xrightarrow{\sim} & C_\bullet(X/A, V/A) & \xleftarrow{\sim} & C_\bullet(X/A \setminus A/A, V/A \setminus A/A) \end{array} .$$

Les flèches verticales sont les flèches naturelles induites par les projections sur les espaces quotients. Le théorème 4.2.11 est équivalent au fait que α est un quasi-isomorphisme. Par

⁵⁶. c'est-à-dire une variété topologique

la commutativité du diagramme, il suffit pour cela que γ soit un quasi-isomorphisme. Mais par construction, l'application $X \setminus A \rightarrow (X/A \setminus A/A)$ est un homéomorphisme, et donc induit un quasi-isomorphisme au niveau des complexes de chaînes. \square

Remarque 4.2.36 (Homologie relative et Homologie du cône). Rappelons que le théorème d'écrasement 4.2.11 affirme que (sous certaines hypothèses) l'homologie relative $H_\bullet(X, A)$ est en fait isomorphe à l'homologie réduite de l'espace quotient X/A .

En fait, l'homologie réduite est *toujours* isomorphe à l'homologie réduite d'un autre espace : le cône $X \cup CA$ de l'inclusion $A \hookrightarrow X$. Rappelons que

$$CA = A \times [0, 1]/A \times \{1\}$$

est le cône sur A et que l'on identifie $A \times \{0\}$ avec A dans l'écriture $X \cup CA$. Comme le cône CA est contractile, la longue suite exacte en homologie associée à la paire $(X \cup CA, CA)$ assure que l'application canonique

$$\tilde{H}_i(X \cup CA) = H_i(X \cup CA, \{A \times \{1\}\}) \rightarrow H_i(X \cup CA, CA)$$

est un isomorphisme pour tout i .

De l'inclusion de paires $(X, A) \hookrightarrow (X \cup CA, CA)$ on déduit

Lemme 4.2.37. Le morphisme canonique

$$H_i(X, A) \rightarrow H_i(X \cup CA, CA) \cong \tilde{H}_i(X \cup CA)$$

est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Preuve du lemme 4.2.37. On applique le théorème des petites chaînes (dans le cas relatif) au recouvrement de $X \cup CA$ par les (deux) ouverts $CA \setminus A$ et $X \cup \{A \times [0, 1/2[$. On obtient que l'inclusion

$$C_*(X \cup \{A \times [0, 1/2[) + C_*(CA \setminus A, CA \setminus A) \rightarrow C_*(X \cup CA, CA)$$

est un quasi-isomorphisme. Par nullité de $C_*(CA \setminus A, CA \setminus A)$ on obtient donc

$$H_i(X \cup CA, CA) \cong H_i(X \cup \{A \times [0, 1/2[, \{A \times [0, 1/2[$$

On conclut alors la démonstration du lemme en remarquant que l'inclusion canonique de la paire (X, A) dans la paire $(X \cup \{A \times [0, 1/2[, \{A \times [0, 1/2[$) est une équivalence d'homotopie de paires. \square

Une application de ce lemme 4.2.37 est le raffinement suivant de l'invariance homotopique de l'homologie relative énoncée dans le théorème 4.2.5

Proposition 4.2.38. *Si $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ sont deux morphismes de paires tels que $f, g : X \rightarrow Y$ et les applications induites $f|_A, g|_B : A \rightarrow B$ soient homotopes, alors $H_i(f) = H_i(g) : H_i(X, A) \rightarrow H_i(Y, B)$ pour tout entier i .*

Démonstration. Notons que comme on a une application continue $f : X \rightarrow Y$ dont la restriction à A s'envoie dans B , on dispose d'une application continue canonique $C(f) : X \cup CA \rightarrow Y \cup CB$ et de même d'une application continue canonique $C(g) : X \cup CA \rightarrow Y \cup CB$. D'après un exercice vu en TD, on a que $C(f)$ et $C(g)$ sont homotopes. D'autre part le lemme 4.2.37 permet de se ramener à montrer que $C(f)_*, C(g)_* : X \cup CA \rightarrow Y \cup CB$ sont quasi-équivalentes. Puisque $C(f)$ et $C(g)$ sont homotopes, cela résulte de la proposition 4.1.14. \square

4.3. EQUIVALENCE DES THÉORIES HOMOLOGIQUES

Soit X un espace polyédral, par exemple un polyèdre $|K|$, et soit $T : |K| \rightarrow X$ une triangulation où K est donc un complexe simplicial. L'application T induit un morphisme de complexes $C_\bullet(K) \rightarrow C_{\bullet, \text{sing}}(X)$ défini comme suit. À un i -simplexe orienté $\kappa = \langle e_0, \dots, e_i \rangle \in K^{(i)}$ de K (les sommets étant ordonnés selon l'orientation), on associe le i -simplexe singulier

$$(14) \quad \Delta^i \xrightarrow{T_{e_0, \dots, e_i}} \kappa \xrightarrow{T} X$$

où T_{e_0, \dots, e_i} est l'application affine qui envoie s_j sur e_j (pour tout $j = 0 \dots i$). On étend la formule (14) par linéarité de sorte qu'on obtient des morphismes linéaires

$$\tilde{T} : C_i(K) \longrightarrow C_{i, \text{sing}}(X).$$

Comme, les opérateurs de bord ∂ sont définis en prenant les faces des simplexes (et que T_{e_0, \dots, e_i} est affine et préserve l'orientation) on obtient

Lemme 4.3.1. *Le morphisme $\tilde{T} : C_\bullet(K) \longrightarrow C_{\bullet, \text{sing}}(X)$ est un morphisme de complexes de chaînes.*

Remarque 4.3.2. On peut remarquer que la functorialité des chaînes simpliciales et des chaînes singulières assure que $\tilde{T} : C_\bullet(-) \rightarrow C_{\bullet, \text{sing}}(-)$ est une transformation naturelle de foncteurs.

Par définition l'homologie singulière est fonctorielle (mais plus difficile à calculer *a priori*). Le théorème suivant implique donc qu'il en est de même pour l'homologie simpliciale (qui est plus facile à calculer combinatoirement parlant).

Théorème 4.3.3. *Le morphisme canonique de complexes $\tilde{T} : C_\bullet(K) \rightarrow C_{\bullet, \text{sing}}(X)$ induit par T est un quasi-isomorphisme, c'est-à-dire qu'il induit un isomorphisme au niveau des groupes d'homologie.*

Avant de démontrer ce résultat, introduisons la notion de degré pour une application continue $f : S^n \rightarrow S^n$ (qui généralise celle associée au groupe fondamental vu en TD). On a vu que $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Donc, en notant τ un générateur de $H_n(S^n)$, on a

$$f_*(\tau) = \deg(f) \tau$$

où $\deg(f)$ est un entier relatif.

Définition 4.3.4 (Degré de f). On appelle degré de $f : S^n \rightarrow S^n$ le nombre $\deg(f)$.

Le degré de f ne dépend que du type d'homotopie de f par invariance de l'homologie par homotopie (on peut en fait montrer que deux applications ont le même degré si et seulement si elles sont homotopes). Il est clair que

$$\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f), \quad \deg(id) = 1.$$

Rappelons que le simplexe standard Δ^i détermine le simplexe singulier canonique

$$id_{\Delta^i} : \Delta^i \longrightarrow \Delta^i \in C_i(\Delta^i).$$

Son image dans le complexe relatif $C_i(\Delta^i, \partial\Delta^i)$ est un cycle (puisque par définition l'image de $\partial(id_{\Delta^i})$ est dans $\partial\Delta^i$). On note $[id_{\Delta^i}] \in H_i(\Delta^i, \partial\Delta^i)$ sa classe d'homologie. Rappelons que le théorème d'écrasement 4.2.11 implique que $H_i(\Delta^i, \partial\Delta^i) \cong \tilde{H}_i(S^i)$, ce morphisme étant induit par l'application quotient $p : \Delta^i \rightarrow \Delta^i/\partial\Delta^i \cong S^i$.

Notation 4.3.5. On note $[S^i] = \Delta^i \xrightarrow{p} \Delta^i/\partial\Delta^i \cong S^i \in C_i(S^i)$ le simplexe singulier défini par p . On notera aussi $[S^i]$ sa classe d'homologie.

Lemme 4.3.6. *La classe $[id_{\Delta^i}]$ est un générateur de $H_i(\Delta^i, \partial\Delta^i) (\cong H_i(S^i) \cong \mathbb{Z})$. L'image du générateur $[id_{\Delta^i}]$ dans $H_i(S^i)$ est $[S^i]$.*

Exercice 4.3.7. Démontrer le lemme 4.3.6 (indication : on peut raisonner par récurrence et considérer la suite d'isomorphismes

$$H_i(\Delta^i, \partial\Delta^i) \xrightarrow{\cong} H_{i-1}(\partial\Delta^i) \xleftarrow{\cong} H_{i-1}(\Delta_{i-1}, \partial\Delta_{i-1})$$

données par les longues suites exactes d'homologie de paires et le théorème 4.2.11, puis remarquer que $[S^i] = [p_*(id_{\Delta^i})] \in \tilde{H}_i(S^i)$.

Exercice 4.3.8. (1) On voit la sphère \mathbb{S}^n comme la réunion de deux n -simplexes Δ et Δ' identifiés le long de leur bords de manière évidente et en préservant l'ordre des sommets. Montrer que $\Delta - \Delta'$ représente un générateur de $H_n(\mathbb{S}^n)$.

(2) Montrer que le degré $\deg(-id)$ de l'application antipodale $z \mapsto -z$ sur la sphère S^n est $(-1)^{n+1}$.

Démonstration du théorème 4.3.3. Soit K un complexe simplicial. Il nous suffit de montrer que le morphisme de complexes $\tilde{T} : C_\bullet(K) \rightarrow C_{\bullet, \text{sing}}(|K|)$ est un quasi-isomorphisme.

Par la définition 3.1.4, K est inclus dans un espace de dimension finie \mathbb{R}^m et donc il est de dimension finie. On note $K_n := \bigcup_{i \leq n} K^{(i)}$ le n -squelette de K constitué de tous les simplexes de dimension $\leq n$. Notons que pour K_0 le résultat découle trivialement de l'exemple 4.1.8. On a alors un diagramme commutatif de suites exactes courtes de complexes de chaînes :

$$\begin{array}{ccccc} C_*(K_{n-1}) & \hookrightarrow & C_*(K_n) & \twoheadrightarrow & C_*(K_n, K_{n-1}) \\ \tilde{T} \downarrow & & \tilde{T} \downarrow & & \tilde{T} \downarrow \\ C_{*, \text{sing}}(|K_{n-1}|) & \hookrightarrow & C_{*, \text{sing}}(|K_n|) & \twoheadrightarrow & C_{*, \text{sing}}(|K_n|, |K_{n-1}|). \end{array}$$

Montrons tout d'abord que l'application verticale la plus à droite est un quasi-isomorphisme. Par définition, le module $C_i(K_n, K_{n-1})$ est trivial, si $i \neq n$, et est libre de base les n -simplexes de K si $i = n$; dans tous les cas on a $H_i(K_n, K_{n-1}) = C_i(K_n, K_{n-1})$. Déterminons maintenant les groupes d'homologie singulière $H_{i, \text{sing}}(|K_n|, |K_{n-1}|) = H_{i, \text{sing}}(|K_n|/|K_{n-1}|)$ (grâce au théorème 4.2.11). Pour cela on numérote $(\Delta_\alpha)_\alpha$ la famille des n -simplexes de K . Les inclusions naturelles $\Delta_\alpha \rightarrow |K|$ induisent un homéomorphisme

$$\bigvee S^n \cong \sqcup_\alpha \Delta_\alpha / \sqcup_\alpha \partial\Delta_\alpha \rightarrow |K_n|/|K_{n-1}|.$$

Un argument similaire à celui du Corollaire 4.2.13 donne que le groupe $H_{i, \text{sing}}(|K_n|, |K_{n-1}|)$ est trivial si $i \neq n$, alors qu'il est abélien libre de base les cycles relatifs représentés par les n -simplexes Δ_α , si $i = n$ (par le lemme 4.3.6). Chaque générateur σ de $C_*(K_n, K_{n-1})$ est donc envoyé par \tilde{T} sur la classe relative de $[id_{\Delta^n}] \in C_{n, \text{sing}}(|K_n|, |K_{n-1}|)$ qui est le générateur de la composante du n -ième groupe d'homologie du bouquet. Dans tous les cas on obtient que les morphismes induits par \tilde{T} sur les groupes d'homologie relative sont des isomorphismes donc la flèche verticale la plus à droite est un quasi-isomorphisme.

Par récurrence sur n on peut par ailleurs aussi supposer que l'application verticale la plus à gauche est un quasi-isomorphisme pour tout i . Le lemme 2 pour 3 (cf 5.4.4) implique alors que la troisième application verticale est un quasi-isomorphisme. Ce qui termine la démonstration, par récurrence sur n , dans le cas où K est de dimension finie —le cas des simplexes de dimension 0, c'est-à-dire des réunions de points ayant été réglé par l'exemple 4.1.8. \square

La preuve donnée s'étend au cas des complexes simpliciaux abstraits 3.1.23. La seule différence est que ces derniers peuvent être de dimension infinie. Ce cas s'obtient à partir de ceux de dimension finie car une chaîne singulière est une somme finie de simplexes

singuliers, dont l'image est un compact et donc rencontre un nombre fini de simplexes. Ce qui permet de ramener la preuve du quasi-isomorphisme au cas de dimension finie.

4.3.1. Généralisations des complexes simpliciaux et triangulations. On a vu dans les exercices qu'en pratique, une triangulation, même d'une surface, peut avoir beaucoup de cellules ce qui rend le calcul effectif peu aisé. Très souvent, on peut obtenir une quasi-triangulation avec beaucoup moins de cellules.

Définition 4.3.9 (Complexe quasi-simplicial). Un complexe quasi-simplicial T , aussi appelé Δ -ensemble, est la donnée d'un complexe simplicial K orienté (définition 3.1.4) et d'une relation d'équivalence \sim identifiant entre eux certains simplexes (de dimensions quelconques) de K .

La réalisation $|T|$ de T est simplement le quotient $|K|/\sim$ du polyèdre par la relation d'équivalence \sim . La relation d'équivalence identifie les simplexes via les isomorphismes affines canoniques identifiant les sommets des simplexes en question; en particulier on n'identifie entre eux que des simplexes de mêmes dimensions⁵⁷.

On notera $T^{(i)}$ l'ensemble des simplexes de $K^{(i)}/\sim$, c'est-à-dire des simplexes après identifications⁵⁸.

L'espace quotient $|T|$ n'est plus forcément plongeable dans l'espace euclidien dans lequel vit K .

En pratique, la donnée d'un complexe quasi-simplicial est donc la donnée d'une famille de simplexes et d'identifications de faces. Ceci autorise par exemple, dans le quotient, à recoller deux triangles pleins distincts portés par les trois mêmes sommets (alors que dans un complexe simplicial, étant donnés des sommets, il y a au plus un seul simplexe passant par eux. Évidemment, si on plonge le quotient dans un espace euclidien, ces triangles seront "courbés" et non affines).

Définition 4.3.10. La donnée d'un homéomorphisme $X \cong |T| = |K|/\sim$ sera appelée une quasi-triangulation.

Exemples 4.3.11. • Le cercle est muni d'un modèle quasi-simplicial très simple obtenu en prenant le complexe simplicial correspondant à Δ^1 (et ses 2 sommets) et en mettant la relation d'équivalence qui identifie les deux sommets. Ceci découle immédiatement de l'exemple 2.3.7.

- Le tore $S^1 \times S^1 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ s'obtient comme le quotient d'un carré où on identifie les arêtes opposées. Il suffit qu'il suffit de trianguler le carré pour obtenir ne passant au quotient un complexe quasi-simplicial dont la réalisation est le Tore. Ce complexe quasi simplicial a deux 2-simplexes, trois arêtes et un seul sommet.
- De même $\mathbb{R}P^2$ peut être réalisé comme le quotient d'un carré via des identifications des arêtes opposées de manière différente. Il suffit que l'on a un complexe quasi-simplicial triangulant $\mathbb{R}P^2$ qui a également deux triangles et 3 arêtes. Du fait de l'identification différente des arêtes, il a en revanche 2 sommets.

La figure 18 représente diverses quasi-triangulations simples de surfaces et du cercle.

Exercice 4.3.12. Calculer l'homologie des surfaces présentées dans la figure 18 en utilisant leur modèle quasi-simplicial.

La définition de subdivision s'étend sans difficultés à un complexe quasi-simplicial. Quitte à subdiviser les triangles d'un complexe quasi-simplicial, on peut toujours se ramener à un complexe simplicial :

57. Si on ne s'intéresse qu'au calcul d'invariants topologiques, on peut en fait s'abstraire de cette contrainte et autoriser à quotienter des arêtes en un point sans changer l'énoncé du théorème 4.3.3, cf remarque 4.3.17.

58. autrement dit ceux qui existent vraiment dans la réalisation géométrique

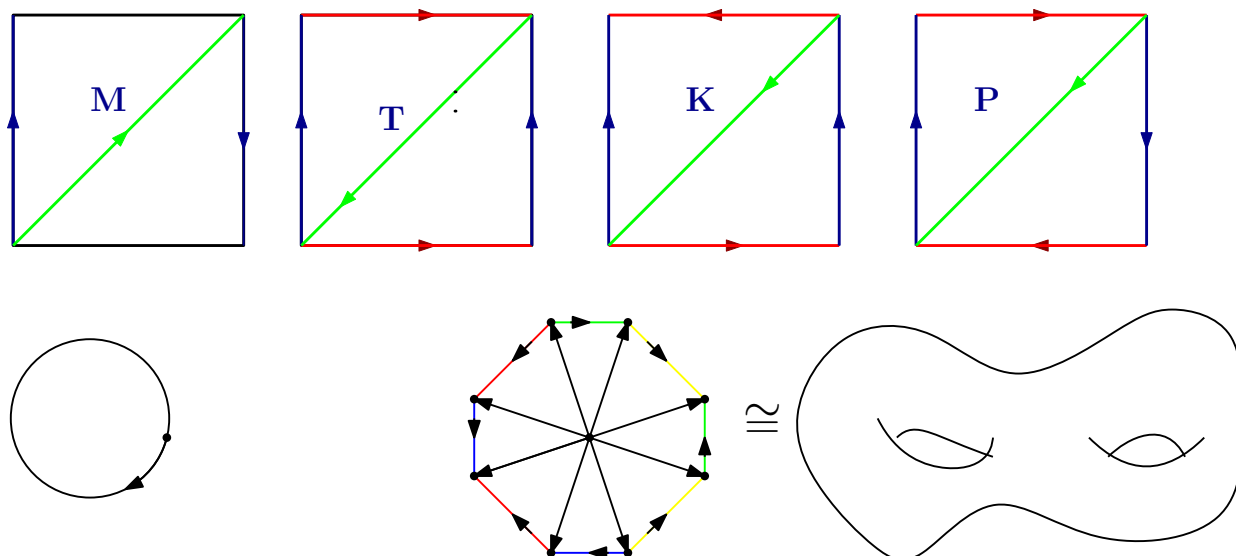


FIGURE 18. En haut des triangulations quasi-simpliciales de la bande de Möbius, du Tore, bouteille de Klein et plan projectif (resp. de gauche à droite), obtenues à partir d'une triangulation du carré puis identificatins d'arêtes. Les couleurs indiquent les différentes arêtes, celles de même couleur étant identifiées, et les flèches leur orientation (et comment elles sont identifiées lorsqu'il y a une identification). En dessous, à gauche un modèle quasi-simplicial du cercle et un modèle quasi-simplicial d'un Tore à 2 trous.

Lemme 4.3.13. *Tout complexe quasi-simplicial admet une subdivision qui est un complexe simplicial.*

La définition du complexe de chaînes d'un complexe simplicial s'étend sans difficultés à un complexe quasi-simplicial :

Définition 4.3.14. Soit T un complexe quasi-simplicial. Rappelons que $T^{(i)}$ est l'ensemble des simplexes de $K^{(i)}/\sim$. On note $C_i(T, R) := \bigoplus_{\sigma \in T^{(i)}} R$ le R -module librement engendré par $T^{(i)}$. On munit $C_i(T, R)$ de l'application bord

$$\partial : C_i(T, R) \rightarrow C_{i-1}(T, R)$$

linéaire donnée pour tout simplexe $\sigma \in T^{(i)}$ par la formule

$$\partial\sigma = \sum_{\tau \text{ face de } \sigma} \pm\tau,$$

où le signe \pm est $+$ si l'orientation de τ est induite par celle de σ en omettant un sommet d'indice pair et est $-$ sinon.

Autrement dit, si σ est la classe dans le quotient K/\sim de $\langle s_0, \dots, s_n \rangle$ où les s_i sont ordonnés par ordre croissant, on a la formule

$$(15) \quad \partial\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\langle s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_n \rangle].$$

On prendra garde que dans le quotient les sommets s_i ne sont plus nécessairement distincts (mais on a toujours une orientation induite sur chaque simplexe).

Le fait que $\partial \circ \partial = 0$ se démontre comme dans le lemme 3.2.2. Le théorème 3.3.2 pour

(16) *la formule d'Euler-Poincaré reste valide pour un complexe quasi-simplicial.*

En effet, la preuve de 3.3.2 est purement algébrique et donc en fait valide pour tout complexe de chaînes de \mathbb{Z} -modules libres (ou \mathbb{F} -espaces vectoriels) de rangs finis et non-nul en un nombre fini de degrés.

On dispose, pour tout complexe quasi-simplicial T , d'un morphisme de complexes de chaînes :

$$\tilde{T} : C_*(T, R) \longrightarrow C_{*,\text{sing}}(|T|, R)$$

défini exactement comme celui des complexes simpliciaux (cf 14). La démonstration du théorème 4.3.3 se généralise sans difficulté pour donner

Théorème 4.3.15. *Le morphisme canonique de complexes $\tilde{T} : C_\bullet(T, R) \rightarrow C_{\bullet,\text{sing}}(|T|)$ est un quasi-isomorphisme, c'est-à-dire qu'il induit un isomorphisme au niveau des groupes d'homologie.*

Ceci garantit aussi que l'homologie simpliciale de tout complexe simplicial L qui est une subdivision d'un complexe quasi-simplicial T est canoniquement isomorphe à celle de T .

Remarque 4.3.16. On peut généraliser encore plus le théorème 4.3.3 à ce qu'on appelle les complexes quasi-polyédraux, ensembles simpliciaux et aux CW-complexes. Par complexe polyédral, on entend une réunion de polyèdres donnés par l'enveloppe convexe de points qui ne sont pas forcément des triangles, et munis d'orientations, l'opérateur de bord consistant à prendre la somme des divers polyèdres du bord (avec le signe correspondant à la compatibilité de leur orientation), objets pour lesquels on peut toujours trouver une subdivision qui est un complexe simplicial. Un complexe quasi-polyédral est un complexe polyédral muni d'une relation identifiant certaines faces. Des exemples élémentaires sont donnés dans la figure 18 en prenant les carrés auxquels on a retiré les diagonales vertes, ou bien le 4g-gone (comme en bas à droite dans la figure (18)) dont on a retiré toutes les arêtes internes noires. On renvoie à [1] pour des définitions plus précises.

Pour les CW-complexes (notion qui englobe les quasi-polyèdres), la différentielle est un peu plus compliquée à définir que pour les complexes quasi-simpliciaux de sorte que la preuve n'est pas rigoureusement la même non plus (même si la philosophie derrière reste identique). Nous renvoyons à [2] par exemple pour une description de l'homologie des CW-complexes.

Remarque 4.3.17. On a cependant une famille générale simple de CW-complexes pour lesquels la différentielle est très facile à calculer. Famille englobant les complexes quasi-simpliciaux bien-sûr. Il s'agit de ceux obtenus comme quotient d'un complexe simplicial par une relation d'équivalence autorisant à identifier des simplexes de dimension k avec des simplexes de dimension strictement plus petites. Un tel exemple comprend par exemple le cas d'un n -simplexe dont on a quotienté toutes les faces en les rendant équivalent à un seul point ; dont la réalisation est évidemment une sphère de dimension n . Pour cette généralisation des complexes quasi-simpliciaux, on peut définir le complexe des chaînes exactement comme dans la définition 4.3.14. Sachant que, lorsque l'on prend le bord d'un n -simplexe, si une face est identifiée avec un simplexe de dimension strictement plus petite, alors elle est envoyée sur 0 (puisque elle n'existe de toutes façons pas dans les $n-1$ -chaînes).

On laisse au lecteur le soin de vérifier que le complexe ainsi obtenu est bien encore une fois quasi-isomorphe au complexe des chaînes singulières !

4.3.2. Unicité des théories homologiques d'un point de vue axiomatique. Le théorème 4.3.3 est un exemple de l'unicité d'une théorie homologique pour les espaces topologiques vérifiant des conditions simples, plus précisément que les théories que nous

avons présentées sont des foncteurs homotopiques compatibles avec le recollement d'espaces⁵⁹. C'est ce que nous allons énoncer/formaliser ici.

Tout d'abord donnons une terminologie encodant l'invariance homotopique des chaînes singulières que nous avons vue.

Soit \mathbf{C} une catégorie dont les ensembles de morphismes $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ sont munis d'une relation d'équivalence \simeq stable par pré et post composition ; autrement dit, quel que soit $h : Y \rightarrow Z$, $g : W \rightarrow X$ et $f_1 \simeq f_2 : X \rightarrow Y$, on a que $h \circ f_1 \circ g \simeq h \circ f_2 \circ g$.

Terminologie 4.3.18. On appelle une telle relation une notion d'*équivalence homotopique* sur \mathbf{C} .

Exemples 4.3.19. (1) La relation d'égalité est évidemment une relation d'équivalence homotopique sur n'importe quelle catégorie. C'est en particulier le cas pour la catégorie des ensembles et pour les groupes abéliens.

(2) Les espaces topologiques munis de la relation d'homotopie entre les morphismes (c'est évidemment notre motivation pour le choix de la terminologie ci-dessus).

(3) La catégorie des complexes de chaînes munis de la relation de *quasi-équivalence* entre les morphismes, c'est-à-dire que $f \simeq g$ si pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $H_i(f) = H_i(g)$. Cet exemple est important pour nous et plus généralement en topologie algébrique, algèbre homologique et leurs applications.

(4) On peut aussi regarder les complexes de chaînes munis de la relation d'homotopie de chaînes 5.3.12.

Définition 4.3.20. Soit (\mathbf{C}, \simeq) une catégorie munie d'une relation d'équivalence homotopique sur les morphismes. Un invariant homotopique généralisé est un foncteur $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{C}$ qui envoie les équivalences d'homotopie entre morphismes sur des équivalences homotopiques.

Si \simeq est la relation d'égalité, on retrouve la notion d'invariant homotopique fort 2.2.8.

Corollaire 4.3.21. *On munit $R\text{-Mod}$ des quasi-équivalences comme équivalence homotopiques (cf 4.3.19). Les chaînes singulières sont un invariant homotopique généralisé $C_*(-, R) : \mathbf{Top} \rightarrow R\text{-Mod}$.*

Démonstration. C'est une retraduction du corollaire 4.1.16 et de la proposition 4.1.13. \square

Remarque 4.3.22. Il découle de la preuve du corollaire 4.1.16 que les chaînes singulières sont aussi un invariant homotopique généralisé si on prend les homotopies de chaînes comme relation d'équivalence faible.

Nous allons maintenant préciser l'unicité de l'homologie singulière. Tout d'abord nous rapellons et précisons certaines notations. Soit A un sous-espace de X et $f : A \rightarrow Y$ une application continue. On dispose de deux applications induites $i_{X,*} : C_*(A) \rightarrow C_*(X)$ et $f_* : C_*(A) \rightarrow C_*(Y)$ dont les composées avec l'application induite sur les chaînes par $X \coprod Y \rightarrow X \cup_A Y$ sont égales (ce point étant une simple conséquence du fait que les chaînes singulières sont un foncteur). Nous avons ainsi un morphisme canonique

$$\text{cone}\left(C_*(A) \xrightarrow{i_{X,*} - f_*} C_*(X) \oplus C_*(Y)\right) \longrightarrow C_*(X \cup_A Y)$$

dont la source est le cône 5.4.6 du morphisme de complexe $i_{X,*} - f_*$.

Définition 4.3.23 (Axiomes d'une théorie de chaînes pour les espaces topologiques). Une théorie de chaînes pour les espaces topologiques est un *invariant homotopique généralisé* $\mathcal{C} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ch}(R)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

⁵⁹. intuitivement, on doit penser que cela veut dire que cela envoie un recollement d'espace sur le recollement des complexes de chaînes associés. Comme les complexes de chaînes sont regardés à quasi-isomorphisme près, la notion de recollement doit être définie à homotopie près

- (1) (axiome de la somme) le morphisme canonique $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}(M_i) \longrightarrow \mathcal{C}(\coprod_{i \in I} M_i)$ est un quasi-isomorphisme ;
- (2) (axiome de recollement) Soit $i : A \hookrightarrow X$ l'inclusion d'un sous-complexe dans un CW complexe X et soit $f : A \rightarrow Y$ continue. Alors, l'application canonique $\text{cone}\left(\mathcal{C}(A) \xrightarrow{i_{X,*} - f_*} \mathcal{C}(X) \oplus \mathcal{C}(Y)\right) \longrightarrow \mathcal{C}(X \cup_A Y)$ est un quasi-isomorphisme.

Proposition 4.3.24 (L'homologie singulière est une théorie des chaînes). *Soit R un anneau commutatif unitaire. Alors $X \mapsto C_*(X, R)$ est une théorie homologique à coefficients dans R .*

Démonstration. Que ce soit un invariant homotopique généralisé est le corollaire 4.3.21 et la commutation avec la somme est la proposition 4.1.9. L'axiome de recollement se démontre de manière identique à la preuve du théorème d'écrasement 4.2.11 appliquée à A identifié à un sous-espace de $X \coprod Y$; autrement dit c'est une conséquence du théorème de petites chaînes 4.2.19. \square

Une théorie de chaînes est déterminée par sa valeur sur un point.

Théorème 4.3.25 (Unicité des théories homologiques). *Soit (G_*, d) un complexe de chaînes.*

Il existe une unique (à quasi-isomorphisme naturel près⁶⁰) théorie des chaînes \mathcal{C} des espaces qui satisfasse l'axiome de la dimension suivant :

$$\mathcal{C}(pt) \xrightarrow{\cong} (G_*, d).$$

En particulier, si G est un groupe abélien quelconque, il existe une unique (à quasi-isomorphisme naturel près) théorie homologique \mathcal{C}_G des espaces topologiques telle que $H_0(\{\}) \cong G$ et $H_{i>0}(\{*\}) \cong 0$.*

Ce théorème donne donc l'unicité de l'homologie singulière à coefficient dans un anneau quelconque et de ses variantes (définies exactement de la même façon) à coefficient dans un groupe abélien quelconque G . Précisément il s'agit de la théorie de chaînes associée au complexe $G_0 \cong G$ et $G_{i>0} \cong 0$ (ou à tout complexe quasi-isomorphe à ce dernier, par exemple $C_{*,sing}(\{*\}, G)$). Mais il montre qu'il existe aussi d'autres théories pour lesquelles l'homologie d'un point est plus compliqué. Ces théories produisent d'autres invariants homotopiques intéressants. On peut citer en exemples la théorie du cobordisme, la K -théorie topologique, les K -théories de Morava, la théorie de Brown-Peterson.

Terminologie 4.3.26. Les théories de chaînes associées à des complexes de chaînes différents du complexe trivial s'appellent des théories de chaînes *extraordinaires*, et leur homologie associée une *théorie homologique extraordinaire*

Le théorème 4.3.25 est reformulation moderne (et plus forte car au niveau des chaînes) de l'unicité d'une théorie homologique en termes d'axiomes d'Eleinberg-Steenrod (qui sont eux définis en termes de la collection des groupes d'homologie et sur l'homologie d'une paire) qui ont été dégagés au milieu du XX-ième siècle.

Rappelons qu'un groupe abélien *gradué* est un groupe abélien H qui est la somme directe $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n$ de sous-groupes abéliens.

Définition 4.3.27 (Axiomes pour une théorie homologique). Une théorie homologique est un foncteur H_* de la catégorie des paires (X, A) d'espaces topologiques à valeur

60. c'est-à-dire que deux telles théories de chaînes $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ sont reliées par un zigzag $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}'$ où \mathcal{D} est un autre théorie chaîne et les flèches sont des transformations naturelles dont la valeur en chaque espace topologique est un *quasi-isomorphisme*.

dans les groupes abéliens gradués⁶¹ muni d'une transformation naturelle $\delta_* : H_i(X, A) \rightarrow H_{i-1}(A, \emptyset)$ satisfaisant les axiomes suivants (dans lesquels nous noterons $H_i(X) := H_i(X, \emptyset)$ pour alléger les notations) :

- (1) c'est un *invariant homotopique* : si $f \simeq g$ alors $H_i(f) = H_i(g)$ en tout degré i ;
- (2) la suite induite par δ et les inclusions $A \xrightarrow{i} X$, $X = (X, \emptyset) \xrightarrow{j} (X, A)$:

$$\dots \rightarrow H_i(A) \rightarrow H_i(X) \rightarrow H_i(X, A) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(A) \rightarrow \dots \rightarrow H_0(A) \rightarrow H_0(X) \rightarrow 0.$$

est une suite *exacte* longue ;

- (3) la propriété d'**excision** : pour tout triplet $U \subset A \subset X$ avec $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$, le morphisme induit par l'inclusion de paires $(X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ est un isomorphisme

$$H_i(X \setminus U, A \setminus U) \cong H_i(X, A)$$

en tout degré i ;

- (4) la propriété d'**additivité** : Les morphismes $\bigoplus_{j \in J} H_i(X_j) \rightarrow H_i(\coprod_{j \in J} X_j)$ induit par les inclusions $X_j \hookrightarrow \coprod_{j \in J} X_j$ sont des isomorphismes en tout degré i ;
- (5) propriété dite de la **dimension** : $H_i(\{*\}) = 0$ si $i > 0$ et $H_0(\{*\}) = \mathbb{Z}$.

On peut noter qu'une théorie de chaînes donne une théorie homologique. Précisément prendre la somme directe des groupes d'homologie $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_i(-)$ transforme une théorie de chaînes en une théorie homologique. À partir de cette remarque, il n'est pas très dur de croire en la proposition suivante.

Proposition 4.3.28 (Eilenberg-Steenrod). *Il existe une unique théorie homologique à équivalence naturelle près, qui est donnée par l'homologie singulière.*

Esquisse de la preuve. Le point essentiel est d'une part que l'homologie singulière est un exemple et que d'autre part si on a une théorie homologique, les axiomes permettent de montrer directement que ses valeurs sur les boules, sphères et bouquets, mais aussi sur les applications entre paires de tels objets, sont les mêmes que celles de l'homologie singulière. Il suit alors de la preuve du théorème 4.3.3 que c'est aussi le cas sur tout polyèdre et plus généralement sur tout CW-complexe. Ensuite, on peut utiliser que tout espace topologique est faiblement homotope à un CW-complexe. \square

Remarque 4.3.29. Dans la proposition 4.3.28, remplacer l'homologie d'un point dans l'axiome (5) de la dimension par d'autres valeurs est bien plus délicat que dans le théorème 4.3.25. En effet, il peut y avoir des complexes de chaînes non quasi-isomorphes qui ont les mêmes groupes d'homologie (alors que ceux ayant une homologie triviale sont tous quasi-isomorphes). C'est en partie en cela qu'une théorie de chaînes est un invariant plus fort que l'homologie.

4.4. COCHAÎNES SINGULIÈRES ET STRUCTURE PRODUIT DE LA COHOMOLOGIE

Nous allons dans cette partie considérer le dual du complexe des chaînes singulières et définir leurs groupes de cohomologie. On renvoie à la section 5.5 pour des généralités sur les complexes de cochaînes.

Définition 4.4.1 (Cochaînes et groupes de cohomologie singulière). Soit R un anneau commutatif unitaire. Soit X un espace topologique. Le complexe des cochaînes singulières, noté $(C^*(X), d)$ est le complexe dual $C^i := \text{Hom}_R(C_i(X), R)$ de $C_*(X)$ muni de la différentielle $\delta := (-1)^{i+1} d^* : f \mapsto (-1)^{i+1} f \circ d$ (pour tout $f \in C^i(X)$).

Ses groupes de cohomologie seront notés $H^i(X)$.

61. autrement dit, H_* associe à toute paire (X, A) des groupes abéliens $H_i(X, A)$ et à toute application continue $(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B)$ entre paires, des morphismes de groupes $H_i(f) : H_i(X, A) \rightarrow H_i(Y, B)$ compatibles avec la composition des morphismes et l'identité

Que $C^*(X)$ soit bien un complexe de cochaînes découle du lemme 5.5.2. Une cochaîne singulière de degré i est donc une fonction $\sigma \mapsto f(\sigma) \in R$ sur le R -module libre engendré par les i -simplexes singuliers.

Remarque 4.4.2. On définit évidemment de même le complexe des cochaînes simpliciales, quasi-simpliciales etc.

Du fait que l'on est passé au dual, il y a une petite subtilité pour la functorialité. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors on dispose d'une application linéaire

$$(17) \quad f^* : C^*(Y, R) \rightarrow C^*(X, R), \quad \varphi \mapsto (\sigma \mapsto \varphi(f_*(\sigma))).$$

Autrement dit, pour tout $\varphi : C_*(Y, R) \rightarrow \mathbb{R}$ on a $f^*(\varphi) = \varphi \circ f_* : C_*(X) \rightarrow R$ où $f_* : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ est le morphisme de complexe de chaînes induit par f .

Lemme 4.4.3. *On a que $f^* : C^*(Y) \rightarrow C^*(X)$ est un morphisme de complexes de cochaînes.*

Démonstration. On a par définition de la différentielle sur le dual et en utilisant que f_* commute avec d que

$$d(f^*(\varphi)) = d(\varphi \circ f_*) = (-1)^{i+1} \varphi \circ f_* \circ d = (-1)^{i+1} \varphi \circ d \circ f_* = f^*(d(\varphi)).$$

□

En particulier, si (X, A) est une paire d'espaces topologiques, l'inclusion $A \hookrightarrow X$ induit un morphisme surjectif de complexes de cochaînes $C^*(X) \rightarrow C^*(A)$. On note $C^*(X, A) = \ker(C^*(X) \rightarrow C^*(A))$ son noyau et on appelle ce complexe le complexe des cochaînes relatives de la paire (X, A) . Par définition donc, on a une suite exacte courte de complexes de cochaînes

$$C^*(X, A) \hookrightarrow C^*(X) \twoheadrightarrow C^*(A)$$

et donc une longue suite exacte naturelle en cohomologie.

Lemme 4.4.4. *Le complexe de cochaînes $C^*(X, A)$ est le complexe dual de $C_*(X, A)$.*

Exercice 4.4.5. Démontrer ce lemme.

Proposition 4.4.6. *Le complexe des cochaînes singulières définit un foncteur $C^*(-) : \mathbf{Top}^{op} \rightarrow \mathbf{Ch}(R)$ qui est invariant par homotopie : si $f \simeq g$ alors f^* est quasi-équivalente à g^* .*

Le complexe des cochaînes relatives est aussi un foncteur de la catégorie opposée (cf 1.0.11) aux paires d'espaces et qui est un invariant des homotopies de paires.

Démonstration. Cela découle du lemme 4.4.3 et du fait que la règle $f \mapsto f_*$ définit bien un foncteur (proposition 4.1.13). L'invariance par homotopie se démontre en dualisant la preuve de la proposition 3.2.8. □

Ainsi une application continue $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques induit un morphisme

$$f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y),$$

allant dans la même direction,⁶² alors que l'application induite en cohomologie

$$f^* : H^*(Y) \rightarrow H^*(X),$$

renverse la direction.⁶³

Un corollaire facile du théorème des coefficients universels est le suivant

Proposition 4.4.7. *Soit X un espace topologique.*

⁶² On dit pompeusement que le foncteur $H_*(\cdot)$ est covariant.

⁶³ On dit pompeusement que le foncteur $H^*(\cdot)$ est contravariant.

- (1) Le premier groupe de cohomologie $H^0(X)$ est le dual du \mathbb{Z} -module libre de base les composantes connexes par arcs de X , c'est-à-dire le produit $\coprod \mathbb{Z}$ où le produit est pris sur l'ensemble des composantes connexes par arcs.
- (2) Si X est connexe par arcs, alors on a un isomorphisme naturel (dual du morphisme d'Hurewicz)

$$H^1(X, G) \cong \text{Hom}(\pi_1(X), G).$$

En particulier, $H^1(X)$ est sans-torsion si $\pi_1(X)$ est de type fini.

Démonstration. Le groupe $H_{-1}(X)$ est nul alors que le groupe $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ est libre (de type fini) si X est connexe par arcs. Les foncteurs $\text{Ext}(-, G)$ appliqués en ces modules sont donc nuls et le résultat suit du théorème des coefficients universels et des résultats obtenus pour l'homologie 4.1.10 et de l'isomorphisme d'Hurewicz 4.1.19. Par ailleurs le dual d'un \mathbb{Z} -module de type fini est toujours sans-torsion. \square

Nous allons maintenant voir que les groupes de *cohomologie* sont toujours munis d'une structure naturelle d'anneau. Cette structure rajoute des informations qui permettent de distinguer des espaces plus finement et facilitent parfois les calculs. C'est un principe assez général en topologie algébrique :

On pense en homologie et on calcule en cohomologie.

L'existence de ce produit provient de ce que l'inclusion diagonale $X \rightarrow X \times X$ d'un espace topologique dans son carré induit une application

$$H^*(X \times X) \rightarrow H^*(X)$$

par fonctorialité.

Remarque 4.4.8. Le fait que la diagonale induise un produit provient, essentiellement, du fait que $H^*(X \times X)$ est proche du (voir, sous certaines hypothèses, isomorphe au) produit tensoriel $H^*(X) \otimes H^*(X)$, comme nous le verrons plus loin, paragraphe 4.6. L'inclusion diagonale est trivialement commutative et associative ; ces propriétés s'étendent à la cohomologie mais ne sont pas totalement évidentes car l'application reliant $H^*(X \times X)$ à $H^*(X) \otimes H^*(X)$ est moins triviale. En particulier, la commutativité n'est pas vraie au niveau des complexes de cochaînes.

On remarquera que ce produit est défini pour tous les espaces topologiques et est fonctoriel. Il donne aussi plus de structure :

Exemple 4.4.9. On considère les deux variétés compactes sans bord suivantes : $M = S^2 \times S^4$ et $\mathbb{C}P^3$. Elles ont des décompositions cellulaires avec exactement une cellule de dimension 0, 2, 4, 6. En particulier leur groupe d'homologie et de cohomologie sont isomorphes.

En revanche, ces variétés ne sont pas difféomorphes ni même homotopes. En effet on a que leurs algèbres de cohomologie sont non-isomorphes : on a les isomorphismes d'anneaux $H^*(M, \mathbb{F}) \cong \mathbb{F}[x]/(x^2) \otimes \mathbb{F}[y]/(y^2)$, où x est de degré 2 et y de degré 4, alors que $H^*(\mathbb{C}P^3, \mathbb{F}) \cong \mathbb{F}[z]/(Z^4 = 0)$ où z est de degré 2. En particulier, $z^2 \neq 0$ alors que tout élément est de carré nul dans $H^*(M, \mathbb{F})$.

Tout l'intérêt d'introduire la cohomologie est qu'elle admet une structure fonctorielle d'algèbre, ce qui n'est pas le cas pour l'homologie.⁶⁴

Soit X un espace topologique.

Définition 4.4.10 (Le produit cup sur les cochaînes). Étant donné des cochaînes singulières $c \in C^i(X)$ et $c' \in C^j(X)$, on appelle *cup-produit* de c et c' la cochaîne singulière $c \smile c' \in C^{i+j}(X)$ définie par la formule suivante. Soit $\sigma : \Delta_{i+j} \rightarrow X$ un $(i+j)$ -simplexe

64. Pour qui connaît la cohomologie de de Rham la structure d'algèbre n'est pas une surprise puisque le produit extérieur sur les formes différentielles munit la cohomologie d'un produit. Cela n'allait pas de soi, cependant que ce produit soit défini sur \mathbb{Z} ou sans hypothèses géométriques.

singulier. Rappelons que l'on a noté $\partial_k \sigma$ le $(i + j - 1)$ -simplexe singulier obtenu en se restreignant à la k -ème face. On abrège

$$\sigma_- = \partial_{i+1} \partial_{i+2} \dots \partial_{i+j} \sigma \text{ et } \sigma_+ = \partial_0^i \sigma.$$

Ainsi σ_- est la restriction de σ à la face $(x_0, \dots, x_i, 0, \dots, 0)$ et σ_+ est la restriction de σ à la face $(0, \dots, 0, x_0, \dots, x_j)$.⁶⁵ On définit alors $c \smile c'$ par la formule⁶⁶ :

$$(18) \quad (c \smile c')(\sigma) = (-1)^{ij} c(\sigma_-) c'(\sigma_+).$$

Lemme 4.4.11. *Le cup-produit est bilinéaire et associatif mais pas commutatif⁶⁷. La 0-cochaîne singulière 1, constante de valeur 1, est élément neutre. Il munit $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} C^i(X, R)$*

d'une structure de R -algèbre associative.

Exercice 4.4.12. Démontrer le lemme 4.4.11.

La définition exacte du cup-produit (c'est-à-dire la formule pour σ_-, σ_+) n'est en fait pas si importante ni si mystérieuse. C'est, en quelque sorte, la seule possible, à homotopie près ; d'après le paragraphe 4.6 et la Proposition 4.6.3.

Le point clé suivant est que la structure d'algèbre est compatible avec la différentielle.

Lemme 4.4.13. *On a :*

$$\delta(c \smile c') = \delta c \smile c' + (-1)^i c \smile \delta c'.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que si c est une i -cochaîne singulière et σ un $(i + 1)$ -simplexe singulier, on a :

$$\delta c(\sigma) = \sum_k (-1)^{k+i+1} c(\partial_k \sigma).$$

Pour tout $(i + j + 1)$ -simplexe singulier σ , on a alors :

$$\begin{aligned} (\delta c \smile c')(\sigma) &= \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^{k+(i+1)(j+1)} c(\partial_k \partial_{i+2} \dots \partial_{i+j+1} \sigma) c'(\partial_0^{i+1} \sigma) \\ &= \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^{k+(i+1)(j+1)} c(\partial_{i+1} \dots \partial_{i+j} \partial_k \sigma) c'(\partial_0^{i+1} \sigma) \\ &= \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^{k+(i+1)(j+1)} c(\partial_{i+1} \dots \partial_{i+j} \partial_k \sigma) c'(\partial_0^i \partial_k \sigma) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (-1)^i (c \smile \delta c')(\sigma) &= (-1)^i \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^{k+(i+1)(j+1)} c(\partial_{i+1} \dots \partial_{i+j+1} \sigma) c'(\partial_k \partial_0^i \sigma) \\ &= \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^{k+(i+1)(j+1)+i} c(\partial_{i+1} \dots \partial_{i+j+1} \sigma) c'(\partial_0^i \partial_{k+i} \sigma) \\ &= \sum_{k=i}^{i+j+1} (-1)^{k+(i+1)(j+1)} c(\partial_{i+1} \dots \partial_{i+j} \partial_k \sigma) c'(\partial_0^i \partial_k \sigma) \end{aligned}$$

65. On prendra garde au chevauchement des deux faces.

66. le signe mis ici suit la convention 5.5.5 ; si on choisit de ne pas suivre la convention précédente pour le signe du cobord dual, il convient de ne pas mettre de signe ici non plus pour que le lemme 4.4.13 reste vrai.

67. Le centre de $C^*(X)$ est constitué des 0-cochaînes.

En ajoutant ces deux égalités, le dernier terme de la première somme se simplifie avec le premier terme de la seconde somme, et il reste :

$$\sum_{k=0}^{i+j+1} (-1)^{k+(i+1)(j+1)} c(\partial_{i+1} \dots \partial_{i+j+1} \partial_k \sigma) c'(\partial_0^i \partial_k \sigma) = \delta(c \smile c')(\sigma).$$

□

Le lemme signifie que la différentielle δ est une dérivation de l'algèbre $(C^\bullet(X), \cup)$.

Terminologie 4.4.14. Pour reprendre une terminologie déjà vue 5.2.5, on appelle en général un complexe de chaînes (C^*, δ) munie d'une structure de R -algèbre \cup envoyant $C^i \otimes C^j$ dans C^{i+j} (autrement dit qui est additive sur les degrés) et vérifiant l'équation du lemme 4.4.13, une *algèbre différentielle graduée* associative, ou plus simplement une *dg-algèbre associative*.

Lemme 4.4.15. *Le cup-produit 4.4.10 au niveau des cochaînes induit un produit en cohomologie :*

$$H^i(X) \times H^j(X) \rightarrow H^{i+j}(X); ([c], [c']) \mapsto [c] \smile [c'] := [c \smile c'].$$

On appelle encore cup-produit cette application ; elle est bilinéaire et associative. La classe [1] est élément neutre. En particulier le produit cup donne une structure de R -algèbre associative à $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H^i(X, R)$.

Démonstration. La seule chose à vérifier est que le produit passe bien aux groupes de cohomologie. C'est à dire que la valeur de la classe $[c \smile c']$ est inchangée si on modifie les cocycles c ou c' par un bord. Par bilinéarité (et symétrie de la relation du lemme 4.4.13, il suffit de vérifier que $\partial(y) \smile b$ est un cobord pour tout cocycle b . Or par le lemme 4.4.13, puisque $\partial(b) = 0$, on a

$$\partial(y \smile b) = \partial(y) \smile b + y \smile \partial(b) = \partial(y) \smile b$$

ce qui conclut. □

On remarquera que le produit, aussi bien sur les cochaînes qu'en cohomologie, *mélange* les degrés et est défini globalement et non pas degré par degré.

Lemme 4.4.16. *Le cup-produit est fonctoriel : si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, alors l'application f^* induite sur les cochaînes et en cohomologie singulière préserve le cup-produit :*

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in C^i(Y) \times C^j(Y), \quad f^*(x \smile y) &= f^*(x) \smile f^*(y), \\ \forall (\alpha, \beta) \in C^i(Y) \times C^j(Y), \quad f^*(\alpha \smile \beta) &= f^*(\alpha) \smile f^*(\beta). \end{aligned}$$

Démonstration. Le cas de la cohomologie est une conséquence de celui des cochaînes. Pour les cochaînes le point est que, pour toute cochaîne $c : C_i(Y) \rightarrow \mathbb{Z}$, et tout simple singulier $\sigma : \Delta^{i+1} \rightarrow X$, on a

$$f^*(c)(\partial_k(\sigma)) = c(f \circ \partial_k(\sigma)) = c(\partial(f_*(\sigma)))$$

d'après la formule (5). Le résultat découle maintenant de la formule (18) définissant le produit \smile . □

Le cup-produit a la propriété remarquable suivante en cohomologie.

Proposition 4.4.17. *Le cup-produit est commutatif au sens gradué⁶⁸ :*

$$\forall (\alpha, \beta) \in H^i(Y) \times H^j(Y), \quad \alpha \smile \beta = (-1)^{ij} \beta \smile \alpha.$$

68. Une autre terminologie vieillotte signifiant la même chose est "anticommutatif".

Démonstration. On a déjà remarqué que le cup-produit n'est pas (mais alors pas du tout) commutatif au sens gradué au niveau des cochaînes. C'est en revanche le cas à *homotopie près*! En utilisant la méthode des modèles acycliques (cf la preuve de la proposition 4.6.3), on peut montrer qu'il existe un opérateur d'homotopie $C^i(X) \otimes C^j(X) \xrightarrow{U_1} C^{i+j-1}(X)$ vérifiant, pour tout $c \in C^i(X)$, $c' \in C^j(X)$,

$$c \cup c' - (-1)^{ij} c' \cup c = d(c \cup_1 c') + d(c) \cup_1 c' + (-1)^{i+j+1} c \cup_1 d(c').$$

Il suit alors que si c, c' sont des cycles, le membre de droite est un bord, et donc le membre de droite est nul en cohomologie.

On peut cependant, aussi, raisonner de la façon suivante. Étant donné un simplexe singulier $\sigma : \Delta_i \rightarrow X$, on note $\bar{\sigma}$ le simplexe singulier $\sigma \circ f$ où $f : \Delta_i \rightarrow \Delta_i$ est l'homéomorphisme linéaire qui renverse l'ordre des sommets de Δ_i . On a donc $\bar{\sigma}(s_k) = \sigma(s_{i-k})$. L'orientation de $\bar{\sigma}$ diffère de celle de σ par le signe $(-1)^{\frac{i(i+1)}{2}}$. Il est donc naturel d'introduire le morphisme

$$\rho : C_i(X) \rightarrow C_i(X); \sigma \mapsto (-1)^{\frac{i(i+1)}{2}} \bar{\sigma}.$$

Un calcul simple permet de vérifier que ρ définit un morphisme de chaîne. On laisse en exercice (à partir du prisme introduit dans la démonstration de la proposition 4.1.14) de vérifier qu'il existe une homotopie de chaîne entre ρ est l'identité.

Pour conclure on remarque que l'on a :

$$(-1)^{\frac{i(i+1)}{2}} (-1)^{\frac{j(j+1)}{2}} (\rho^* c \smile \rho^* c')(\sigma) = (-1)^{\frac{(i+j)(i+j+1)}{2}} \rho^*(c' \smile c)(\sigma)$$

et donc

$$\rho^* c \smile \rho^* c' = (-1)^{ij} \rho^*(c' \smile c).$$

En passant en cohomologie on obtient la formule annoncée. □

Définition 4.4.18. Une algèbre graduée (A^*, \star) vérifiant la propriété de symétrie :

$$\forall (x, y) \in A^i \times A^j, \quad x \star y = (-1)^{ij} y \star x$$

est appelée *algèbre graduée commutative*. Un morphisme d'algèbre graduée commutative est un morphisme d'algèbre $f : A \rightarrow B$ qui préserve les degrés : $f(A^i) \subset B^i$.

L'algèbre de cohomologie singulière $H^\bullet(X) = (H^0(X), H^1(X), H^2(X), \dots)$ est donc commutative comme algèbre graduée.

Remarque 4.4.19. Dans une algèbre graduée commutative telle que la cohomologie singulière d'un espace, on a donc que les éléments de degré pairs commutent avec tout le monde alors que le produit de deux éléments de degré impairs est l'opposé du produit de ces éléments dans l'ordre opposé.

Exercice 4.4.20. Démontrer que si $x \in H^{2i+1}(X, R)$, alors $x \smile x = 0$.

Corollaire 4.4.21. *Les cochaînes singulières sont un foncteur $\mathbf{Top}^{op} \rightarrow \text{dg-Alg}$ et la cohomologie $H^*(-)$ est un foncteur $\mathbf{Top}^{op} \rightarrow \mathbf{CAlg}$ de la catégorie opposée des espaces topologiques vers celle des algèbres graduées commutatives.*

Démonstration. C'est une conséquence des lemmes 4.4.15, 4.4.16, 4.4.11 et de la proposition 4.4.17. □

Notons que le produit cup s'étend aux cochaînes relatives. En effet, soit $X \supset A$ une paire d'espaces et c est une cochaîne qui appartient au sous-module $C^i(X, A) \subset C^i(X)$ — c'est-à-dire que pour tout simplexe singulier $\sigma : \Delta_i \rightarrow A \subset X$, on a $c(\sigma) = 0$ — et soit $c' \in C^j(X)$ une cochaîne arbitraire sur X .

Lemme 4.4.22. *Le cup-produit $c \smile c'$ appartient à $C^{i+j}(X, A)$: pour tout $\sigma \in C_{i+j}(A)$, on a $c \smile c'(\sigma) = 0$.*

Exercice 4.4.23. Démontrer le lemme 4.4.22.

Le cup-produit induit donc des produits

$$C^i(X, A) \otimes C^j(X) \rightarrow C^{i+j}(X, A) \text{ et}$$

$$H^i(X, A) \otimes H^j(X) \rightarrow H^{i+j}(X, A).$$

Remarque 4.4.24. Comme on l'a vu, toutes les constructions de cette section sont définies pour n'importe quel anneau de coefficient R . En effet la formule du cup-produit fait intervenir la multiplication des scalaires $c(\sigma_-)$ et $c'(\sigma_+)$, et est donc définie pour tout anneau.

On peut remarquer que l'on a nécessairement besoin d'une structure d'anneau sur les coefficients (contrairement au cas des chaînes où on peut prendre n'importe quel groupe abélien) car, si on dispose d'un cup-produit bien défini, il donne une structure d'anneau à $H^0(X, G)$ pour tout espace topologique. Pour X connexe par arcs, on retrouve donc une telle structure sur $R \cong H^0(X)$.

Remarque 4.4.25. La structure présente sur les cochaînes est en fait duale d'une structure sur les chaînes. Celle de... coanneau (et plus généralement coalgèbre). Qui, au lieu de multiplier deux éléments, déconcatène un élément en somme de deux facteurs. Étant donné qu'on est formé depuis tout petit à multiplier, on travaille plus facilement—du moins au début—avec la multiplication que la comultiplication.

Par définition des cochaînes singulières comme le complexe dual des chaînes singulières (cf 5.5) on a une application bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : C^i(X) \otimes C_i(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, $(f, x) \mapsto f(x)$. On peut étendre cet accouplement pour donner une structure de $(C^*(X), \cup)$ -module aux chaînes comme suit.

Définition 4.4.26 (Le produit cap). On appelle *produit cap*, les applications bilinéaires

$$\cap : C^i(X) \otimes C_n(X) \rightarrow C_{n-i}(X)$$

donnée, pour toute cochaîne $\beta \in C^i(X)$ et pour tout simplexe singulier $\sigma \in C_n(X)$, par

$$(19) \quad \beta \cap \sigma = \langle \beta, \sigma_- \rangle \sigma_+,$$

où $\sigma_- = \partial_{i+1} \partial_{i+2} \dots \partial_n \sigma \in C_i(X)$ et $\sigma_+ = \partial_0^i \sigma \in C_{n-i}(X)$.

Il découle de (19) et des propriétés du cup-produit que le produit cap vérifie les propriétés suivantes :

Lemme 4.4.27. Pour toute cochaîne $\beta \in C^i(X)$ et chaîne $c \in C_n(X)$, on a

$$(20) \quad \langle \alpha, \beta \cap c \rangle = \langle \alpha \smile \beta, c \rangle$$

pour tout $\alpha \in C^{n-i}(X)$.

De plus, pour tout $\alpha' \in C^j(X)$, on a

$$(21) \quad \alpha' \cap (\beta \cap c) = (\alpha' \smile \beta) \cap c$$

ainsi que les identités suivantes :

$$(22) \quad 1 \cap c = c$$

$$(23) \quad \partial(\beta \cap c) = \delta\beta \cap c + (-1)^{\deg \beta} \beta \cap \partial c.$$

Enfin pour toute application continue $f : Y \rightarrow X$ et toute chaîne $c' \in C_*(Y)$, on a

$$(24) \quad f_*(f^*(\beta) \cap c') = \beta \cap f_*(c').$$

La dernière équation exprime la functorialité du produit cap. Il découle de (23) que le produit cap passe à la cohomologie et y définit un produit

$$\cap : H^i(X) \otimes H_n(X) \rightarrow H_{n-i}(X)$$

encore appelé *produit cap*.

Les propriétés précédentes se résument de la façon suivante :

Lemme 4.4.28. *Le cap-produit fait de $C_\bullet(X)$ un module à gauche différentiel gradué sur l'algèbre différentielle graduée $(C^\bullet(X), \cup)$.*

En homologie, il fait de l'homologie un module gradué sur l'algèbre de cohomologie $(H^\bullet(X), \cup)$.

4.5. UN APERÇU DE LA DUALITÉ DE POINCARÉ

La dualité de Poincaré est un résultat majeur qui a de fait grandement motivé l'introduction et le développement de la (co)homologie. Elle est basée sur l'idée que si on a une triangulation d'un espace de dimension n , alors, la "triangulation duale" (obtenue en voyant les simplexes de dimensions n comme dual de leur barycentre, les points comme le dual d'un n -simplexe, une arête comme le dual d'une face de codimension 1 etc..) est aussi une triangulation de cet espace. Pour que ce dernier point soit vrai, il faut que l'espace en question soit un minimum homogène, en pratique qu'au voisinage de tout point, on ait une triangulation ressemblant à celle du disque de dimension n (c'est-à-dire d'un n -simplexe). Cela revient à avoir une variété polyédrale. *La conséquence de cette dualité et de la formule d'Euler-Poincaré 3.3.2 est que l'on doit avoir des nombres de Betti égaux en dimension k et $n - k$.* Ce qui a de nombreuses conséquences calculatoires et de structure.

Nous allons donner ici un énoncé précis, mais sans démonstration détaillée.

Définition 4.5.1. Une *variété topologique* de dimension n est un espace topologique qui admet un recouvrement par des ouverts (U_i) homéomorphes à \mathbb{R}^n .

Une *variété différentiable* de dimension n de classe C^k est une variété topologique de dimension n telle que l'on peut choisir de plus les homéomorphismes $\phi_i : U_i \cong \mathbb{R}^n$ ci-dessus de sorte que pour tout i, j on ait $\phi_i \circ \phi_{j-1} : \phi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$ est un difféomorphisme de classe C^k (entre sous-espaces de \mathbb{R}^n).

Une *variété PL* de dimension n est une variété topologique de dimension n telle que l'on peut choisir de plus les homéomorphismes $\phi_i : U_i \cong \mathbb{R}^n$ ci-dessus de sorte que pour tout i, j on ait $\phi_i \circ \phi_{j-1} : \phi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$ est un homéomorphisme PL (au sens de la définition 3.1.15)

Un choix de recouvrement (U_i) et d'homéomorphismes $\phi_i : U_i \cong \mathbb{R}^n$ s'appelle un *atlas*.

Remarque 4.5.2. Le théorème d'invariance du domaine 1.2.1 garantit que la dimension est une notion bien définie pour une variété topologique.

Par ailleurs, notons que d'après les résultats que l'on a énoncé dans la partie 3.1, tout ouvert de \mathbb{R}^n (qui est une variété différentiable) admet une telle structure de sorte qu'une variété PL est en particulier un espace polyédral au sens de la définition 3.1.17.

Il existe une notion d'orientation pour une variété topologique V , qui est basée sur la donnée d'un choix cohérent d'isomorphismes $H_n(V, V \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ pour tout $x \in V$, cf la remarque 4.5.4. Puisque la plupart des exemples en pratique sont de nature différentiables ou triangulés nous nous bornons à énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.5.3. *Soit V une variété topologique de dimension n .*

- *Si V est de classe C^1 , alors V est orientable si et seulement si elle est orientable au sens usuel des cartes : c'est-à-dire que dans la définition 4.5.1 on peut choisir*

les homéomorphismes ϕ_i de sorte que les $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ soient des difféomorphismes préservant l'orientation⁶⁹.

- Si V est PL, alors V est orientable si et seulement si dans la définition 4.5.1 on peut choisir les homéomorphismes PL ϕ_i de sorte que les $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ préservent l'orientation⁷⁰.
- Si $V \cong |K|$ est un variété PL compacte, alors, elle est orientable si et seulement si il existe une orientation des simplexes de dimension n de V telle que $\sum_{\gamma \in K^{(n)}} \gamma$ est un cycle.

Remarque 4.5.4. Si V est compacte et orientée, on dispose d'une classe $[V] \in H_n(V)$ dont l'image, pour tout $x \in V$, dans $H_n(V, V \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ est un générateur. C'est à dire d'une classe induisant les orientations locales en tout x de V . Cette classe s'appelle *la classe fondamentale* de V .

Plus précisément on a le lemme suivant (qui reprend la proposition 4.5.3).

Lemme 4.5.5. *Soit V une variété connexe de dimension n . Alors, pour tout anneau R , on a*

$$H_n(V, R) \cong \begin{cases} R & \text{si } V \text{ est orientable et compacte,} \\ \ker(R \xrightarrow{\times 2} R) & \text{si } V \text{ n'est pas orientable mais compacte,} \\ 0 & \text{si } V \text{ n'est pas compacte.} \end{cases}$$

En particulier $H_n(V) \cong \mathbb{Z}$ si V est orientable et compact et est nul sinon.

Terminologie 4.5.6. Lorsque V est compacte orientable, le choix d'un cycle V dont la classe d'homologie est un générateur de $H_n(V)$ s'appelle le choix d'un *cycle fondamental*. Ce cycle tout comme la classe se note $[V]$.

Exemple 4.5.7. Un cycle donné par une orientation des simplexes de dimension maximale d'une variété PL comme dans la proposition 4.5.3 est un cycle fondamental.

Théorème 4.5.8 (Dualité de Poincaré). *Soit V une variété compacte orientée (sans bord) de dimension n . Notons $[V] \in H_n(V)$ sa classe fondamentale (terminologie 4.5.6).*

- (1) *L'application $\alpha \mapsto \alpha \cap [V]$ est un quasi-isomorphisme $C^*(X) \xrightarrow{\cap [V]} C_n(X)$ et induit en particulier des isomorphismes*

$$H^i(V) \cong H_{n-i}(V).$$

- (2) *Les groupes de (co)homologie de V sont de type finis et de plus*

(a) *pour tout corps \mathbb{F} , on en déduit des isomorphismes $H_i(V, \mathbb{F}) \cong H^i(V, \mathbb{F}) \cong H_{n-i}(V, \mathbb{F})$ et en particulier $b_i(V, \mathbb{F}) = b_{d-i}(V, \mathbb{F})$.*

- (b) *Sur \mathbb{Z} on a, en notant $\text{Tors}_k(V)$ la partie de torsion de $H_k(V)$,*

$$b_i(V) = b_{d-i}(V) \quad \text{et}$$

$$\text{Tors}_i(V) \cong \text{Tors}_{d-i-1}(V).$$

Ainsi, on a une symétrie entre les groupes d'homologie (resp. cohomologie) d'une variété orientable compacte. Le point (2) est une collection de conséquences du théorème des coefficients universels 5.5.8 et du point (1) (cf remarque 5.5.10).

Remarque 4.5.9. Pour les variétés non-orientables le théorème reste vrai si l'on prend les coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

69. Autrement dit leur différentielle en tout point est de déterminant > 0 .

70. Autrement dit les isomorphismes affines induits sur une subdivision sont toutes de déterminant > 0 .

Remarque 4.5.10. L'isomorphisme donné par la dualité de Poincaré donne que le produit sur la cohomologie s'étend à l'homologie. Géométriquement, si $[W] \in H_i(V)$ et $[W'] \in H_j(V)$ sont des classes d'homologie données par des sous-variétés compactes orientées transverses, alors leur produit est donné par la classe $[W \cap W']$ donnée par l'intersection des deux-variétés.

Il est fondamental (comme le montre l'exemple suivant dû à Poincaré) que V soit une variété pour que le théorème soit vrai, et ce résultat est une source de richesse et de caractérisation des groupes d'homologie d'une variété.

Exemple 4.5.11 (un contre-exemple). Soit $X = \Sigma(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ la suspension d'un tore de dimension 2. L'espace X est polyédral de dimension 3 et a deux points singuliers en les sommets des deux cônes. Il découle de la proposition 4.2.15 et du calcul des groupes d'homologie du tore que l'on a :

$$H_0(X) = \mathbb{Z}, \quad H_1(X) = \mathbb{Z}, \quad H_2(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad H_3(X) = \mathbb{Z}.$$

La dualité de Poincaré est donc contredite dans cet exemple. Ce qui prouve au passage que $\Sigma(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ n'est pas une variété orientable. Le théorème, appliqué à $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et les calculs de l'homologie du tore dans ce cas montrent aussi que ce n'est pas une variété tout court.

On va donner une démonstration du point (1) du théorème 4.5.8 par récurrence *via* des suites de Mayer-Vietoris ; on commence donc par donner un sens à la dualité de Poincaré lorsque V n'est pas compacte.

Commençons par remarquer que pour toute paire (X, A) , on a encore un produit cap

$$C^i(X, A) \otimes C_n(X, A) \rightarrow C_{n-i}(X)$$

et aussi

$$C^i(X) \otimes C_j(X, A) \rightarrow C_{j-i}(X, A)$$

(car $C^i(X, A)$ est le sous-espace des i -cochaînes singulières de X qui s'annulent sur $C_i(A)$). Il suit que l'on obtient un morphisme :

$$H^i(X, A) \otimes H_n(X, A) \rightarrow H_{n-i}(X).$$

Maintenant si V est une variété non compacte, on appelle *groupes d'homologie de Borel-Moore* les groupes

$$\overline{H}_i(V) := H_i(\overline{V}, *),$$

où \overline{V} désigne la compactification d'Alexandroff et $*$ le point à l'infini.⁷¹ C'est une théorie « de type homologique⁷² » : si $V = |K|$ elle est associée au complexe de chaîne constitué des combinaisons formelles infinies de simplexes de K . On peut encore —par dualité— lui associer un complexe de cochaînes (comme dans la définition 5.5.1). La cohomologie associée \overline{H}^i est aussi appelée *cohomologie à support compact*.

On note encore $[V]$ la classe fondamentale en homologie de Borel-Moore. Étant donné $\alpha \in \overline{H}^i$, on peut former le produit cap

$$D(\alpha) = \alpha \cap [V].$$

71. Noter qu'il n'est pas essentiel ici de prendre la compactification d'Alexandroff, toute autre compactification aurait fait l'affaire à condition de considérer son homologie relative par rapport au sous-ensemble ajouter lors de la compactification ; dans tous les cas ici, l'inclusion du bord vérifie les hypothèses du théorème 4.2.11 d'écrasement.

72. On prendra garde cependant qu'elle n'est pas invariante par homotopie. Et elle ne donne donc pas un invariant homotopique mais "seulement" un invariant topologique.

Théorème 4.5.12 (Dualité de Poincaré-Lefschetz). *Si V est une variété orientable sans bord de dimension d , l'application D induit un isomorphisme*

$$\overline{H}^i(V) \cong H_{d-i}(V).$$

Démonstration. 1. Le théorème est vrai si $V = \mathbb{R}^d$ (il s'agit du calcul, une nouvelle fois, de l'homologie de la paire (D^n, S^{n-1}) , ou plus exactement de la cohomologie relative $\tilde{H}_i(S^n)$).

2. Supposons que $V = A \cup B$ avec A, B et $A \cap B$ ouverts vérifiant le théorème. Alors le théorème est vrai pour V .

On le montre en comparant les suites exactes longues de Mayer-Vietoris et en utilisant le lemme des cinq.

3. On conclut par récurrence pour les variétés qui sont l'intérieur d'une variété compacte. Pour des variétés plus générales, on utilise le lemme des petites chaînes pour se ramener au cas (relativement) compact. \square

Preuve du théorème 4.5.8. Lorsque V est un espace compact, alors $\overline{V} \cong V \amalg \{*\}$ puisque le point à l'infini $*$ est ouvert car c'est le complémentaire du compact V dans \overline{V} . Il suit du lemme 4.2.10 que l'inclusion $V \hookrightarrow \overline{V}$ induit des quasi-isomorphismes

$$C_*(V) \longrightarrow C_*(\overline{V}, \{*\})$$

d'où il suit que $\overline{H}^i(V) \cong H^i(V)$ et le théorème 4.5.8 devient une conséquence du théorème 4.5.12. \square

Remarque 4.5.13. Remarquons pour finir que l'on a aussi

$$\overline{H}_i(V) \cong H^{d-i}(V)$$

et que la dualité de Poincaré pour les variétés à bord se déduit de la dualité de Poincaré-Lefschetz :

$$\begin{aligned} H_i(V, \partial V) &\cong \overline{H}_i(V \setminus \partial V) \cong H^{d-i}(V), \\ H_i(V) &\cong \overline{H}^{d-i}(V \setminus \partial V) \cong H^{d-i}(V, \partial V). \end{aligned}$$

4.6. (CO)HOMOLOGIE DES ESPACES PRODUITS ET FORMULE DE KÜNNETH

On va s'intéresser ici au rapport entre l'homologie d'un produit $X \times Y$ d'espaces et l'homologie de X et Y et donner une formule générale très utile pour la calculer via le produit tensoriel 5.1.14.

Notons d'abord que l'on a un isomorphisme linéaire canonique

$$AW_0 : C_0(X \times Y) = \mathbb{Z}\langle X \times Y \rangle \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}\langle X \rangle \otimes \mathbb{Z}\langle Y \rangle = C_0(X) \otimes C_0(Y)$$

qui envoie un 0-simplexe singulier (c'est-à-dire un point) $\{(x, y)\} \in X \times Y$ sur $\{x\} \otimes \{y\}$. Ceci suggère que les chaînes singulières d'un produit sont équivalentes au produit tensoriel des chaînes singulières. Mais attention, nous verrons que la relation au niveau des groupes d'homologie est un peu plus subtile car l'homologie d'un produit tensoriel n'est pas forcément le produit tensoriel des homologies si on est pas sur un corps. Voir le Théorème de Künneth 4.6.4.

Définition 4.6.1 (Produit tensoriel de complexes). Si C_\bullet, D_\bullet sont des complexes de chaînes, leur produit tensoriel $C_\bullet \otimes D_\bullet$ est le complexe donné en degré n par la formule

$$(C_\bullet \otimes D_\bullet)_n := \bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes D_j$$

muni de la différentielle, définie pour $x \in C_i, y \in D_j$, par

$$d(x \otimes y) := d(x) \otimes y + (-1)^i x \otimes d(y).$$

Que $C \otimes D$ soit bien un complexe découle de l'identité

$$\begin{aligned} d(d(x \otimes y)) &= d(d(x) \otimes y + (-1)^i x \otimes d(y)) \\ &= d^2(x) \otimes y + (-1)^{i-1} d(x) \otimes d(y) + (-1)^i d(x) \otimes d(y) + (-1)^{2i} x \otimes d^2(y) = 0. \end{aligned}$$

Remarque 4.6.2. On remarque que le signe⁷³ donné assure que $d^2 = 0$. La même construction donne le produit tensoriel de cochaînes.

Le résultat suivant précise l'équivalence entre chaînes du produit et produit tensoriel des chaînes.

Proposition 4.6.3. (Eilenberg-Zilber)

- (1) Il existe un quasi-isomorphisme naturel de complexes $C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y) \xrightarrow{\times} C_\bullet(X \times Y)$ dont la restriction en degré 0 est précisément le morphisme canonique AW_0^{-1} . De plus, deux tels morphismes de complexes naturels sont homotopes⁷⁴.
- (2) Il existe un quasi-isomorphisme naturel $C_\bullet(X \times Y) \xrightarrow{AW_\bullet} C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)$ dont la restriction en degré 0 est précisément le morphisme canonique AW_0 . De plus, deux tels morphismes de complexes fonctoriels sont homotopes.
- (3) Les compositions $AW_\bullet \circ \times$ et $\times \circ AW_\bullet$ sont homotopes à l'identité.

On appelle \times le *cross-produit* ou *produit en croix* si on veut faire francophone.

Rappelons que la naturalité signifie que si $f : X \rightarrow X'$ et $g : Y \rightarrow Y'$ sont des applications continues, alors, le diagramme suivant est commutatif :

$$(25) \quad \begin{array}{ccc} C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y) & \xrightarrow{\times} & C_\bullet(X \times Y) \\ f_* \otimes g_* \downarrow & & \downarrow (f \times g)_* \\ C_\bullet(X') \otimes C_\bullet(Y') & \xrightarrow{\times} & C_\bullet(X' \times Y'). \end{array}$$

Esquisse de preuve. On démontre classiquement ceci en utilisant la méthode des modèles acycliques (que nous avons déjà entre aperçue dans la démonstration de l'invariance par homotopie de l'homologie singulière). Par exemple, regardons le cas de AW_\bullet .

On raisonne par récurrence pour construire AW_\bullet puisque on connaît déjà sa valeur en degré 0 (et qu'elle vérifie bien toutes les propriétés demandées).

Premièrement, par functorialité, il suffit, pour tout n de démontrer le résultat en degré n pour $X = Y = \Delta^n$ le n -simplexe standard. En effet, pour tout n -simplexe $\sigma : \Delta^n \rightarrow X \times Y$, en notant $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ et $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ les projections canoniques, $\text{diag} : \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times \Delta^n \in C_n(\Delta^n \times \Delta^n)$ la diagonale $x \mapsto (x, x)$, on doit avoir :

$$AW_\bullet(\sigma) = AW_\bullet \circ (\pi_X \circ \sigma \times \pi_Y \circ \sigma)_*(\text{diag}) = (\pi_X \circ \sigma)_* \otimes (\pi_Y \circ \sigma)_*(AW_\bullet(\text{diag})).$$

On est donc ramené à démontrer le résultat pour les applications diagonales entre simplexes.

Deuxièmement, comme AW_\bullet doit être un morphisme de complexe, on doit avoir :

$$d(AW_\bullet(\text{diag})) = AW_\bullet(d(\text{diag}))$$

où le terme $d(\text{diag})$ est dans $C_{n-1}(\Delta^{n-1})$; en particulier, le terme de droite est bien défini par hypothèse de récurrence (on cherche à établir l'existence de celui de gauche). On peut vérifier, en appliquant l'hypothèse de récurrence que $AW_\bullet(d(\text{diag}))$ est un cycle. Comme Δ^{n-1} est contractile, il en suit que c'est un bord et il existe donc $(AW_\bullet(\text{diag}))$ vérifiant l'équation. Ceci construit le morphisme de complexes AW_\bullet (dont on a déjà forcé la naturalité).

73. Cette convention de signe est précisément celle donnée dans la remarque 5.5.5.

74. i.e. si ϕ, ψ sont deux tels morphismes, il existe $h : C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y) \xrightarrow{\times} C_{\bullet+1}(X \times Y)$ tel que $\phi - \psi = d \circ h + \pm h \circ d$ et l'homotopie est elle-même fonctorielle.

On obtient de même \times en considérant $(\Delta^p \xrightarrow{id} \Delta^p) \otimes (\Delta^{n-p} \xrightarrow{id} \Delta^{n-p}) \in C_\bullet(\Delta^p) \times C_\bullet(\Delta^{n-p})$ à la place de l'application diag.

Les relations d'homotopie sont aussi démontrées de la même façon... En d'autres termes, on utilise en fait simplement que les simplexes standards forment une famille contractiles d'objets à partir desquels tous nos simplexes singuliers sont définis par functorialité. \square

Il suit de la définition 4.6.1 qu'un produit tensoriel $c \otimes c'$ de cycles est un cycle et que le produit tensoriel d'un bord et d'un cycle est un bord. Il suit que le produit en croix et le produit tensoriel passent à l'homologie pour donner une application *naturelle*

$$(26) \quad H_i(X) \otimes H_j(Y) \rightarrow H_{i+j}(C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)) \xrightarrow{\times} H_{i+j}(X \times Y)$$

également appelée le cross-produit (et encore notée \times). On sait que la flèche de droite est un isomorphisme d'après la proposition précédente 4.6.3. En revanche *celle de gauche ne l'est pas* en général. La raison en est que le produit tensoriel ne préserve pas les suites exactes⁷⁵, comme nous le verrons dans la partie 6.1. Cependant, nous verrons qu'on peut remplacer le produit tensoriel par un foncteur « dérivé » à valeur dans les complexes de chaînes qui lui, préserve les suites exactes et dont les groupes d'homologie « mesureront le défaut » du produit tensoriel par un module à préserver les suites exactes. On en déduira en particulier que le conoyau de (26) se calcule en termes d'un foncteur simple : Tor_1 ce qui donne l'utile théorème de Künneth suivant.

Théorème 4.6.4 (Formule de Künneth en homologie). *Soient X, Y des espaces topologiques.*

(1) *On a des suites exactes courtes scindées (non-naturellement) :*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i+j=n} H_i(X) \otimes H_j(Y) \xrightarrow{\times} H_n(X \times Y) \rightarrow \bigoplus_{k+l=n-1} Tor_1(H_k(X), H_l(Y)) \rightarrow 0.$$

On a la même suite exacte pour l'homologie à coefficient dans tout anneau principal.

(2) *En particulier, si \mathbb{F} est un corps, le morphisme naturel*

$$\bigoplus_{i+j=n} H_i(X, \mathbb{F}) \otimes H_j(Y, \mathbb{F}) \rightarrow H_n(X \times Y, \mathbb{F})$$

est un isomorphisme.

Attention : le morphisme \times (26) est bien naturel, c'est le scindement de la suite exacte qui ne l'est pas (c'est-à-dire les sections $Tor_1(H_k(X), H_l(Y)) \rightarrow H_n(X \times Y)$).

Ce théorème sera la conséquence du théorème des coefficients universels 6.3.1.

On dispose également d'un *cross-produit* en cohomologie induit par dualité à partir de la proposition 4.6.3. Il est défini par la formule :

$$C^i(X) \otimes C^j(Y) \rightarrow Hom(C_i(X) \otimes C_j(Y), \mathbb{Z}) \xrightarrow{(AW\bullet)^*} C^{i+j}(X \times Y)$$

où la flèche de gauche est l'application qui envoie $c \otimes c'$ sur l'application $\sigma \otimes \sigma' \mapsto (-1)^{ij} c(\sigma) c'(\sigma')$. Ce cross-produit est encore défini pour les cochaînes à coefficient dans n'importe quel anneau. Puisque toutes les flèches dans la formule sont des morphismes de complexes, on a :

Lemme 4.6.5. *Le cross-produit $C^i(X) \otimes C^j(Y) \rightarrow C^{i+j}(X \times Y)$ est un morphisme de complexes de chaînes. En particulier il induit un cross produit en cohomologie :*

$$H^i(X) \otimes H^j(Y) \rightarrow H^{i+j}(X \times Y).$$

Le cross-produit est compatible avec les structures d'algèbres.

75. Elle ne préserve donc pas des groupes d'homologie qui sont donnés par des quotients de noyau.

Proposition 4.6.6. *Le cross produit $H^\bullet(X) \otimes H^\bullet(Y) \rightarrow H^\bullet(X \times Y)$ est un morphisme d'algèbres graduées commutatives.*

La preuve de cette proposition est basée sur la functorialité du cross produit et du cup-produit et les deux lemmes suivants.

On peut trouver des formules explicites pour \times et AW_\bullet . En particulier, on peut vérifier ⁷⁶ qu'une construction possible pour AW_\bullet (due à Alexander-Whitney) est précisément :

$$AW(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^{i(n-i)} (\pi_X)_* \circ \sigma_- \otimes (\pi_Y)_* \circ \sigma_+$$

où σ_- , σ_+ sont définis comme dans le paragraphe sur le cup-produit.

On en déduit :

Lemme 4.6.7. *Le cup-produit au niveau des cochaînes est la composition*

$$C^i(X) \otimes C^j(X) \rightarrow \text{Hom}(C_i(X) \otimes C_j(X), \mathbb{Z}) \xrightarrow{(AW_\bullet)^*} C^{i+j}(X \times X) \xrightarrow{\text{diag}^*} C^{i+j}(X)$$

Autrement dit on a, pour $c, c' \in C^\bullet(X)$, la formule :

$$c \smile c' = \Delta_X^*(c \times c').$$

En passant en cohomologie, on obtient que, étant donné deux classes de cohomologie $\alpha \in H^i(X)$ et $\beta \in H^j(X)$, on a :

$$\alpha \smile \beta = \Delta_X^*(\alpha \times \beta).$$

De là (et de la naturalité de ces produits) il découle que l'on a le lemme suivant — qui peut aussi servir de définition du produit \times .

Lemme 4.6.8. *Soient $\alpha \in H^i(X)$ et $\beta \in H^j(Y)$. On a :*

$$\alpha \times \beta = (\pi_X^* \alpha) \smile (\pi_Y^* \beta) \in H^{i+j}(X \times Y),$$

où $p_X : X \times Y \rightarrow X$ est la projection sur le premier facteur et $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$ la projection sur le deuxième facteur.

Exercice 4.6.9. Démontrer la proposition 4.6.6.

^{76.} Cette vérification est essentiellement équivalente à la preuve du lemme 4.4.13.

V. ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

5.1. MODULES ET GROUPES ABÉLIENS

Nous réunissons ici les quelques résultats et définitions utiles sur les modules et groupes abéliens que nous utilisons.

Soit R un *anneau commutatif unitaire*. Un R -module est défini de manière analogue à un espace vectoriel sur un corps, mais lorsque R n'est pas un corps, on ne dispose pas de base pour étudier les R -modules de manière systématique ce qui complique mais fait aussi en partie la richesse de cette théorie plus générale.

Définition 5.1.1. Un R -module est un groupe abélien $(M, +)$ muni d'une action $(r, m) \mapsto r \cdot m$ de R sur M vérifiant que pour tout $x, y \in R$ et $m, n \in M$, on a que

- $(xy) \cdot m = x \cdot (y \cdot m)$,
- $(x + y) \cdot m = x \cdot m + y \cdot m$,
- $x \cdot (m + n) = x \cdot m + y \cdot n$,
- $1 \cdot m = m$.

Un morphisme entre deux R -modules⁷⁷ M, N est un morphisme de groupe abélien $f : M \rightarrow N$ qui vérifie en outre que $f(x \cdot m) = x \cdot f(m)$ pour tout $x \in R, m \in M$.

Un sous-module de M est un sous-groupe de M stable sous l'action de R .

Évidemment, la multiplication $(x, y) \mapsto xy$ fait de R un R -module.

Remarque 5.1.2. La donnée d'un \mathbb{Z} -module est exactement la donnée d'un groupe abélien et tout groupe abélien est canoniquement un \mathbb{Z} -module. Autrement dit, il n'y a pas de différences entre les \mathbb{Z} -modules et les groupes abéliens.

Définition 5.1.3. Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de R -modules.

- Le produit $\prod_{i \in I} M_i$ est le module dont le sous-ensemble sous-jacent est le produit des ensembles M_i , muni de l'addition définie par $(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i)$ et de l'action $r \cdot (x_i) = (r \cdot x_i)$.
- La somme directe des M_i , dénotée $\bigoplus_{i \in I} M_i$, est le sous-module donné par les éléments dont toutes les coordonnées sauf un nombre fini sont nulles.

La somme directe de R -modules est donc complètement analogue à la somme directe d'espaces vectoriels

Lemme 5.1.4. *Le produit et la somme directe sont bien des R -modules.*

Exercice 5.1.5. Démontrer que le produit de modules est le produit dans la catégorie $R\text{-Mod}$ et que la somme directe est le coproduit dans cette même catégorie.

Définition 5.1.6 (Modules libres). Un R -module libre est un R -module isomorphe à une somme directe de copies de R : $M \cong \bigoplus_I R$.

Un module libre est dit de *type fini* (ou de rang fini ou dimension finie) si l'ensemble I est fini.

Enfin si S est un ensemble, on appellera *module librement engendré* par S , le module libre donné par $R[S] := \bigoplus_{s \in S} R$. On notera en général ses éléments sous la forme $\sum_{s \in S} \lambda_s s$ où $(\lambda_s)_{s \in S}$ est une famille d'éléments de R qui sont tous nuls sauf pour un nombre fini d'éléments.

⁷⁷. aussi simplement appelée application R -linéaire

Si R est un corps, tout module est libre en raison de l'existence de bases. Un module libre est en fait complètement similaire à une espace vectoriel et un module librement engendré par S a une base canonique. Par définition, un R -module libre est isomorphe à un R -module librement engendré (une fois choisi un I satisfaisant la définition ci-dessus).

Le fait que la somme directe soit un coproduit se traduit par la propriété universelle suivante (par ailleurs facile à démontrer)

Lemme 5.1.7. *Les morphismes de R -module d'un module libre $M[S]$ dans un R -module N sont en bijection avec les applications ensemblistes $S \rightarrow N$. Précisément, la bijection associe à $f : S \rightarrow N$, l'application $\sum_{s \in S} \lambda_s s \mapsto \sum_{s \in S} \lambda_s \cdot f(s)$.*

- Exemples 5.1.8.*
- (1) Si $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est canoniquement un \mathbb{Z} -module qui n'est pas libre (car il est de torsion).
 - (2) les nombres rationnels \mathbb{Q} sont aussi un \mathbb{Z} -module qui n'est pas libre.
 - (3) Les polynômes $R[x]$ sont un R -module libre qui est une R -algèbre, c'est-à-dire un anneau et un R -module tel que la multiplication est R -bilinéaire. Si I est un idéal de $R[x]$, alors $R[x]/I$ est aussi un R -module qui n'est pas forcément libre.
 - (4) Le noyau et l'image d'un morphisme de R -modules sont des R -modules canoniquement.
 - (5) Le groupe abélien quotient d'un R -module par un sous- R -module est canoniquement un R -module.
 - (6) Soit M un R -module et soit $L := R[M] = \bigoplus_M R$ le groupe abélien libre engendré par les éléments de M . L'application qui à un élément de m de la base canonique de L associe l'élément m dans M (autrement dit $(\lambda_m) \mapsto \sum \lambda_m m \in M$, l'application qui transforme les combinaisons linéaires formelles en somme dans le groupe abélien M) est un morphisme de R -module surjectif par construction, donc $M \cong L / \ker(L \rightarrow M)$. Ainsi tout R -module est un quotient d'un R -module libre.

Exercice 5.1.9. Démontrer que \mathbb{Q} n'est pas un \mathbb{Z} -module libre.

Définition 5.1.10. Un R -module M est dit de type fini si c'est un quotient d'un R -module libre de rang fini par un sous- R -module.

Autrement dit, un module de type fini est engendré par un nombre fini d'éléments (ce nombre peut ne pas être canonique sur un anneau quelconque).

Nous serons particulièrement intéressé par le cas des \mathbb{Z} -modules de type fini. Ces derniers ont des propriétés remarquables que nous énonçons sans démonstration.

Lemme 5.1.11. *Tout sous-groupe N d'un groupe abélien libre M est libre, de rang inférieur ou égal à celui de M .*

Ce lemme reste vrai pour les R -modules libres sur un anneau *principal* mais ne l'est pas en général.

Une conséquence du lemme 5.1.11 et de l'exemple 5.1.8.6 est que tout sous-groupe abélien est le quotient d'un groupe abélien libre par un groupe abélien libre.

Un résultat important pour les groupes abéliens libres (qui se généralise aussi aux anneaux principaux) :

Théorème 5.1.12 (Théorème de structure des groupes abéliens). *Soit M un \mathbb{Z} -module de type fini. Alors il existe un entier $r \geq 0$ et une suite, unique à permutation près, m_1, \dots, m_s de puissance de nombres premiers tels que l'on ait un isomorphisme de \mathbb{Z} -modules :*

$$M \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z}.$$

De manière équivalente il existe un unique entier r et une unique suite n_1, \dots, n_k d'entiers > 1 vérifiant que n_{i+1} divise n_i (pour tout $i = 1 \dots k-1$) tels que l'on ait un isomorphisme de \mathbb{Z} -modules :

$$M \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}.$$

Terminologie : L'entier r du théorème, qui est donc canoniquement défini est appelé le **rang** de M . La partie de la forme $\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z}$ est appelée la **torsion** de M .

Le résultat suivant (qui sera démontré en TD) est très utile en pratique pour démontrer qu'un morphisme est un isomorphisme en le coinçant dans une suite exacte longue.

Lemme 5.1.13 (Lemme des cinq). *Considérons le diagramme commutatif suivant de modules, dont les flèches sont des morphismes de R -modules, et dont les lignes sont exactes :*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E'. \end{array}$$

Si les première, seconde, quatrième et cinquième flèches verticales sont des isomorphismes, alors la troisième aussi.

Nous terminons cette partie par la notion de produit tensoriel, qui est à la somme directe de modules ce que la multiplication est à l'addition pour les entiers. Nous allons le définir comme solution d'une propriété universelle.

Soit M, N, L trois R -modules. Rappelons qu'une application R -bilinéaire $M \times N \rightarrow L$ est simplement une application R -linéaire en chaque variable : $f(rm, n) = rf(m, n) = f(m, rn)$ pour tout $(m, n, r) \in M \times N \times R$.

Proposition et Définition 5.1.14 (produit tensoriel). *Il existe un unique (à isomorphisme de R -modules près) R -module $M \otimes_R N$ et une application R -bilinéaire $\phi : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$ telle que pour toute application R -bilinéaire $f : M \times N \rightarrow L$, il existe une unique application R -linéaire $\tilde{f} : M \otimes_R N \rightarrow L$ rendant le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\phi} & M \otimes_R N \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & L \end{array}$$

commutatif.

Le R -module $M \otimes_R N$ est appelé le **produit tensoriel** de M et N . On notera $m \otimes_R n$ l'image $\phi(m, n)$.

On notera que \tilde{f} est linéaire pas bilinéaire. Autrement dit, $M \otimes_R N$ est le R -module au travers duquel se factorise *linéairement* toutes les applications *bilinéaires*.

En prenant $f = \phi$ dans la proposition (et par unicité $\tilde{\phi} = \text{id}$), on obtient les propriétés suivantes, pour tout $(m, m', n, n', r) \in M^2 \times N^2 \times R$

$$(27) \quad rm \otimes_R n = m \otimes_R rn = r(m \otimes_R n)$$

$$(28) \quad (m + m') \otimes_R (n + n') = m \otimes_R n + m \otimes_R n' + m' \otimes_R n + m' \otimes_R n'.$$

Exemple 5.1.15. Le produit tensoriel de modules libres est facile à calculer :

$$R^n \otimes_R R^m \cong R^{n+m}$$

et plus généralement, $R^I \otimes_R R^J \cong R^{I \times J}$ pour tous ensembles I, J . Ceci découle immédiatement du fait qu'une application linéaire $R^{I \times J} \rightarrow L$ est la même chose que la donnée des images des vecteurs de la base. En particulier si $(e_i)_{i \in I}$ et $(e'_j)_{j \in J}$ sont des bases de modules libres M, N alors $M \otimes_R N$ est libre et admet pour base la famille $(e_i \otimes_R e'_j)_{(i,j) \in I \times J}$.

En particulier, si R est un corps, le produit tensoriel de R -espaces vectoriels est un espace vectoriel de dimension le produit des dimensions.

De l'exemple 5.1.15 découle que si $(m_i)_{i \in I}$ et $(n_j)_{j \in J}$ sont des familles génératrices de M, N , un élément x de $M \otimes_R N$ est une combinaison linéaire finie

$$(29) \quad x = \sum_{k=1}^n \lambda_k (m_{i_k} \otimes n_{j_k}).$$

En revanche, si M et N ne sont pas libres, il n'y a pas unicité d'une telle écriture en général. Notons

Lemme 5.1.16. *Le produit tensoriel est un foncteur $R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$. De plus, pour tout R -module M , on a un foncteur $R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ donné par $N \mapsto M \otimes_R N$.*

Notons que l'on a aussi un foncteur $N \mapsto N \otimes_R M$. Le lemme 5.1.17 prouve que ce deuxième foncteur est naturellement isomorphe à celui du lemme 5.1.16.

Démonstration. Si $g : M \rightarrow M'$ et $h : N \rightarrow N'$ sont des morphismes de R -modules, alors pour toute application bilinéaire $f : M' \times N' \rightarrow L$, la composée $(n, m) \mapsto f(g(n), h(m))$ est R -bilinéaire. En particulier, si on note $\phi' : M' \times N' \rightarrow M' \otimes_R N'$ l'application canonique, $\phi' \circ (f, g)$ est aussi bilinéaire. La propriété universelle du produit tensoriel donne alors l'existence d'une (unique) application R -linéaire $M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N'$, notée $f \otimes_R g$ vérifiant $f \otimes_R g \circ \phi = \phi' \circ (f, g)$. Par unicité (ou en appliquant simplement les propriétés 27, 28) on obtient que $(f \circ f') \otimes_R (g \circ g') = (f \otimes_R g) \circ (f' \otimes_R g')$ et que l'identité est préservée. La deuxième partie du lemme est une conséquence immédiate de la première. \square

Lemme 5.1.17. *On a des isomorphismes naturels⁷⁸*

$$\begin{aligned} M \otimes_R N &\cong N \otimes_R M, & (M \oplus M') \otimes_R N &\cong M \otimes_R N \oplus M' \otimes_R N, \\ (M \otimes_R N) \otimes_R P &\cong M \otimes_R (N \otimes_R P) & \text{et} \\ \text{Hom}_R(M \otimes_R N, L) &\cong \text{Hom}_R(N, \text{Hom}_R(M, L)). \end{aligned}$$

Exercice 5.1.18. Démontrer le lemme 5.1.17.

Preuve de la proposition et définition 5.1.14. L'unicité découle de la propriété universelle. Pour l'existence, nous allons donner une construction explicite. Soit $R^{(M \times N)}$ le R -module des applications à support fini de l'ensemble $M \times N$ vers R . C'est à dire qu'un élément de $R^{(M \times N)}$ est une application de $M \times N$ dans R qui vérifie que f est nulle sauf en un nombre fini de valeurs. Notons que l'ensemble $M \times N$ s'identifie au sous-ensemble de $R^{(M \times N)}$ donné par les applications qui valent 0 partout sauf en (m, n) où elles valent 1. Notons que $M \times N$ est une base de $R^{(M \times N)}$ puisque tout élément de $R^{(M \times N)}$ n'est non nul qu'en un nombre fini de valeurs.

On définit $M \otimes_R N$ comme le R -module quotient de $R^{(M \times N)}$ par les relations (où on utilise les identifications de $M \times N$ avec un sous-ensemble de $R^{(M \times N)}$)

$$\begin{aligned} (m + m', n) &= (m, n) + (m', n) \\ (m, n + n') &= (m, n) + (m, n') \\ (rm, n) &= (m, rn) \\ (rm, n) &= r(m, n). \end{aligned}$$

Ces relations impliquent en particulier que la composée $\phi : M \times N \hookrightarrow R^{(M \times N)} \twoheadrightarrow M \otimes_R N$ (de l'inclusion avec la projection sur le module quotient) est bilinéaire.

Si maintenant $f : M \times N \rightarrow L$ est bilinéaire, pour toute application \tilde{f} telle que $f = \tilde{f} \circ \phi$, on a en particulier que $\tilde{f}(m \otimes_R n) = f(m, n)$. Comme les (m, n) engendrent $R^{(M \times N)}$, les $m \otimes n$ engendrent $M \otimes_R N$ et donc $\tilde{f}(m \otimes_R n) = f(m, n)$ garantit l'unicité de \tilde{f} . Il reste à vérifier qu'elle est bien définie et R -linéaire. Pour cela, comme l'application

⁷⁸ C'est-à-dire que ces isomorphismes sont des transformations naturelles des foncteurs définis en 5.1.16 et de leurs composées avec les foncteurs donnés par Hom.

$(m, n) \mapsto f(n, m)$ s'étend en une unique application linéaire $R^{(M \times N)} \rightarrow L$ (puisque définie sur une base), on a juste besoin de vérifier que $(n, m) \mapsto f(n, m)$ passe au quotient ce qui est immédiat par bilinéarité de f . \square

Exemple 5.1.19. Soit M un R -module et $F \cong \bigoplus_I R$ un R -module libre. Alors on a un isomorphisme de R -modules $F \otimes_R M \cong \bigoplus_I M$. Ceci se démontre soit à partir de la construction soit en vérifiant directement la propriété universelle pour $\bigoplus_I M$.

Remarque 5.1.20 (Produit tensoriel, cas non-commutatif). Soit A un anneau, non nécessairement commutatif, et M un A -module à droite, N un A -module à gauche. Alors on peut encore définir la construction de la preuve de 5.1.14. C'est à dire définir

$$(30) \quad M \otimes_A N \cong (A^{(M \times N)})_{/\sim}$$

où \sim est la relation d'équivalence engendrée par les relations données, pour tout $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ et $a \in A$, par

$$(31) \quad \begin{cases} (m + m', n) &= (m, n) + (m', n) \\ (m, n + n') &= (m, n) + (m, n') \\ (ma, n) &= (m, an). \end{cases}$$

Le résultat n'est cependant plus A -linéaire, mais seulement \mathbb{Z} -linéaire (ou k -linéaire si A est une k -algèbre associative sur un anneau commutatif unitaire k ; auquel cas il faut rajouter aux relations (31) les relations rajoutant que le résultat est k -linéaire, i.e. $(m.r, n) = r.(m, n)$ pour tout $r \in k$).

Pour énoncer sa propriété universelle (dans le cas k -linéaire) on introduit la notion suivante : un *morphisme A -équilibré* est une application k -linéaire $f : M \times N \rightarrow L$, où M, N sont respectivement des A -modules à droite et à gauche et L est un k -module, qui vérifie les conditions

$$\begin{cases} f(m + m', n) &= f(m, n) + f(m', n) \\ f(m, n + n') &= f(m, n) + f(m, n') \\ f(ma, n) &= f(m, an). \end{cases}$$

Proposition 5.1.21 (produit tensoriel— cas non-commutatif). *Soit A une k -algèbre associative, M un A -module à droite et N un A -module à gauche. Il existe un unique (à isomorphisme de k -modules près) k -module $M \otimes_A N$ et un morphisme A -équilibré $\phi : M \times N \rightarrow M \otimes_A N$ tel que pour tout morphisme A -équilibré $f : M \times N \rightarrow L$, il existe une unique application k -linéaire $\tilde{f} : M \otimes_A N \rightarrow L$ rendant le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\phi} & M \otimes_A N \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & L \end{array}$$

commutatif.

Notons que si M est un A -module à droite (sur une k -algèbre associative A), la formule $(a, f) \mapsto (m \mapsto f(m \cdot a))$ définit une structure de A -module à gauche sur $\text{Hom}_k(M, L)$ pour tout k -module L . La propriété universelle du produit tensoriel se traduit par

Proposition 5.1.22. *On a une équivalence naturelle*⁷⁹

$$\text{Hom}_k(M \otimes_A N, L) \cong \text{Hom}_A(N, \text{Hom}_k(M, L)).$$

⁷⁹. de foncteurs $A\text{-Mod} \times \text{Mod-}A \times k\text{-Mod} \rightarrow k\text{-Mod}$

Exercice 5.1.23. Démontrer la proposition 5.1.22.

5.2. COMPLEXES DE CHAÎNES ET SUITES EXACTES

Nous introduisons dans cette partie la notion générale de complexes de chaînes, qui est une notion clé pour construire de nombreux invariants topologiques (ou autres) et en particulier un des acteurs principaux des chapitres 3.2, ?? et 6.3.

Remarque 5.2.1. Nous définissons ici la notion de complexe de chaînes au dessus d’anneau commutatif unitaire R quelconque. Mais en pratique, pour les applications en topologie ou géométrie, le lecteur peu à l’aise avec les R -modules généraux pourra se contenter d’imaginer le cas des \mathbb{Z} -modules, c’est-à-dire des groupes abéliens, ainsi que celui des corps $\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Par ailleurs, en pratique connaître l’homologie des espaces topologiques sur tous les corps finis et sur \mathbb{Q} contient en général toutes les informations obtenables sur \mathbb{Z} si bien qu’on peut aussi se limiter à ces cas en dernier recours.

Définition 5.2.2 (Complexes de chaînes). Soit R un anneau commutatif unitaire. Un complexe de chaînes non-borné de R -modules est une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de R -modules et d’applications R -linéaires $(d_n : M_{n+1} \rightarrow M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que les compositions successives $d_{n-1} \circ d_n = 0$ (pour tout n). Il sera noté :

$$\dots \xrightarrow{d_i} M_i \xrightarrow{d_{i-1}} M_{i-1} \xrightarrow{d_{i-2}} M_{i-2} \xrightarrow{d_{i-3}} \dots$$

Un complexe de chaînes concentré en degré positif est un complexe de chaîne tel que $M_i = 0$ pour $i < 0$ (et nécessairement $d_i = 0$ pour $i < 0$ aussi). Il sera simplement noté :

$$\dots \xrightarrow{d_i} M_i \xrightarrow{d_{i-1}} M_{i-1} \xrightarrow{d_{i-2}} M_{i-2} \xrightarrow{d_{i-3}} \dots \rightarrow M_0.$$

Terminologie :

- Comme nous nous concentrerons sur les complexes concentrés en degré positifs dans ce cours, nous les appellerons simplement complexes de chaînes. Un élément de C_i est appelée *une i -chaîne* de C (ou chaîne de degré i).
- Les applications d_n sont appelées **opérateurs de bord ou différentielles** dans la littérature et nous ferons de même.
- Nous appellerons complexe partiel, ou simplement complexe quand il n’y aura pas d’ambiguïté, toute suite $M_i \xrightarrow{d_{i-1}} M_{i-1} \xrightarrow{d_{i-2}} \dots \xrightarrow{d_0} M_0$ de R -modules munie d’applications R -linéaires vérifiant $d_{n-1} \circ d_n = 0$ (pour tout $1 \leq n \leq i$).

Remarque 5.2.3. On peut bien-sûr toujours voir un complexe concentré en degré positif ou partiel comme un complexe non-borné quitte à rajouter des $\{0\}$ et applications nulles. On le fera parfois implicitement.

Notation 5.2.4. Très souvent on notera un complexe de chaînes sous la forme (C_*, d) sans nécessairement préciser l’indice n dans d_n , c’est-à-dire sous la forme

$$\dots \rightarrow C_i \xrightarrow{d} C_{i-1} \rightarrow C_{i-2} \xrightarrow{d} \dots$$

et la relation $d_{n-1} \circ d_n = 0$ sera abrégée sous la forme

$$(32) \quad d \circ d = d^2 = 0.$$

Remarque 5.2.5 (Terminologie “dg”). Une autre terminologie devenue très populaire pour les complexes de chaînes est celle de *module différentiel gradué*, souvent abrégé en dg-module. Cette terminologie met l’emphase sur le complexe de chaînes dans sa globalité, c’est-à-dire sur la somme directe $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_i$ où on voit C_i comme un objet placé en degré i et interprète les différentielles d_n comme un seul opérateur $d : \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_i \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_i$ qui a la propriété de baisser le degré de 1 et d’être de carré nul.

Cette présentation est évidemment équivalente à celle de la définition 5.2.2.

De la relation $d_n \circ d_{n+1} = 0$ on déduit que :

Lemme 5.2.6. *Si (C_*, d) est un complexe de chaînes, alors, pour tout n , on a*

$$(33) \quad \text{Im}(C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n) \subset \ker(C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1}).$$

Définition 5.2.7 (Suite Exacte). Un complexe (non-borné, positif, ou partiel) sera appelé une *suite exacte* si pour tout n (pour lequel cela a du sens) on a

$$\text{Im}(d_{n+1}) = \ker(d_n).$$

Terminologie : une suite exacte qui n'a que 3 termes non-nuls est appelée suite exacte courte. Une suite exacte qui a une infinité (ou un nombre non clairement défini) de termes est appelée suite exacte longue en général.

Remarque 5.2.8. On prendra garde que contrairement au cas des complexes, si on rajoute des 0 à une suite exacte, celle-ci ne la reste plus forcément. En effet, l'exactitude du complexe $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{g} C$ signifie que $\text{Im}(i) = \ker(g)$ mais aussi que i est injective (car son noyau doit être l'image de 0. En revanche, pour la suite $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{g} C$ nous n'avons plus l'hypothèse d'injectivité sur i .

De même l'exactitude de $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ nécessite que g soit surjective.

Une conséquence immédiate de la définition est la propriété suivante qui sera souvent utile dans les calculs d'homologie :

Lemme 5.2.9. *Si on a une suite exacte (possiblement longue) avec un morceau de la forme*

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

alors $f : A \rightarrow B$ est un isomorphisme.

Démonstration. Comme la suite est exacte on a que $\text{Im}(f) = \ker(B \rightarrow 0) = B$; donc f est surjective. De même, comme $\ker(f) = \text{Im}(0 \rightarrow A)$, on a que f est injective. \square

Précisons maintenant la catégorie des complexes de chaînes, i.e. les morphismes entre eux.

Définition 5.2.10. Un morphisme $f : (C_*, d^C) \rightarrow (D_*, d^D)$ entre deux complexes de chaînes est la donnée d'une suite $(f_n : C_n \rightarrow D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de morphismes de R -modules telle que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d_{n-1}^C} & C_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-2}^C} & C_{n-2} & \xrightarrow{d_{n-3}^C} & \dots \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_{n-2} & & \\ \dots & \longrightarrow & D_n & \xrightarrow{d_{n-1}^D} & D_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-2}^D} & D_{n-2} & \xrightarrow{d_{n-3}^D} & \dots \end{array}$$

soit commutatif. Autrement dit tel que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$d_{n-1}^D \circ f_n = f_{n-1} \circ d_{n-1}^C.$$

On définit la composée de deux morphismes $f : (C_*, d^C) \rightarrow (D_*, d^D)$ et $g : (D_*, d^D) \rightarrow (E_*, d^E)$ de complexes de chaînes, comme la suite $g \circ f := (g_n \circ f_n : C_n \rightarrow E_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Un morphisme entre complexes partiels ou positifs est défini exactement de la même façon (ou simplement en le considérant comme un complexe total en ajoutant des 0).

Lemme 5.2.11. *La composée de deux morphismes de complexes de chaînes de R -modules est un morphisme de complexes. En particulier les complexes de chaînes, munis des morphismes de complexes de chaînes forment une catégorie notée $\mathbf{Ch}(R)$.*

Démonstration. La composée de deux morphismes de R -modules en est encore un et de plus si on superpose deux diagrammes commutatifs, on obtient encore un diagramme commutatif, ce qui garantit que la composée de deux morphismes de complexes de chaînes est un morphisme de complexes de chaînes. On peut aussi bien-sûr écrire directement de dernier point au travers de l'égalité

$$d_{n-1}^E \circ g_n \circ f_n = g_{n-1} \circ d_{n-1}^D \circ f_n = g_{n-1} \circ f_{n-1} \circ d_{n-1}^C.$$

Enfin on dispose du morphisme $(\text{id} : C_n \rightarrow C_n)$ donné par l'identité en tout degré qui est bien la flèche unité de tout complexe de chaînes ce qui garantit que $\mathbf{Ch}(R)$ est une catégorie. \square

Exemples 5.2.12. (1) Soit A, B des R -modules. On a alors l'inclusion canonique $i : A \hookrightarrow A \oplus B$, $a \mapsto (a, 0)$, et la projection canonique $A \oplus B \rightarrow B$, $(a, b) \mapsto b$. Alors le complexe $0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus B \rightarrow B \rightarrow 0$ est une suite exacte courte.

(2) Soit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{*2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ le morphisme $([x] \bmod 2) \mapsto [2x] \bmod 4$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le morphisme de réduction modulo 2. Alors $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{*2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est une suite exacte qui n'est pas isomorphe à $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (car $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ne sont pas des groupes isomorphes).

(3) Soit M un R -module, on a un complexe trivial donné par

$$\dots \longrightarrow M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{0} \dots$$

qui n'est évidemment pas une suite exacte si $M \neq \{0\}$.

(4) En revanche le complexe $\dots \longrightarrow M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{0} \dots$ est une suite exacte.

(5) Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme de R -modules. Alors la suite canonique

$$0 \rightarrow \ker(f) \hookrightarrow M \xrightarrow{f} N \rightarrow \text{coker}(f) \rightarrow 0$$

est une suite exacte.

(6) Si $f : M \rightarrow N$ est un morphisme quelconque, alors on a un complexe concentré en degré positif

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N.$$

On a, pour ce complexe, que $H_0 = N/\text{Im}(f) \cong \text{coker}(f)$ et $H_1(f) \cong \ker(f)$.

Exercice 5.2.13. Soit $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ une suite exacte courte. On dit que cette suite est **scindée** s'il existe $s : B \rightarrow E$ un morphisme de R -module tel que $p \circ s = \text{id}_B$.

Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) la suite exacte courte est scindée ;
- (2) la suite exacte courte est isomorphe à la suite exacte canonique $A \oplus B \rightarrow B \rightarrow 0$;
- (3) il existe une rétraction $r : E \rightarrow A$, c'est-à-dire un morphisme de R -module tel que $r \circ i = \text{id}_A$.

Exemple 5.2.14 (Modules vu comme des complexes). Soit M un R -module quelconque. On peut alors voir M comme un complexe concentré en degré 0 : $(\mathcal{M}_i)_{i \in \mathbb{Z}} := \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow M \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ où la seule composante non-triviale est en degré 0 : $\mathcal{M}_0 = M$, $\mathcal{M}_{i \neq 0} = 0$. Plus généralement, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, M donne lieu à un complexe de chaînes noté⁸⁰ $M[i] : \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow M \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ où M est placé en degré i .

Soit (C, d) un complexe de chaînes. Alors l'ensemble des morphismes de complexes de chaînes de (C, d) vers $M[i]$ est en bijection avec les applications R -linéaires de C_i vers M :

$$\text{Hom}_{\mathbf{Ch}(R)}((C, d), M[i]) \cong \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(C_i, M).$$

⁸⁰ cf Définition 5.4.5 pour la notation. On notera que le complexe précédent correspond donc à $M[0]$.

En particulier, si N est un autre R -module, un morphisme de complexes de chaînes $M[i] \rightarrow N[i]$ est la même chose qu'un morphisme de R -module de M vers N .

Ainsi, pour tout entier i , on a construit des foncteurs pleinement fidèles $(-)[i] : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ch}(R)$.

5.3. GROUPES D'HOMOLOGIE ET QUASI-ISOMORPHISMES

Nous allons maintenant définir les groupes d'homologie de complexes de chaînes. Ces derniers seront un point important et nous mènerons à une notion, plus faible que l'isomorphisme mais bien plus importante, d'équivalences entre complexes de chaînes.

Définition 5.3.1 (Cycles, bords et homologies). Soit (C_*, ∂) un complexe de chaînes.

Une i -chaîne $c \in C$ est un i -cycle si son bord est nul, c'est-à-dire si $\partial c = 0$. On note

$$Z_i(C) = \ker(\partial : C_i \rightarrow C_{i-1})$$

le sous-module des i -cycles.

Une i -chaîne $c \in C_i$ est un bord — on dit aussi que c est *homologue à 0* — si elle est le bord d'une $(i+1)$ -chaîne. On note

$$B_i(C) = \text{im}(\partial : C_{i+1} \rightarrow C_i)$$

le sous-module des i -chaînes qui sont des bords.

Il découle du lemme 5.2.6 que pour tout entier i , $B_i(C)$ est un sous-module de $Z_i(C)$. On peut alors poser la définition suivante qui est l'une des plus importantes de ce cours.

Définition 5.3.2. Le R -module quotient

$$H_i(C) = Z_i(C)/B_i(C)$$

est appelé i -ème groupe d'homologie du complexe de chaîne C .

On prendra garde que bien que traditionnellement on ne mette pas la différentielle d dans la notation, les cycles, bords et l'homologie *dependent très fortement* de la différentielle.

Remarque 5.3.3. Par définition, un complexe (C, d) vérifie que $H_i(C) = 0$ pour tout entier i si et seulement si (C, d) est une suite exacte. Ainsi les groupes d'homologie mesurent en quelque sorte à quel point un complexe n'est pas exact.

Lemme 5.3.4. Soit $f : (B, b) \rightarrow (C, d)$ un morphisme de complexes de chaînes (Définition 5.2.10). Alors $f_i(Z_i(B)) \subset Z_i(C)$ et $f_i(B_i(B)) \subset B_i(C)$.

Démonstration. Cela découle de $f_{i-1} \circ b_{i-1} = d_{i-1} \circ f_{i-1}$, car si x_i est un cycle alors $b_{i-1}(x_i) = 0$ et donc $d_{i-1}(f_i(x_i)) = 0$. De même si $x_i = b_i(x_{i+1})$ est un bord, alors $f_i(x_i) = d_i \circ f_{i+1}(x_{i+1})$ est un bord. \square

Soit maintenant $\alpha \in H_i(B)$ une classe d'homologie de B et soit x un i -cycle correspondant de B , c'est-à-dire que $\alpha = [x]$. Alors par le lemme précédent, on a que $f_i(x)$ est un cycle de C et on peut donc lui associer sa classe d'homologie $[f_i(x)] \in H_i(C)$.

Lemme 5.3.5. La règle $[x] \mapsto [f_i(x)]$ passe au quotient et définit un morphisme de R -module $f_i : H_i(B) \rightarrow H_i(C)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que la classe d'homologie dans C de $[f_i(x)]$ est indépendante du choix de x relevant la classe α . Deux choix différents x, x' diffèrent par un bord $b(y)$ par définition : $x' - x = b(y)$. Mais alors $f_i(x') = f_i(x) + f_i(b(y)) = df_{i+1}(y)$. Donc $[f_i(x')] = [f_i(x)]$. Ceci prouve que l'application est bien définie. Elle est R -linéaire car f l'est. \square

Notation 5.3.6. On notera $f_* : H_*(B) \rightarrow H_*(C)$ l'application induite par f en homologie. Parfois, on notera $H_*(f) : H_*(B) \rightarrow H_*(C)$ ce morphisme induit, lorsque la notation f_* peut être ambiguë (comme ce sera parfois le cas dans les chapitres 3.2 et ?? sur l'homologie simpliciale ou singulière).

Lemme 5.3.7. *On a $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ et $id_* = id$. Autrement dit, le i -ième groupe d'homologie $H_i(-) : \mathbf{Ch}(R) \rightarrow \mathbf{Ab}$ est un foncteur.*

Démonstration. Cela suit de $[f(g(x))] = f_*([g(x)]) = f_* \circ g_*([x])$ par définition de f_* . \square

Du lemme, il découle que si f est un isomorphisme, alors $f_i : H_i(B) \rightarrow H_i(C)$ est un isomorphisme pour tout entier i . Cependant la réciproque n'est évidemment pas vraie (comme nous pouvons le voir dans les chapitres 3.2, ??). Une bonne notion d'équivalence de complexes de chaînes est donnée par la notion suivante :

Définition 5.3.8 (Quasi-isomorphisme). Un quasi-isomorphisme $f : (B, b) \rightarrow (C, d)$ est un morphisme de complexes de chaînes tel que, pour tout entier i , on a que $f_i : H_i(B) \rightarrow H_i(C)$ est un isomorphisme.

Deux morphismes de complexes de chaînes $f, g : (B, b) \rightarrow (C, d)$ sont dits quasi-équivalents⁸¹ si les applications induites en homologie $f_i, g_i : H_i(B) \rightarrow H_i(C)$ sont égales.

Autrement dit, un quasi-isomorphisme est un morphisme de complexes qui devient un isomorphisme quand on passe aux groupes d'homologie.

Il est bon d'imaginer la notion de complexe de chaînes comme l'analogie, dans le cadre algébrique des R -modules, à ce qu'un espace topologique à homotopie près est pour un ensemble (ou un espace). Cependant, on doit faire attention à la remarque suivante.

Remarque 5.3.9. Un quasi-isomorphisme n'admet pas forcément de quasi-isomorphisme inverse en général⁸². C'est à dire qu'on ne peut pas forcément trouver de morphisme $g : (C, d) \rightarrow (B, b)$ tel que les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ soient quasi-isomorphes à l'identité.

Exemples 5.3.10. (1) Toute suite exacte est quasi-isomorphe au complexe nul : $\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$

(2) On considère le R -module $R[x]/(x^2) \cong R \oplus R$ des polynômes de degré au plus 1 à coefficient dans R . On a alors un complexe

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow R[x]/(x^2) \xrightarrow{*x} R[x]/(x^2) \xrightarrow{*x} R[x]/(x^2)$$

où les flèches sont données par la multiplication par x . Notons $p : R[x]/(x^2) \rightarrow R[x]/(x) \cong R$ l'application quotient et $q : R[x]/(x^2) \cong R \oplus xR \rightarrow xR \cong R$ la projection sur le second facteur. On a alors un morphisme de complexe

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R[x]/(x^2) & \xrightarrow{*x} & R[x]/(x^2) & \xrightarrow{*x} & R[x]/(x^2) \\ & & \downarrow & & \downarrow q & & \downarrow & & \downarrow p \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & R \end{array}$$

qui est un quasi-isomorphisme.

Exercice 5.3.11. Démontrer que les complexes $\dots \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où ϕ envoie la classe de 1 modulo 4 sur $1 \in \mathbb{Z}/2$ et $\dots \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{(a,b) \mapsto b} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ont les mêmes groupes d'homologie mais qu'ils ne sont pas quasi-isomorphes.

Il existe une notion plus forte que la notion de quasi-équivalence de morphismes :

81. Ou quasi-isomorphes ou juste équivalents dans la littérature.

82. C'est cependant possible si R est un corps et que l'on regarde des complexes concentrés en degré positif.

Définition 5.3.12 (Homotopie de chaîne). Soient C et C' deux complexes de chaînes et f et g deux morphismes de complexes de C vers C' . Une *homotopie de chaîne* entre f et g est une famille de morphismes $K = (K_i : C_i \rightarrow C'_{i+1})$ vérifiant, pour tout i ,

$$(34) \quad K_{i+1}\partial + \partial'K_i = g_i - f_i.$$

Lemme 5.3.13. Soient $f, g : C \rightarrow C'$ deux morphismes de complexes de chaînes. Alors les applications induites en homologie $H_i(f), H_i(g) : H_i(C) \rightarrow H_i(C')$ coïncident.

Démonstration. Soit $\alpha \in H_i(C)$ une classe et x un i -cycle tel que $[x] = \alpha$. Comme $H_i(f)([x]) = [f_i(x)]$, $H_i(g)([x]) = [g_i(x)]$, on doit montrer que $f_i(x) - g_i(x)$ est un bord dans $H_i(C')$. Or on a

$$g_i(x) - f_i(x) = K_{i+1}\partial(x) + \partial'K_i(x) = \partial'K_i(x) \in B_i(C')$$

puisque $\partial x = 0$. □

5.4. LES LEMMES FONDAMENTAUX DE L'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

Les deux lemmes 5.4.3 et 5.4.4 suivants encodent deux résultats clés et fondateurs de l'algèbre homologique et du développement de la topologie algébrique et de ses ramifications et applications.

Avant de les énoncer nous précisons la définition suivante :

Définition 5.4.1. Une suite exacte courte de complexes de chaînes est une suite

$$0 \rightarrow (A_*, d_A) \xrightarrow{f} (B_*, d_B) \xrightarrow{g} (C_*, d_*) \rightarrow 0$$

de morphismes de complexes de chaînes telle que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la suite induite $0 \rightarrow A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i \rightarrow 0$ soit une suite exacte courte de R -modules.

Lemme 5.4.2. Soit $(A_*, d_A) \xrightarrow{f} (B_*, d_B)$ un morphisme de complexe tel que $f_i : A_i \rightarrow B_i$ soit injectif pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$. Alors

- la suite de modules quotients $(B_i/f(A_i))_{i \in \mathbb{Z}}$, munie des applications linéaires $d : B_i/f(A_i) \rightarrow B_{i-1}/f(A_{i-1})$ induites par d_B sur les quotients, est un complexe de chaînes et la suite $0 \rightarrow A_* \rightarrow B_* \rightarrow B_*/f(A_*) \rightarrow 0$ est une suite exacte de complexes de chaînes.
- Le complexe de chaînes quotient $(B_*/f(A_*), d)$ est le produit cofibré $0 \cup_{A_*} B_*$ dans la catégorie $\mathbf{Ch}(R)$ des complexes de chaînes.

Démonstration. La seule difficulté dans le premier point est de vérifier que d_B passe au quotient pour donner un opérateur de carré nul. Ceci découle du fait que f est un morphisme de complexe, d'où il suit que $d_B(f(a)) = f(d_A(a)) \subset f(A_{i-1})$ ce qui par propriété universelle du quotient garantit que d_B passe au quotient par l'image de f en chaque degré i . De plus $d_B^2 = 0$ implique que l'application induite sur le quotient est aussi de carré nul, c'est-à-dire est bien une différentielle.

Pour le deuxième point, on peut noter que comme tout R -module M donne lieu à un complexe de chaîne $M[i]$ comme dans l'exemple 5.2.14. Comme un morphisme de complexes de C vers $M[i]$ est la même chose qu'une application linéaire C_i vers M , il suit que si $(E_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est le produit cofibré $0 \cup_{A_*} B_*$, alors E_i est le produit cofibré $0 \cup_{A_i} B_i$ en tout degré i , c'est-à-dire le quotient $B_i/f(A_i)$. Il n'y a plus qu'à vérifier que ce dernier, muni de la différentielle quotient vérifie la propriété universelle du coproduit. C'est direct car les applications linéaires sont construites de manière unique en chaque degré i (par propriété universelle au niveau des modules sous-jacents) et que l'application ainsi construite, est bien un morphisme de complexe ce qui suit là encore du fait que tous les morphismes dans le diagramme sont des morphismes de complexes et par unicité des applications induites à partir du quotient en chaque degré i . □

Lemme 5.4.3. (La longue suite exacte en homologie)

- Soit $(A, d_A) \xrightarrow{f} (B, d_B) \xrightarrow{g} (C, d_C)$ une suite exacte de complexes de chaînes de R -modules. Alors il existe une suite exacte longue naturelle reliant leurs groupes d'homologie :

$$\cdots \rightarrow H_n(A_*) \xrightarrow{f_*} H_n(B_*) \xrightarrow{g_*} H_n(C_*) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A_*) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(B_*) \xrightarrow{g_*} H_{n-1}(C_*) \xrightarrow{\delta_{n-1}} H_{n-2}(A_*) \rightarrow \dots$$

- La naturalité de la suite signifie que pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} C & \longrightarrow & C' & \twoheadrightarrow & C'' \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ D & \longrightarrow & D' & \twoheadrightarrow & D'' \end{array}$$

de complexes de chaînes dont les lignes sont des suites exactes (courtes), Le diagramme de suites exactes longues induit en homologie

$$\begin{array}{ccccccc} \dots H_i(C) & \longrightarrow & H_i(C') & \longrightarrow & H_i(C'') & \longrightarrow & H_{i-1}(C) \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots H_i(D) & \longrightarrow & H_i(D') & \longrightarrow & H_i(D'') & \longrightarrow & H_{i-1}(D) \dots \end{array}$$

est commutatif.

Ce lemme permet de calculer les groupes d'homologie d'un complexe de chaînes si on sait l'inclure dans une suite exacte dont on connaît les groupes d'homologie des deux autres complexes. Il est important de noter que dans la suite exacte longue en homologie, les flèches qui ne changent pas le degré sont induites par les morphismes de complexes.

Démonstration. Les applications f_* , g_* sont celles associées aux morphismes de complexes. Comme le passage au n -ième groupe d'homologie est un foncteur, on est ramené à construire les δ_n et vérifier la commutativité des diagrammes obtenus et l'exactitude des lignes. Pour la construction de δ , on procède comme suit : soit $c_n \in C_n$ un cycle ; c'est-à-dire $d_C(c_n) = 0$. Soit b_n un antécédent par g : $g(b_n) = c_n$. Comme $d_B(b_n)$ est dans $\ker(g)$ (car g est un morphisme de complexes), on a par exactitude qu'il existe $a_{n-1} \in A_{n-1}$ tel que $f(a_{n-1}) = d_B(b_n)$. On a que a_{n-1} est un cycle et on définit

$$\delta_n([c_n]) := [a_{n-1}].$$

Que cette construction soit indépendante des choix et bien définie est une conséquence du lemme du serpent vu en exercice en TD, tout comme l'exactitude de la suite. \square

Le lemme suivant permet souvent de montrer, en décomposant un complexe de chaînes (par exemple le complexe des chaînes singulières d'un espace) en morceaux qu'un morphisme est un quasi-isomorphisme.

Lemme 5.4.4 (Propriété 2 pour 3). Soit $(A, d_A) \xrightarrow{f} (B, d_B) \xrightarrow{g} (C, d_C)$ un dia-

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (A', d'_A) & \xrightarrow{f'} & (B', d'_B) & \xrightarrow{g'} & (C', d'_C) \end{array}$$

gramme commutatif de complexes de chaînes dont les lignes sont des suites exactes courtes.

Si deux des morphismes de complexes verticaux sont des quasi-isomorphismes, alors le troisième l'est aussi.

Démonstration. On écrit le diagramme de longue suite exacte du Lemme 5.4.3. Comme deux des morphismes verticaux (notons les α , β sans préjuger de leur place et γ celui qui reste) sont des quasi-isomorphismes, le diagramme devient équivalent à une longue suite de diagrammes dans lequel on peut appliquer le lemme des 5 (5.1.13) aux morphismes

verticaux $H_*(\alpha)$, $H_*(\beta)$, pour déduire que le troisième, $H_*(\gamma)$, est un isomorphisme en tout degré. Ce qui prouve que ce morphisme est bien un quasi-isomorphisme. \square

Notons que si (C, d) est un complexe, on a aussi que $(-d)^2 = 0$.

Définition 5.4.5 (Suspension d'un complexe de chaînes). Soit (C, d) un complexe de chaînes de R -modules. On définit sa suspension, notée $C[1]$ comme la suite de R -modules $(C[1]_i := C_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$ munie de la différentielle $-d$.

La suspension itérée $C[n] = C[1] \cdots [1]$ est donc le complexe $C[n]_i = C_{i-n}$ muni de la différentielle $(-1)^n d$. Le signe introduit dans la différentielle est utile pour avoir un énoncé simple dans l'exemple suivant et pour des raisons de convention de degré dans les espaces topologiques et de compatibilité avec les orientations des simplexes.

Exemple 5.4.6 (Cône d'un morphisme). Soit $f : (A, d^A) \rightarrow (B, d^B)$ un morphisme de complexe de chaînes. On va lui associer une suite exacte courte naturelle de complexes de chaînes, cf (35).

Soit $C(f)$ le complexe défini comme suit. On pose $C(f)_n := A_{n-1} \oplus B_n$ et on définit une différentielle $\partial : C(f)_n \rightarrow C(f)_{n-1}$ définie par $\partial(a, b) = (-d^A(a), d^B(b) + f(a))$ pour tout $a \in A_{n-1}$, $b \in B_n$.

On a une application canonique $B \hookrightarrow C(f)$, injective en tout degré i , donnée par $b \mapsto (0, b)$. On a de plus une surjection canonique $C(f) \rightarrow A[1]$, surjective en tout degré i , donnée par $(a, b) \mapsto a$. Ces morphismes sont des morphismes de complexes et la suite associée

$$(35) \quad 0 \rightarrow B \rightarrow C(f) \rightarrow A[1] \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte de complexes de chaînes.

La longue suite exacte en homologie associée (par le lemme 5.4.3) est donnée par

$$\cdots \rightarrow H_n(A_*) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(B_*) \rightarrow H_n(C(f)) \rightarrow H_{n-1}(A_*) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(B_*) \rightarrow H_{n-1}(C(f)) \rightarrow \cdots$$

autrement dit l'opérateur δ_n s'identifie avec le morphisme de complexe induit par f .

Ainsi, pour tout morphisme de complexe f , on peut relier les complexes A et B par une suite exacte courte dont la suite exacte longue en homologie calcule les $H_i(f)$.

Exercice 5.4.7. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de complexes. Démontrer que $(C(f), \partial)$ est un complexe de chaînes, que $B \hookrightarrow C(f) \rightarrow A[1]$ est bien une suite exacte courte de complexes de chaînes et que la suite exacte longue associée a la forme énoncée.

Soit toujours $f : (A, d^A) \rightarrow (B, d^B)$ un morphisme de complexe de chaînes et supposons que $(B, d^B) \xrightarrow{\phi} (D, d^D)$ est un morphisme de complexe de chaînes.

Lemme 5.4.8. Soit $h : A[1] \rightarrow D$ une homotopie de chaînes entre $\phi \circ f$ et 0 (autrement dit $\phi \circ f = d^D \circ h + h \circ d^A$). Alors les applications linéaires $A_{n-1} \oplus B_n \rightarrow D_n$ données par $(a, b) \mapsto h(a) + \phi(b)$ forment un morphisme de complexe de chaînes $C(f) \rightarrow (D, d^D)$.

En particulier si $\phi \circ f = 0$, les applications linéaires $A_{n-1} \oplus B_n \rightarrow D_n$ données par $(a, b) \mapsto \phi(b)$ forment un morphisme de complexe de chaînes $C(f) \rightarrow (D, d^D)$.

Exercice 5.4.9. Prouver le lemme 5.4.8.

Le résultat de ce lemme doit être compris comme la propriété que le cône d'un morphisme est en fait le quotient "à homotopie près" de B par l'image de f .

5.5. COMPLEXES DE COCHAÎNES ET GROUPES DE COHOMOLOGIE

Dans cette partie nous allons faire quelques remarques sur la notion duale, au sens de dual linéaire, des complexes de chaînes : les complexes de *cochaînes* et leurs groupes de cohomologie.

La principale raison pour cela est que nous allons voir que dans le cas des (co)chaînes singulières, les cochaînes et leur cohomologie ont une structure supplémentaire, d'algèbre, qui aide à différencier des espaces et à calculer les invariants. Ceci arrive en fait pour de nombreuses théories homologiques dans d'autres contextes. Il y aussi d'autres raisons : tout d'abord les groupes de cohomologie interviennent naturellement dans de nombreux domaines des mathématiques⁸³, par exemple en géométrie (différentielle ou algébrique ou complexe). Par ailleurs, la notion de triangulation duale d'une triangulation mène naturellement à cette notion et à la dualité de Poincaré [1, 2]. Donnons maintenant des définitions plus précises.

À tout complexe de chaînes (de R -modules où R est un anneau),

$$\dots C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots$$

on peut associer ses modules duaux $C^i = (C_i)^* = \text{Hom}_R(C_i, R)$ et la suite

$$\dots \leftarrow C^{i+1} \xleftarrow{\delta^{i+1}} C^i \xleftarrow{\delta^i} C^{i-1} \xleftarrow{\delta^{i-1}} \dots,$$

où $\delta^i := (-1)^{i+1}(\partial_i)^* : f(-) \mapsto (-1)^{i+1}f \circ \partial_i(-)$ opère dans la direction opposée. Noter que cette suite vérifie encore la propriété fondamentale que

$$(36) \quad \delta \circ \delta = 0.$$

De sorte qu'on peut lui associer, au sens des morphismes près, des groupes de cohomologie d'une manière similaire aux groupes d'homologie d'un complexe de chaînes.

Définition 5.5.1. Un complexe de *cochaînes* de R -module est une suite $(C^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de R -modules et d'applications R -linéaires $(\delta^n : C^n \rightarrow C^{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que les compositions successives $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ (pour tout n). Il sera noté :

$$\dots \xrightarrow{\delta} C^i \xrightarrow{\delta} C^{i+1} \xrightarrow{\delta} C^{i+2} \xrightarrow{\delta} \dots$$

Un complexe de cochaînes sera dit concentré en degré positif si $C^i = 0$ pour $i < 0$. Il sera alors simplement noté :

$$C^0 \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} C^i \xrightarrow{\delta} C^{i+1} \xrightarrow{\delta} C^{i+2} \xrightarrow{\delta} \dots$$

Les **groupes de cohomologie** d'un complexe de cochaînes sont les R -modules

$$H^i(C) = \ker \delta^{i+1} / \text{im} \delta^i.$$

Le module $\ker \delta^{i+1}$ est appelé module des *cocycles* de degré i , noté $S^i(C)$ et le module $\text{im} \delta^i$ est appelé module des *cobords* de degré i , noté $B^i(C)$.

Un *morphisme de complexes de cochaînes* $f : (C^*, \delta_C) \rightarrow (D^*, \delta_D)$ est une suite $f_i : C^i \rightarrow D^i$ de R -modules qui commutent avec les différentielles : $f_{i+1} \circ \delta_C = \delta_D \circ f_i$. Un tel morphisme induit un morphisme $H^i(f) : [x] \mapsto [f(x)]$ sur les groupes de cohomologie (la preuve est analogue à celle du lemme 5.3.4).

Un *quasi-isomorphisme* de complexes de cochaînes est un morphismes qui induit des isomorphismes $H^i(C) \cong H^i(D)$ sur les groupes de cohomologie.

Nous nous concentrerons sur les complexes de cochaînes concentrés en degré positifs dans ce texte et nous les appellerons simplement complexes de cochaînes.

Nous avons déjà mentionné notre source première d'exemple :

⁸³ Parfois même dans des cas où il n'y a *pas* de groupes d'homologie correspondant comme pour les faisceaux.

Lemme 5.5.2. *Si $(C_i, d)_{i \in \mathbb{Z}}$ est un complexe de chaînes de R -modules, alors $C^i := \text{Hom}_R(C_i, R)$ muni de l'opérateur $\delta(f) = (-1)^{i+1} f \circ d$ pour tout $f : C_i \rightarrow R$ est un complexe de cochaînes.*

Démonstration. Puisque d va de C_{i+1} vers C_i , on obtient que $f \circ d$ va de C^{i+1} vers R et donc δ envoie bien C^i dans C^{i+1} . Par ailleurs

$$\delta \circ \delta(f) = (-1)^i \delta(f \circ d) = -f(d^2) = 0$$

puisque $d^2 = 0$. □

Remarque 5.5.3. Si (C_*, d) est un complexe de chaînes, alors en notant $C^i := C^{-i}$ et $\partial : C^{-i} = C_i \xrightarrow{d} C_{i-1} = C^{1-i}$, on obtient un complexe de cochaînes. Ceci établit un isomorphisme de la catégorie des complexes de chaînes non-bornés sur celle des complexes de cochaînes non-bornés, et par restriction de celle des complexes de chaînes concentrés en degré positifs vers celle des complexes de cochaînes concentrés en degré négatifs.

On notera cependant que les complexes de cochaînes duaux du lemme 5.5.2 sont concentrés en degré positifs et ne relèvent donc pas de cette construction. Comme ce sont ces derniers qui vous nous intéressent, cet isomorphisme ne jouera aucun rôle (si ce n'est éventuellement d'indiquer pourquoi on voit un élément de degré cohomologique i comme étant de degré homologique $-i$).

Remarque 5.5.4. On a une théorie similaire si l'on remplace C^i par les groupes $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_i, G)$ où G est un groupe abélien. On obtient alors les groupes de cohomologie $H^i(C; G)$.

Remarque 5.5.5 (Sur les signes). Le signe $(-1)^{i+1}$ dans la définition du bord dual est là pour suivre les conventions de signe dans les espaces *gradués*. Il n'est pas très important et on peut s'en affranchir dans la partie 4.4 sans changer grand chose (en particulier pas les groupes de cohomologie), si ce n'est éventuellement un ou deux signes. On prendra garde que les deux conventions de signe cohabitent dans la littérature classique. Les conventions de signe que nous suivons ici sont plus proches de celles données par les conditions géométriques et donnent la "bonne" notion d'algèbre commutative au sens gradué, qui sont le type d'algèbres données par la cohomologie (et dans toutes les notions de cohomologie usuelle).

Cette convention de signe est que à chaque fois qu'on permute deux éléments homogènes x, y dans une formule, on doit rajouter le signe $(-1)^{|x| \cdot |y|}$ où $|x|, |y|$ désigne le degré de x, y . En terme plus pompeux⁸⁴, dans la catégorie des espaces vectoriels gradués, il y a plusieurs façons de construire des isomorphismes naturels $V^\bullet \otimes W^\bullet \cong W^\bullet \otimes V^\bullet$. On peut bien entendu prendre l'isomorphisme $v \otimes w \mapsto w \otimes v$ (qui revient à appliquer l'isomorphisme obtenu en oubliant que les espaces vectoriels étaient gradués) mais on peut aussi considérer l'isomorphisme, défini pour tout $x \in V^i, y \in W^j$, par

$$x \otimes y \mapsto (-1)^{ij} y \otimes x.$$

C'est ce dernier isomorphisme structurel qui est en général considéré en algèbre homologique et c'est cette convention que nous suivons.

Pour tout complexe de R -modules libres C_\bullet , de complexe dual $C^\bullet := \text{Hom}_R(C_\bullet, R)$, on dispose de l'accouplement de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle : C^\bullet \otimes C_\bullet \rightarrow R$ défini par $(f \otimes x) \mapsto f(x)$ si $f \in C^i, x \in C_i$.

Lemme 5.5.6. *Si les C_i sont des R -modules libres (comme c'est le cas dans tous les chapitres ??, 3.2) cet accouplement est non-dégénéré.*

⁸⁴. Dans une catégorie \mathbf{C} , la donnée de $V \otimes W$ pour toute paire d'objets $V, W \in \mathbf{C}$, ou plus précisément d'un foncteur $(V, W) \rightarrow V \otimes W$ et d'un isomorphisme naturel $V \otimes W \cong W \otimes V$ s'appelle une structure monoïdale symétrique.

D'après les conventions de signe que l'on a choisi, on a la formule suivante :

$$(37) \quad \langle \delta(f), x \rangle + (-1)^i \langle f, \partial(x) \rangle = 0.$$

Lemme 5.5.7. *L'accouplement $\langle , \rangle : C^\bullet \otimes C_\bullet \rightarrow R$ passe aux groupes de cohomologie pour définir un accouplement naturel*

$$\langle , \rangle : H^i(C^\bullet) \times H_i(C_\bullet) \rightarrow R.$$

Il correspond à ce dernier accouplement en (co)homologie une application naturelle

$$H^i \rightarrow \text{Hom}(H_i, \mathbb{Z})$$

donnée par $\alpha \mapsto (x \mapsto \langle \alpha, x \rangle)$. On prendra garde que cet accouplement est *en général dégénéré*, voir 5.5.8.

Démonstration. Soit $\alpha \in H^i(C^\bullet)$ et $\beta \in H_i(C^\bullet)$ et prenons des i -(co)cycles $f \in C^i$, $x \in C_i$ tels que $[f] = \alpha$ et $[x] = \beta$. On souhaite poser alors

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle [f], [x] \rangle = \langle f, x \rangle \in R.$$

On doit vérifier que la formule ci-dessus est indépendant des choix de f et x . C'est à dire qu'il suffit de montrer que l'on obtient le même résultat si on remplace f par $f + \delta(g)$ et x par $x + d(y)$ (où $g \in C^{i-1}$ et $y \in C_{i+1}$). Par linéarité, de la formule (37), on obtient

$$\begin{aligned} \langle f + \delta(g), x + d(y) \rangle &= \langle f, x \rangle + \langle \delta(g), x \rangle + \langle f, d(y) \rangle + \langle \delta(g), d(y) \rangle \\ &= \langle f, x \rangle + (-1)^i \langle g, d(x) \rangle + (-1)^{i+1} \langle \delta(f), x \rangle + (-1)^i \langle g, d^2(y) \rangle \\ &= \langle f, x \rangle \end{aligned}$$

où la dernière ligne suit du fait que $\delta(f) = d(x) = 0$ par hypothèse. □

Comme nous l'avons remarqué, bien que l'accouplement entre les cochaînes et les chaînes soit non-dégénéré, le morphisme $H^i \rightarrow \text{Hom}(H_i, \mathbb{Z})$ n'est cependant pas injectif (donc pas non plus bijectif) en général. La raison en est que le foncteur $\text{Hom}(-, P)$ ne préserve pas les suites exactes (et donc pas les quotients d'un noyau par un conoyau que sont les groupes de (co)homologie). Nous verrons dans la partie 6.1 comment corriger cela (et en tirer une certaine richesse) en les remplaçant par des complexes de (co)chaînes préservant les suites exactes et introduisant des groupes de cohomologie Ext^i donnant lieu à de longues suites exactes de groupes.

Dans le cas qui nous intéresse, on en déduira une relation précise et assez simple.

Théorème 5.5.8 (Coefficients universel–version cohomologique). *Soit C_* un complexe de chaînes constitués de modules libres en tout degré et G un groupe abélien. Alors les groupes de cohomologie $H^i(C^*; G)$ du complexe de cochaînes dual $C^* = \text{Hom}(C_*, G)$ sont déterminés par les groupes d'homologie $H_i(C_*)$ via la suite exacte scindée⁸⁵*

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_{i-1}(C_*), G) \rightarrow H^i(C^*; G) \rightarrow \text{Hom}(H_i(C_*), G) \rightarrow 0.$$

Le théorème s'applique en particulier au cas de la cohomologie singulière.

Les groupes $\text{Ext}^1 := \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1$ sont donnés par la définition 6.2.18.

Le symbole $\text{Ext}^1(H, G)$ a une interprétation naturelle comme ensemble de classes d'isomorphisme d'extension de G par H , c'est-à-dire de suite exacte courte $0 \rightarrow G \rightarrow J \rightarrow H \rightarrow 0$, avec une notion naturelle d'isomorphisme entre deux telles suites exactes, voir [11]. Nous renvoyons à 6.2.18 pour une définition générale, mais pour s'en servir en pratique, il nous suffira souvent d'utiliser les formules suivantes.

Lemme 5.5.9 (Calcul de Ext^1). *Si H est de type fini on a :*

- $\text{Ext}^1(H \oplus H', G) \cong \text{Ext}(H, G) \oplus \text{Ext}(H', G)$,
- $\text{Ext}^1(H, G) = 0$ si H est libre, et

^{85.} attention, le scindement n'est pas naturel...

- $\text{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \cong G/nG$.

On retrouve donc bien que $\text{Ext}^1(H, G)$ est isomorphe au groupe de torsion de H si H est de type fini.

Remarque 5.5.10. On déduit de la remarque 5.5.9 et du théorème 5.5.8 les deux propriétés suivantes, pour $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{F}$ un corps et lorsque les groupes d'homologie sont de *type finis* :

1. *Les nombres de Betti*

$$b^i = b_i$$

et les groupes de torsion vérifient

$$\text{Tors}^i \cong \text{Tors}_{i-1}.$$

2. *L'accouplement modulo torsion*

$$\langle , \rangle : (H^i/\text{Tors}^i) \times (H_i/\text{Tors}_i) \rightarrow \mathbb{Z}$$

est non-dégénéré.

Si le groupe des coefficients est un corps, il n'y a pas de torsion et les espaces vectoriel H_i et H^i sont alors isomorphes (lorsqu'ils sont de dimension finie).

Ceci permet précisément de déduire le point (2) du Théorème de dualité de Poincaré 4.5.8 à partir du point (1).

VI. RÉOLUTIONS ET FONCTEURS DÉRIVÉS

Dans ce chapitre, les anneaux (ou algèbres) considérés ne sont pas forcément commutatifs et, lorsque le contexte ne fixe pas si l'action est à droite ou à gauche, elle sera considérée comme à gauche. Le lecteur peut cependant, pour se simplifier la vie, ne considérer que des anneaux commutatifs sans perdre d'intuition ou de compréhension des résultats ; la raison pour considérer le cas non-commutatif est qu'ils interviendront dans le chapitre ??.

6.1. RÉOLUTIONS PROJECTIVES ET INJECTIVES

On a pu voir en 4.6 que l'homologie d'un espace produit fait intervenir le produit tensoriel de complexes, mais que, en général, l'homologie d'un produit tensoriel de complexes n'est pas le produit tensoriel des homologies, et qu'un certain groupe au nom mystérieux de Tor_1 relie ces deux notions.

De même, la cohomologie d'un espace est reliée naturellement au dual de l'homologie mais ne lui est pas égale en général ; en raison là aussi d'un certain groupe appelé Ext . Dans ces deux cas, le problème vient du fait que le foncteur produit tensoriel et le foncteur de dualité $\text{Hom}_R(-, R)$ ne préservent pas les quasi-isomorphismes. On dit que ces foncteurs ne sont pas exacts. Nous allons cependant voir que ce défaut apparent peut être caractérisé par un certain complexe naturel et des groupes de (co)homologie. On commence par préciser cette notion d'exactitude.

Définition 6.1.1. Soit R, S des anneaux. Un foncteur $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ est

-additif : s'il préserve les sommes directes (finies) : $F(A \oplus B) \cong F(A) \oplus F(B)$.

-exact : s'il est additif⁸⁶ et envoie toute suite exacte courte, c'est-à-dire que si une suite $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ est exacte alors la suite $0 = F(0) \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$ est exacte.

-exact à gauche (resp. à droite) : s'il est additif et que de plus pour toute suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, la suite $0 = F(0) \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C)$ (resp. $F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$) est exacte.

On définit de même les notions d'être *additif (resp. exact, exact à gauche, exact à droite)* pour un foncteur $G : R\text{-Mod}^{op} \rightarrow S\text{-Mod}$. Ainsi, G est *exact à gauche (resp. à droite)* s'il est additif et que pour toute suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ dans $R\text{-Mod}$, la suite⁸⁷ $0 = G(0) \rightarrow G(C) \rightarrow G(B) \rightarrow G(A)$ (resp. $G(C) \rightarrow G(B) \rightarrow G(A) \rightarrow 0$) est exacte.

On peut noter que être exact est équivalent à être exact à droite et à gauche.

Remarque 6.1.2. Ces notions s'étendent à toutes les catégories abéliennes⁸⁸ qui sont précisément des catégories dans lesquelles on a des notions de suites exactes, noyau, conoyau. On ne verra pas d'exemples autres que les catégories de modules ou leurs opposées. C'est suffisant pour comprendre la théorie car, par un théorème de Freyd-Mitchell, une petite catégorie abélienne est équivalente à une sous-catégorie pleine d'une catégorie du type $R\text{-Mod}$ où R est un anneau pas nécessairement commutatif (voir [11] par exemple), bien que dans la pratique ce ne soit pas toujours la forme où elles apparaissent naturellement.

86. Un tel foncteur vérifie nécessairement que $F(\{0\}) = \{0\}$.

87. Noter qu'un foncteur $R\text{-Mod}^{op} \rightarrow S\text{-Mod}$ transforme un morphisme de R -modules $M \rightarrow N$ en un morphisme de S -modules $G(N) \rightarrow G(M)$, c'est à dire inverse le sens des morphismes et donc des suites et complexes.

88. Ces dernières sont des catégories dont les morphismes ont une structure de groupe abélien pour lequel la composition est bilinéaire, un objet à la fois initial et terminal, telle que le produit de toute paire d'objets existe, et tout morphisme a un noyau et un conoyau satisfaisant des propriétés similaires à celles des morphisme de groupes abéliens.

Un foncteur additif (Définition 6.1.1) est aussi additif au sens naïf suivant :

Lemme 6.1.3. *Si F est additif alors, pour tout couple de morphismes (f, g) , on a $F(f + g) = F(f) + F(g) \in S\text{-Mod}$.*

Exercice 6.1.4. Démontrer le lemme 6.1.3.

Le lemme suivant fournit des exemples fondamentaux de ces notions. Sa preuve est laissée en exercice (on pourra consulter le corrigé du devoir à la maison).

Lemme 6.1.5. *Soit $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ une suite exacte courte. Alors pour tout R -module M (à droite ou à gauche selon les cas) les suites*

$$\begin{aligned} M \otimes_R A &\rightarrow M \otimes_R B \rightarrow M \otimes_R C \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, A) &\xrightarrow{f \circ -} \text{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{g \circ -} \text{Hom}_R(M, C) \text{ et} \\ 0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, M) &\xrightarrow{- \circ g} \text{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{- \circ f} \text{Hom}_R(A, M) \end{aligned}$$

sont exactes. En d'autres termes, $M \otimes_R -$ est exact à droite et $\text{Hom}_R(-, M)$, $\text{Hom}_R(M, -)$ sont exacts à gauche⁸⁹.

Attention : les suites du lemme ne sont en général pas des suites exactes courtes car la première n'est en général pas injective et les dernières ne sont en général pas surjectives.

Ceci conduit à regarder des modules rendant ces suites toujours exactes. Il s'agit respectivement des modules plats, projectifs et injectifs.

Définition 6.1.6. (1) Un R -module P est dit projectif si, pour tout morphisme $f : P \rightarrow N$ de R -modules et tout morphisme surjectif $p : M \twoheadrightarrow N$ de R -modules, il existe un morphisme \tilde{f} tel que $f = p \circ \tilde{f}$:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \swarrow \tilde{f} & \downarrow f \\ M & \xrightarrow{p} & N. \end{array}$$

(2) Un R -module I est dit injectif si, pour tout morphisme $f : N \rightarrow I$ de R -modules et tout morphisme injectif $i : N \hookrightarrow M$ de R -modules, il existe un morphisme \tilde{f} tel que $f = \tilde{f} \circ i$:

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ & \nwarrow \tilde{f} & \\ N & \xrightarrow{i} & M. \end{array}$$

(3) un R -module P est dit plat si pour toute suite exacte $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$, la suite $0 \rightarrow P \otimes_R A \rightarrow P \otimes_R B \rightarrow P \otimes_R C \rightarrow 0$ est exacte.

Il est clair que les modules injectifs sont la notion duale des modules projectifs (obtenus en inversant le sens des flèches). Par ailleurs on a défini la platitude pour les R -modules à droite, mais on a une définition symétrique pour les R -modules à gauche bien-sûr.

Les modules projectifs et injectifs vérifient bien la propriété annoncée.

Proposition 6.1.7. (1) *Un R -module P est projectif si et seulement si pour toute suite exacte $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$, la suite $0 \rightarrow \text{Hom}_R(P, A) \xrightarrow{f \circ -} \text{Hom}_R(P, B) \xrightarrow{g \circ -} \text{Hom}_R(P, C) \rightarrow 0$ est exacte.*

89. Notons que les catégories d'arrivées de ces foncteurs sont $R\text{-Mod}$ si R est commutatif et \mathbf{Ab} sinon

(2) Un R -module I est injectif si et seulement si pour toute suite exacte $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$, la suite $0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, I) \xrightarrow{-\circ g} \text{Hom}_R(B, I) \xrightarrow{-\circ f} \text{Hom}_R(A, I) \rightarrow 0$ est exacte.

Autrement dit un R -module N est projectif (resp. injectif) si et seulement si le foncteur $\text{Hom}_R(N, -)$ (resp. $\text{Hom}_R(-, N)$) est exact.

Démonstration. Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ une suite exacte courte. Pour tout module P , on a un complexe

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, A) \xrightarrow{f \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, B) \xrightarrow{g \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, C)$$

où la première application est $(\phi : P \rightarrow A) \mapsto (f \circ \phi; P \rightarrow B)$ et la deuxième est $(\psi : P \rightarrow B) \mapsto (g \circ \psi; P \rightarrow C)$. Comme $f \circ g = 0$, on a bien que la composée de deux applications linéaires est nulle. Montrons que le premier morphisme $f \circ -$ est injectif. En effet si $f \circ \phi : P \rightarrow B$ est nulle, alors ϕ est nulle puisque f est injective. Montrons maintenant que $\ker(g \circ -) = \text{Im}(f \circ -)$. Puisque on sait déjà qu'on a un complexe, il suffit de montrer l'inclusion du noyau de $g \circ -$ dans l'image de $f \circ -$. Soit $g \circ \psi = 0$, alors pour tout $m \in P$, on a que $\phi(m) \in \ker(g)$, donc il existe $a \in A$ tel que $\phi(m) = f(a)$ car la suite $A \rightarrow B \rightarrow C$ est exacte. Mais comme en plus f est injective, ce y est unique. On le note $\psi(m)$. L'unicité garantit que l'application $m \mapsto \psi(m)$ est bien linéaire et par construction on a $\phi = f \circ \psi$.

Jusqu'à présent nous n'avons pas utilisé d'hypothèse sur P et nous avons que pour que la suite $\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, A) \xrightarrow{f \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, B) \xrightarrow{g \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, C)$ soit exacte il faut et il suffit que le dernier morphisme $\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, B) \xrightarrow{g \circ -} \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(P, C)$ soit surjectif. Or ce morphisme est surjectif précisément si pour tout morphisme $\psi : P \rightarrow C$, il existe un morphisme $\tilde{\psi}$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \swarrow \tilde{\psi} & \downarrow \psi \\ B & \xrightarrow{g} & C. \end{array}$$

Donc si P est projectif, on a bien que ce dernier morphisme est surjectif pour toute suite exacte $A \rightarrow B \rightarrow C$. Réciproquement, si ce résultat est vrai pour toute suite exacte, alors pour toute surjection $p : M \twoheadrightarrow N$, on a une suite exacte $\ker(p) \hookrightarrow M \twoheadrightarrow N$ et la condition de surjectivité assure donc que pour toute $f : P \rightarrow N$, on a l'existence de \tilde{f} telle que $p \circ \tilde{f} = f$.

Le résultat pour les modules injectifs est complètement dual et se démontre *mutatis mutandis*. □

Exemple 6.1.8. Un module libre est toujours projectif, car pour construire une application linéaire issue d'un module libre, il suffit de choisir les images de sa base librement. Plus généralement si $P \oplus Q$ est libre, alors P et Q sont projectifs. En effet, on peut construire un relèvement de la composée $P \oplus Q \rightarrow P \xrightarrow{f} N$ le long de toute surjection $M \twoheadrightarrow N$. Mais en composant ce relèvement avec l'inclusion canonique $P \hookrightarrow P \oplus Q$ on en obtient un pour f . Ces exemples sont en fait tous les exemples :

Lemme 6.1.9. *Un R -module P est projectif si et seulement s'il est facteur direct d'un module libre : il existe Q tel que $P \oplus Q$ soit libre.*

Démonstration. Il suffit de considérer une surjection R -linéaire $p : F \twoheadrightarrow P$ où F est un module libre⁹⁰ et on note $Q = \ker(p)$. Il suffit de montrer que la suite exacte $Q \hookrightarrow F \twoheadrightarrow P$ est scindée pour conclure que $F = P \oplus Q$. Ceci découle du lemme 6.1.16 ci-dessous. □

90. On laisse au lecteur le soin d'en construire une.

Il est malheureusement plus compliqué de caractériser les modules injectifs. mais on a le critère suivant

Lemme 6.1.10 (Baer). *Un R -module E est injectif si et seulement s'il satisfait à la condition (38)*

(38) *pour tout idéal I de R , le morphisme $\text{Hom}_R(R, E) \rightarrow \text{Hom}_R(I, E)$ est surjectif.*

Exemple 6.1.11. Si R est un corps, tous les modules sont projectifs et injectifs.

Exercice 6.1.12. Démontrer le résultat énoncé dans l'exemple précédent.

Exemple 6.1.13. Un module projectif de type fini sur \mathbb{Z} est nécessairement libre. Cela provient du théorème de structure des groupes abéliens et de l'exercice suivant.

Exercice 6.1.14. Démontrer que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ n'est pas projectif sur \mathbb{Z} .

Lemme 6.1.15. *Un module projectif (a fortiori libre) est plat.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour toute injection $0 \rightarrow N \rightarrow M$, l'application $P \otimes_R N \rightarrow P \otimes_R M$ est encore injective (puisque le produit tensoriel est exact à droite). Soit F tel que $P \oplus F \cong \bigoplus_I R$. On a (par l'exemple 5.1.19) un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} P \otimes_R N & \longrightarrow & (P \otimes_R N) \oplus (F \otimes_R N) & \xrightarrow{\sim} & (P \oplus F) \otimes_R N & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_I N \\ \downarrow & & & & & & \downarrow \\ P \otimes_R M & \longrightarrow & (P \otimes_R M) \oplus (F \otimes_R M) & \xrightarrow{\sim} & (P \oplus F) \otimes_R M & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_I M \end{array}$$

dans lequel toutes les flèches horizontales sont injectives ainsi que la flèche verticale de droite (puisque la somme directe est exacte). On en déduit que la composée de $P \otimes_R N \rightarrow P \otimes_R M$ avec la flèche du bas est injective et donc que $P \otimes_R N \rightarrow P \otimes_R M$ est injective. \square

Lemme 6.1.16. *Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow P \rightarrow 0$ une suite exacte avec P projectif. Alors la suite est scindée. Si de plus B est aussi projectif alors A est également projectif.*

Démonstration. Cela découle de la propriété d'un module projectif appliqué à

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \swarrow \text{dotted} & \parallel \\ B & \longrightarrow & P \end{array}$$

qui donne une section $s : P \rightarrow B$ de la projection $B \rightarrow P$. Et donc $B \cong A \oplus P$.

Supposons maintenant que B est projectif. Alors B est un facteur direct d'un libre, donc A aussi et donc il est projectif (exemple 6.1.8). \square

Exemple 6.1.17 (Les cas de \mathbb{Q}). *Les nombres rationnels \mathbb{Q} sont un \mathbb{Z} -module plat mais qui n'est pas projectif. C'est aussi un module injectif.*

En effet par le Lemme de Baer 6.1.10, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'application $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ est surjective. Soit donc $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ et posons $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ définie par $g(k) = k \frac{f(n)}{n}$. Clairement $g|_{n\mathbb{Z}} = f$. Notons que cette preuve s'applique à tout \mathbb{Z} -module M dans lequel on peut diviser par tout entier.

Si \mathbb{Q} était projectif, toute surjection $f : M \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0$ serait scindée en vertu du diagramme

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q} \longrightarrow 0 \\ & \swarrow \text{dotted} & \parallel \\ & s & \mathbb{Q} \end{array}$$

Considérons l'application surjective $g : \bigoplus_{\mathbb{N}^*} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^*)} \rightarrow \mathbb{Q}$ définie par $g((n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{n_k}{k}$; cette somme est bien convergente puisqu'on ne considère que des suites avec

un nombre fini de n_k non nuls. Si g admet une section $s : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^*)}$ alors on doit avoir pour tout $n \in \mathbb{N}^* : s(1) = ns(1/n)$, d'où $s(1/n) = s(1)/n$. Or les coordonnées de $s(1)$ sont des entiers fixés non tous nuls, donc pour $n \gg 0 : s(1/n) \notin \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^*)}$ ce qui est impossible.

Pour la platitude on renvoie à l'exercice 6.1.33

Lemme 6.1.18. *Le quotient \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est un \mathbb{Z} -module injectif mais n'est pas plat (ni projectif donc).*

Démonstration. En effet, la preuve de l'injectivité se fait comme dans l'exemple 6.1.17. Montrons que \mathbb{Q}/\mathbb{Z} n'est pas plat. Considérons l'application $f : \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}$ qui est injective. L'application $f \otimes \text{id} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ n'est autre que l'application $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui n'est pas injective car $f(1/n) = 1 = 0$ dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . \square

Exemple 6.1.19. Si $(I_j)_{j \in \mathcal{J}}$ est une famille quelconque de R -modules injectifs, alors, le produit $\prod_{j \in \mathcal{J}} I_j$ est aussi injectif. Cela découle de l'isomorphisme naturel

$$(39) \quad \text{Hom}_R(N, \prod_{j \in \mathcal{J}} I_j) \cong \prod_{j \in \mathcal{J}} \text{Hom}_R(N, I_j)$$

et du fait que le produit suites exactes courtes de R -module est encore une suite exacte courte. De même une somme directe quelconque de modules projectifs est encore projective.

Exemple 6.1.20. (Des modules projectifs non-libres)

- (1) Considérons un entier non premier $m = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$. Alors par le lemme des restes chinois, on a que

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_n^{a_n}\mathbb{Z}$$

comme $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -module. Il suit que chaque $\mathbb{Z}/p_i^{a_i}\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -module projectif, non-libre (pour des raisons immédiates de cardinaux). De même, on peut considérer, pour des anneaux R_1, \dots, R_n , l'anneau produit $\pi := R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$. Alors chaque R_i est un π -module (via les morphismes de projection $\pi \rightarrow R_i$) et de plus $\pi \cong R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$ en tant que π -module; ils sont en particulier projectifs et non-libres sur R (sauf cas très particuliers laissés au lecteur).

- (2) Dans le cadre non-commutatif, l'algèbre linéaire donne un exemple bien connu. En effet considérons un corps (ou même un anneau commutatif) \mathbb{F} et prenons $A = M_n(\mathbb{F})$ l'algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{F} . Alors, A agit sur \mathbb{F}^n , le sous-espace des vecteurs colonnes de dimension n (par multiplication matricielle⁹¹). Si $n \geq 1$, alors \mathbb{F}^n n'est pas libre sur A (par un argument de dimension au dessus de \mathbb{F}) mais est bien projectif car $A \cong \mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^n \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{F}^n$.

Un des intérêts de ces notions est que tout module peut être approché par de tels modules.

Définition 6.1.21. Soit M un R -module.

- (1) Une résolution *projective* de M est un complexe de chaînes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que chaque P_n est projectif et vérifiant $H_{i>0}(P_*) = 0, H_0(P_*) = M$.
- (2) Une résolution *injective* de M est un complexe de cochaînes $(I^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que chaque I^n est injectif et vérifiant $H^{i>0}(I^*) = 0, H^0(I^*) = M$.

Le premier lemme fondamental de cette partie est

Lemme 6.1.22. *Tout module admet des résolutions projectives et injectives.*

⁹¹. Ou plus intrinséquement, on prend l'espace vectoriel $V = \mathbb{F}^n$ et $A = \text{End}(V, V)$ les endomorphismes \mathbb{F} -linéaire de V .

Démonstration. On commence par choisir une surjection $f_0 : P_0 \rightarrow M$ où P_0 est projectif (on peut même prendre P_0 libre : il suffit de prendre $P_0 = \bigoplus_S R$ où S est un système de générateurs de M). Soit alors $M_0 = \ker(P_0 \xrightarrow{f_0} M)$. Soit alors $P_1 \xrightarrow{f_1} M_0$ une surjection avec P_1 projectif et on note $d_0 : P_1 \xrightarrow{f_1} M_0 \hookrightarrow P_0$. On a par construction que $P_0/\text{Im}(d_0) \cong M$. On continue la construction comme suit. Supposons avoir construit inductivement une suite exacte $P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} P_{n-2} \xrightarrow{d_{n-3}} \dots P_0$ tel que les P_i soient projectifs. On note $M_{n-1} = \ker(d_{n-1})$ et on choisit $P_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1}$ une surjection R -linéaire. On a alors que la composée $d_n : P_n \rightarrow M_{n-1} \hookrightarrow P_{n-1}$ vérifie que $\text{Im}(d_n) = \ker(d_{n-1})$ de telle sorte que l'on a étendu la suite exacte précédente. On obtient ainsi en itérant une résolution projective (P_*, d) .

La construction des résolutions injectives est duale ; le seul point délicat est de construire une injection d'un module quelconque M dans un module injectif. Pour cela notons tout d'abord que $I_R := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un R -module injectif (où R agit sur I_R via l'action à droite sur lui-même : $r \cdot f : x \mapsto f(x \cdot r)$). En effet, il faut voir que $\text{Hom}_R(-, I_R)$ est exact. Mais, par la proposition 5.1.22, c'est équivalent à montrer que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R \otimes_R -, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est exact. Étant donné que $R \otimes_R M \cong M$ pour tout M , cela suit du fait que \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est injectif (lemme 6.1.18). Le module I_R est notre "brique élémentaire" qui va jouer le rôle dual du R -module projectif canonique R pour les injectifs. Pour tout R -module N , on a un morphisme R -linéaire

$$\iota_N : N \longrightarrow \prod_{\text{Hom}_R(N, I_R)} I_R, \quad n \mapsto \iota(n) := (\varphi(n))_{\varphi \in \text{Hom}_R(N, I_R)}.$$

Comme le produit d'injectif est injectif par 6.1.19, il nous suffit maintenant de vérifier que ι est injectif. Pour cela, il suffit de construire pour tout $n \neq 0$ un morphisme $\varphi : N \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tel que $\varphi(n) \neq 0$. Comme \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est injectif, il suffit de construire un tel morphisme pour le sous-module $Rn \subset N$ engendré par n (puis d'étendre le morphisme obtenu). Si ce sous-groupe abélien engendré par n est libre, il suffit d'envoyer n sur n'importe quel élément non-nul. Sinon⁹², on prend un entier $p > 1$ quelconque divisant l'ordre du sous-groupe engendré par n . Alors, $n \mapsto [1/p] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est bien R -linéaire et non-nul en n . La preuve de l'existence de l'inclusion dans un injectif est donc finie. \square

En pratique, on peut prendre des résolutions libres comme résolutions projectives.

Notons que si P_* est une résolution projective de M , alors $M \cong P_0/\text{Im}(d_1 : P_1 \rightarrow P_0)$ et donc on a un morphisme de R -module $\eta_0 : P_0 \rightarrow M$. On en déduit un morphisme de complexes (où M est vu comme concentré en degré 0) : $P_* \xrightarrow{\eta} M$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d} & P_1 & \xrightarrow{d} & P_0 \\ & & \eta_2 \downarrow & & \eta_1 \downarrow & & \downarrow \eta_0 \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M \end{array}$$

qui est un *quasi-isomorphisme*. Réciproquement, tout quasi-isomorphisme $P_* \rightarrow M$ où P_* est un complexe de module projectifs est une résolution projective puisque l'homologie d'un complexe concentré en degré 0 est réduite à ce module en degré 0. On a un quasi-isomorphisme similaire $\beta : M \rightarrow I^*$ pour une résolution injective. On a donc montré

Lemme 6.1.23. *Une résolution projective de M est (à isomorphisme près) la même chose qu'un quasi-isomorphisme de complexes de chaînes $\eta : P_* \rightarrow M$ où chaque P_i est projectif.*

De même, une résolution injective de M est (à isomorphisme près) la même chose qu'un quasi-isomorphisme de complexes de cochaînes $\beta : M \rightarrow I^$ où chaque I^j est injectif.*

⁹². Si on prend \mathbb{Q}/\mathbb{Z} et pas \mathbb{Q} dans la définition de la brique élémentaire I_R , c'est justement pour pouvoir gérer les éléments d'ordre fini.

Notation 6.1.24. On notera souvent $\eta : P_* \xrightarrow{\sim} M$ une résolution projective.

Exemple 6.1.25. Le complexe $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{*m} \mathbb{Z}$ est une résolution projective (car libre) de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Exercice 6.1.26. Montrer que P_* est une résolution projective si et seulement s'il existe un morphisme $\eta_0 : P_0 \rightarrow M$ tel que la longue suite

$$\cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\eta_0} M \rightarrow 0$$

soit exacte. Donner un résultat similaire pour une résolution injective.

Le théorème suivant est le deuxième résultat fondamental de cette section.

Théorème 6.1.27 (Relèvement des morphismes à une résolution projective). *Soient M, N des R -modules, $\eta : P_* \rightarrow M$ une résolution projective de M et $\alpha : Q_* \rightarrow N$ un quasi-isomorphisme quelconque. Pour tout morphisme de R -modules $f : M \rightarrow N$, il existe un morphisme de complexes de chaînes de R -modules $\tilde{f} : P_* \rightarrow Q_*$ rendant le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} P_* & \xrightarrow{\tilde{f}} & Q_* \\ \simeq \downarrow \eta & & \simeq \downarrow \alpha \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

commutatif. De plus le morphisme \tilde{f} est unique à homotopie de chaînes près (c'est-à-dire que deux tels morphismes sont des morphismes de complexes de chaînes qui sont reliés par une homotopie de chaînes au sens de la définition 5.3.12).

En appliquant la proposition à $f = M \xrightarrow{\text{id}} M$ et deux résolutions projectives on obtient

Corollaire 6.1.28. *Deux résolutions projectives P_*, Q_* d'un même module M sont quasi-isomorphes.*

Preuve du théorème 6.1.27. On doit donc construire des applications $\tilde{f}_n : P_n \rightarrow Q_n$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif :

$$(40) \quad \begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_3 & \xrightarrow{d} & P_2 & \xrightarrow{d} & P_1 & \xrightarrow{d} & P_0 & \xrightarrow{\eta_0} & M \\ & & \tilde{f}_3 \downarrow & & \tilde{f}_2 \downarrow & & \tilde{f}_1 \downarrow & & \tilde{f}_0 \downarrow & & \downarrow f \\ \cdots & \longrightarrow & Q_3 & \xrightarrow{d} & Q_2 & \xrightarrow{d} & Q_1 & \xrightarrow{d} & Q_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & N \end{array}$$

Comme $\alpha : Q_* \rightarrow N$ est un quasi-isomorphisme on a que $\alpha_0 : Q_0 \rightarrow N$ induit un isomorphisme $H_0(Q) = Q_0/d(Q_1) \cong N$. En particulier α_0 est surjective. On applique alors que P_0 est projectif pour construire \tilde{f}_0 grâce au diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & P_0 & \\ \tilde{f}_0 \swarrow & \downarrow f \circ \eta_0 & \\ Q_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & N \end{array}$$

rendant commutatif le carré de (40) le plus à droite. Par commutativité de ce diagramme et puisque la première ligne est un complexe, on a que $\alpha_0 \circ \tilde{f}_0 \circ d = 0$. Ainsi $\tilde{f}_0 \circ d$ définit une application linéaire $P_1 \rightarrow \ker(\alpha_0)$. Puisque que $\eta_* : Q_* \rightarrow N$ est un quasi-isomorphisme, la ligne du bas de (40) est exacte. Ainsi $d : Q_1 \rightarrow \ker(\alpha_0)$ est surjective. Utilisant que P_1 est projectif, on obtient \tilde{f}_1 rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & P_1 & \\ \tilde{f}_1 \swarrow & \downarrow \tilde{f}_0 \circ d & \\ Q_1 & \xrightarrow{d} & \ker(\alpha_0) \hookrightarrow Q_0 \end{array}$$

commutatif.

Ceci nous donne donc \tilde{f}_1 et la commutativité du carré impliquant \tilde{f}_0 et \tilde{f}_1 . On construit les autres $\tilde{f}_{n \geq 2}$ du relèvement par récurrence en appliquant la même méthode.

Pour l'unicité à homotopie près, la méthode est similaire. Supposons donnés \tilde{f}_* et \tilde{f}'_* deux relèvements de $f : M \rightarrow N$. On doit construire des morphismes $h_n : P_n \rightarrow Q_{n+1}$ tels que les triangles suivants

$$(41) \quad \begin{array}{ccc} & P_n & \\ \swarrow h_n & \downarrow \tilde{f}_n - \tilde{f}'_n - h_{n-1} \circ d & \\ Q_{n+1} & \xrightarrow{d} & Q_n \end{array}$$

soient commutatifs. On commence par construire h_0 , qui doit donc vérifier $d \circ h_0 = \tilde{f}_0 - \tilde{f}'_0$ (que l'on peut voir comme un cas particulier avec $h_{-1} = 0$). Comme \tilde{f}_0 et \tilde{f}'_0 sont tous les deux des relèvements de f , leur différence est un relèvement de 0; c'est-à-dire que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \xrightarrow{\eta_0} & M \\ \downarrow \tilde{f}_0 - \tilde{f}'_0 & & \downarrow 0 \\ Q_1 & \xrightarrow{d} & Q_0 \xrightarrow{\alpha_0} N \end{array}$$

une application linéaire de P_0 dans $\ker(\alpha_0)$. On utilise encore que $d : Q_1 \rightarrow \ker(\alpha_0)$ est surjective pour déduire l'existence de h_0 du fait que P_0 est projectif. Supposons maintenant avoir construit h_0, \dots, h_m faisant commuter les triangles (41) pour tout $0 \leq n \leq m$ (avec la convention $h_{-1} = 0$). Comme \tilde{f}_* et \tilde{f}'_* sont des morphismes de complexes et par commutativité du triangle pour $n = m$, on a que

$$\begin{aligned} d(\tilde{f}_{m+1} - \tilde{f}'_{m+1} - h_m \circ d) &= (\tilde{f}_m - \tilde{f}'_m)d - dh_m d \\ &= (\tilde{f}_m - \tilde{f}'_m)d - (\tilde{f}_m - \tilde{f}'_m - h_{m-1}d)d \\ &= 0 - h_{m-1}d^2 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi on a que $\tilde{f}_{m+1} - \tilde{f}'_{m+1} - h_m \circ d$ est à valeur dans $\ker(d : Q_{m+1} \rightarrow Q_m)$. On a donc un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & P_{m+1} & \\ \swarrow h_{m+1} & \downarrow \tilde{f}_{m+1} - \tilde{f}'_{m+1} - h_m \circ d & \\ Q_{m+2} & \xrightarrow{d} & \ker(d : Q_{m+1} \rightarrow Q_m) \end{array}$$

Comme $H_{m+1}(Q_*) = 0$ (puisque Q_* est une résolution de N), on a que l'application $d : Q_{m+2} \rightarrow \ker(d : Q_{m+1} \rightarrow Q_m)$ est surjective, et donc par projectivité de P_{m+1} , on en déduit l'existence de l'application linéaire h_{m+1} rendant le diagramme commutatif. On conclut évidemment par récurrence. \square

On a des résultats analogues pour les résolutions injectives.

Théorème 6.1.29 (Relèvement des morphismes à une résolution injective). *Soient M, N des R -modules, $\iota : N \rightarrow I^*$ une résolution injective de N et $\alpha : M \rightarrow Q^*$ un quasi-isomorphisme quelconque. Pour tout morphisme de R -modules $f : M \rightarrow N$, il existe un morphisme de complexes de chaînes de R -modules $\tilde{f} : Q^* \rightarrow I^*$ rendant le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} Q^* & \xrightarrow{\tilde{f}} & I^* \\ \alpha \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

commutatif. De plus le morphisme \tilde{f} est unique à homotopie de chaînes près (c'est-à-dire que deux tels morphismes sont des morphismes de complexes de chaînes qui sont reliés par une homotopie de chaînes au sens de la définition 5.3.12).

Appliquée à $f = \text{id} : M \rightarrow M$ et deux résolutions injectives, le théorème donne

Corollaire 6.1.30. *Deux résolutions injectives I^* , J^* d'un même module M sont quasi-isomorphes.*

Exercice 6.1.31. Le but de l'exercice est de démontrer le lemme de Baer 6.1.10.

- (1) Montrer qu'un module injectif vérifie la condition (38).
- (2) Soit E un R -module vérifiant la condition (38). On se donne une injection $N \xrightarrow{f} M$ et une application R -linéaire $g : N \rightarrow E$. On note X l'ensemble des couples (P, h_P) où P est un sous-module de M vérifiant $f(N) \subset P \subset M$ et $h_P : P \rightarrow E$ est une extension de g , c'est-à-dire $g = h_P \circ f$. On dit que $(P, h_P) \leq (Q, h_Q)$ si $P \subset Q$ et $h_Q/P = h_P$. Montrer que \leq est une relation d'ordre partiel.
- (3) En déduire qu'un R -module E est injectif si et seulement s'il satisfait à la condition (38) (on pourra utiliser le (2) et appliquer le lemme de Zorn).

Exercice 6.1.32. Montrer que si M est projectif alors son dual $\text{Hom}_A(M, A)$ est injectif.

Exercice 6.1.33. Si M est un \mathbb{Z} -module, on note $S^{-1}M$ le \mathbb{Z} -module formé des éléments $\frac{x}{n}$ avec $x \in M$ et $n \in S$ et dans lequel $\frac{x}{n} = \frac{y}{m}$ si et seulement si $\exists k \in S : k(mx - ny) = 0$ (c'est-à-dire si et seulement si $mx - ny$ est un élément de torsion de M). En particulier $\frac{x}{n} = 0$ ($= \frac{0}{1}$) si et seulement si x est un élément de torsion.

- (1) Vérifier que $\mathbb{Q} = S^{-1}\mathbb{Z}$.
- (2) Démontrer que tout élément de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ s'écrit sous la forme $\frac{1}{n} \otimes x$ avec $x \in M$, et en déduire un isomorphisme $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{\cong} S^{-1}M$.
- (3) Démontrer que si $M' \xrightarrow{f} M$ une application injective alors $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M' \xrightarrow{\text{id} \otimes f} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ est également injective et en déduire que \mathbb{Q} est plat.

6.2. FONCTEURS DÉRIVÉS

Le théorème de comparaison 6.1.27 permet d'associer des complexes de (co)chaînes canoniques au produit tensoriel ou aux foncteurs de morphismes. Et plus généralement à tout foncteur exact à droite, voir définition 6.2.6 ci-dessous.

Commençons par étendre la notion de résolution projective ou injective à $R\text{-Mod}^{op}$. La proposition (6.1.7) caractérise les modules projectifs (resp. injectifs) comme les objets N de la catégorie $R\text{-Mod}$ tels que le foncteur $\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(N, -)$ (resp. $\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(-, N)$) soit exact. Cette formulation est purement catégorique⁹³ Ainsi, on peut généraliser la définition de projectifs et injectifs de la façon suivante.

Définition 6.2.1. Soit $\mathbf{C} = R\text{-Mod}$, $R\text{-Mod}^{op}$ ou toute catégorie abélienne. Un objet projectif (resp. injectif) de \mathbf{C} est un objet X tel que le foncteur $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -)$ (resp. $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)$) soit exact.

Les résolutions projectives et injectives dans \mathbf{C} sont définies comme dans la définition 6.1.21 en prenant des objets projectifs (resp. injectifs) à la place des modules projectifs (resp. injectifs).

Par (6.1.7), les objets projectifs (resp. injectifs) de $R\text{-Mod}$ sont bien les modules projectifs (resp. injectifs).

⁹³. pourvu que la catégorie ait une notion de suites exactes

Exemple 6.2.2. Comme $\text{Hom}_{R\text{-Mod}^{op}}(P, Q) = \text{Hom}_R(Q, P)$, on obtient immédiatement que les objets projectifs de $R\text{-Mod}^{op}$ sont les modules injectifs et les objets injectifs de $R\text{-Mod}^{op}$ sont les modules projectifs! De même les résolutions projectives d'un objet X dans $R\text{-Mod}^{op}$ sont données par des résolutions injectives du R -module sous-jacent à X (les flèches étant précisément lues dans l'autre sens).

Théorème 6.2.3. *Les théorèmes 6.1.27 et 6.1.29 ainsi que leurs corollaires 6.1.30, 6.1.28 sont valides pour les résolutions projectives et injectives dans la catégorie $R\text{-Mod}^{op}$.*

Démonstration. Cela découle de l'exemple 6.2.2 puisque injectif et projectif s'échangent entre $R\text{-Mod}$ et $R\text{-Mod}^{op}$. \square

Remarque 6.2.4. Il est facile de déduire de sa preuve que le théorème 6.1.27 reste valide dans toute catégorie abélienne pour peu qu'on puisse trouver pour tout objet M une suite exacte $P \rightarrow M \rightarrow 0$ où P est projectif; et de même pour le théorème 6.1.29 dans toute catégorie abélienne telle que, pour tout objet M , il existe une suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow I$ où I est injectif⁹⁴.

Notons que si F est un foncteur additif, $F(M \xrightarrow{0} N) = F(M) \xrightarrow{0} F(N)$. Autrement dit F envoie un morphisme nul sur un morphisme nul. En particulier :

Lemme 6.2.5. *Si (C, d) est un complexe de (co)chaînes, et F un foncteur additif, alors $(F(C), F(d))$ est un complexe de (co)chaînes.*

Définition 6.2.6. Soit $F : \mathbf{C} \rightarrow S\text{-Mod}$ un foncteur exact à droite où $\mathbf{C} = R\text{-Mod}$ ou $R\text{-Mod}^{op}$. Soit M un objet de \mathbf{C} et $P_* \rightarrow M$ une résolution projective de M . On appelle complexe de chaîne dérivé de F en M le complexe $\mathbb{L}F_*(M) := F(P_*)$. La règle $M \mapsto \mathbb{L}F_*(M)$ s'appelle "le" foncteur dérivé (à gauche) de F qui est noté $\mathbb{L}F$.

On appellera i -ème foncteur d'homologie de F le i -ème groupe d'homologie $H_i(F(P_*))$.

Le théorème suivant garantit que la construction est indépendante du choix de la résolution et que $\mathbb{L}F$ est un foncteur "à homotopie près".

Théorème 6.2.7. *Soit F un foncteur exact à droite.*

- (1) *Soient P_*, Q_* deux résolutions projectives de M . Alors il existe un quasi-isomorphisme canonique (à homotopie de chaînes près) $F(P_*) \rightarrow F(Q_*)$.*
- (2) *Pour tout morphisme $f : M \rightarrow N$ dans \mathbf{C} , et pour toutes résolutions projectives $P_*(M)$ et $P_*(N)$ de M, N on a des morphismes de complexes de chaînes $\mathbb{L}F(f) : \mathbb{L}F_*(M) \rightarrow \mathbb{L}F_*(N)$ tels que $\mathbb{L}F(f \circ g)$ est homotope à $\mathbb{L}F(f) \circ \mathbb{L}F(g)$ et $\mathbb{L}F(\text{id}_M)$ est homotope à $\text{id}_{\mathbb{L}F_*(M)}$.*
- (3) *Les i -ièmes groupes de (co)homologie $M \mapsto H_i(\mathbb{L}F_*(M))$ et les morphismes $H_i(\mathbb{L}F(f))$ forment un foncteur*

$$H_i(\mathbb{L}F) : \mathbf{C} \rightarrow S\text{-Mod}.$$

Démonstration. (1) D'après le théorème de relèvement 6.1.27, il existe un morphisme

$$P_* \xrightarrow{f} Q_* \text{ tel que le diagramme } \begin{array}{ccc} P_* & \xrightarrow{f} & Q_* \\ \simeq \downarrow \eta & & \simeq \downarrow \alpha \\ M & \xrightarrow{\text{id}} & M \end{array} \text{ soit commutatif et de plus, si on}$$

a un tel autre morphisme $f' : P_* \rightarrow Q_*$, alors il existe une homotopie de chaînes (définition 5.3.12) entre f et f' . En inversant les rôles de P_* et Q_* , on obtient $g : Q_* \rightarrow P_*$ un morphisme de complexes relevant id_M (également unique à homotopie de chaînes près). Il suit que les composées $f \circ g : Q_* \rightarrow Q_*$ et $g \circ f : P_* \rightarrow P_*$

⁹⁴. De telles catégories sont respectivement appelées des catégories abéliennes avec assez de projectifs ou assez d'injectifs.

sont des morphismes de complexes relevant $\text{id}_M : P_* \xrightarrow{g \circ f} P_*$. Or l'identité id_{P_*}

$$\begin{array}{ccc} P_* & \xrightarrow{g \circ f} & P_* \\ \simeq \downarrow \eta & & \simeq \downarrow \eta \\ M & \xrightarrow{\text{id}} & M \end{array}$$

en est un autre relèvement. Il suit encore et toujours de l'unicité à homotopie de chaînes près dans le théorème 6.1.27 que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont homotopes à l'identité : $f \circ g = \text{id}_{Q_*} + dh + hd$, $g \circ f = \text{id}_{P_*} + ds + sd$. Il suit de l'additivité 6.1.3 et de la functorialité de F que $F(f) \circ F(g) = F(\text{id}_{Q_*}) + F(d)F(h) + F(h)F(d)$ et $F(g) \circ F(f) = F(\text{id}_{P_*}) + F(d)F(s) + F(s)F(d)$ sont homotopes à $F(\text{id}) = \text{id}$ et donc induisent des isomorphismes en homologie. Autrement dit ce sont des quasi-isomorphismes.

Ceci nous donne l'existence d'un quasi-isomorphisme $F(f) := F(P_*) \rightarrow F(Q_*)$ et par ailleurs, ce dernier est indépendant du choix de f à homotopie près par le même argument.

- (2) Soit $M \xrightarrow{f} N$ et $N \xrightarrow{g} P$ deux morphismes dans \mathbf{C} . Soient $P_*(M)$, $P_*(N)$ et $P_*(P)$ des résolutions projectives respectives de M , N , P et $\tilde{f} : P_*(M) \rightarrow P_*(N)$ et $\tilde{g} : P_*(N) \rightarrow P_*(P)$ données par le théorème 6.1.27 qui donne aussi le relevé $\widetilde{g \circ f} : P_*(M) \rightarrow P_*(P)$ de $g \circ f$. On note comme dans le point (1) $\mathbb{L}F(f) := F(\tilde{f})$ et $\mathbb{L}F(g) := F(\tilde{g})$. Comme les composées $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ et $\widetilde{g \circ f}$ sont deux relèvements de $g \circ f$ entre les mêmes résolutions, ils sont reliés par une homotopie de chaînes et donc leur image par F également en vertu du lemme 6.1.3. L'argument s'applique à l'identité de même.
- (3) Puisque des morphismes homotopes induisent exactement le même morphisme sur les groupes d'homologie, il suit que si $f : P_* \rightarrow Q_*$ est homotope à f' on a que $H_i(F(f)) = H_i(F(f')) : H_i(\mathbb{L}(F(P_*))) \rightarrow H_i(\mathbb{L}(F(Q_*)))$. Ainsi $H_i(\mathbb{L}F(f))$ est indépendant du choix du relevé f (dans le point (2)) et il découle des points (1) et (2) que $H_i(\mathbb{L}F(-))$ est bien un foncteur. □

Exemple 6.2.8 (Degré 0 et cas projectif). En degré 0, nous avons toujours un isomorphisme naturel $H_0(\mathbb{L}F(M)) \xrightarrow{\cong} F(M)$ induit par le morphisme $F(\eta_0) : F(P_0) \rightarrow F(M)$ pour toute résolution $\eta : P_* \rightarrow M$. Autrement dit l'homologie en degré 0 du foncteur dérivé de F est F lui-même.

Exercice 6.2.9. Démontrer que $H_0(\mathbb{L}F(M)) \xrightarrow{\cong} F(M)$.

Si M est projectif, alors on peut prendre M lui-même (concentré en degré 0) comme résolution projective. On en déduit alors immédiatement que

Lemme 6.2.10. *Si M est projectif et F un foncteur exact à droite, alors $\mathbb{L}F(M)$ est quasi-isomorphe à M et en particulier pour tout $i > 0$, $H_i(\mathbb{L}F_*(M)) = 0$.*

Remarque 6.2.11. Les morphismes induits $\mathbb{L}F(f)$ dans le point (2) du théorème 6.2.7 s'insèrent dans un diagramme commutatif commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}_*F(M) & \xrightarrow{\mathbb{L}F(f)} & \mathbb{L}_*F(N) \\ F(\eta_M) \downarrow & & \downarrow F(\eta_N) \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Le foncteur dérivé d'un foncteur exact à droite est exact (au sens suivant des complexes de chaînes)

Proposition 6.2.12. *Soit F un foncteur exact à droite. Si $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ est une suite exacte (dans $\mathbf{C} = R\text{-Mod}$ ou $R\text{-Mod}^{op}$), alors on peut choisir une résolution*

projective de B telle que $0 \rightarrow \mathbb{L}F_*(A) \xrightarrow{\mathbb{L}F(f)} \mathbb{L}F_*(B) \xrightarrow{\mathbb{L}F(g)} \mathbb{L}F_*(C) \rightarrow 0$ soit une suite exacte de complexes de chaînes. En particulier on a une suite exacte longue naturelle en (co)homologie :

$$(42) \quad \dots \rightarrow H_i(\mathbb{L}F(A)) \xrightarrow{\mathbb{L}F(f)} H_i(\mathbb{L}F(B)) \xrightarrow{\mathbb{L}F(g)} H_i(\mathbb{L}F(C)) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(\mathbb{L}F(A)) \\ \xrightarrow{\mathbb{L}F(f)} H_{i-1}(\mathbb{L}F(B)) \rightarrow \dots \rightarrow H_1(\mathbb{L}F(B)) \xrightarrow{\mathbb{L}F(g)} H_1(\mathbb{L}F(C)) \xrightarrow{\delta} F(A) \xrightarrow{F(f)} B \xrightarrow{F(g)} C \rightarrow 0$$

Démonstration. On commence par prendre des résolutions projectives $\eta_C : P_*(C) \xrightarrow{\sim} C$, $P_*(B) \xrightarrow{\sim} B$ quelconques. Le Théorème de relèvement nous donne un morphisme $\tilde{g} : P_*(B) \rightarrow P_*(C)$ relevant $g : B \rightarrow C$. Le problème est que \tilde{g} n'est pas forcément surjectif en tout degré. Pour cela on modifie $P_*(B)$ par un complexe exact qui se surjecte en tout degré sur $P_*(C)$. Pour cela on note que le cône de l'identité, noté $C(\text{id}_{P_*(C)})$, a une homologie nulle en tout degré d'après la longue suite exacte donné dans l'exemple 5.4.6 et que de plus on a un morphisme canonique $C(\text{id}_{P_*(C)}) \rightarrow C[1]$ qui est surjectif en tout degré. En décalant ce morphisme dans l'autre sens on obtient un morphisme de complexe surjectif $q : C(\text{id}_{P_*(C)})[-1] \rightarrow C$ dont la source a une homologie nulle en tout degré et est constituée de modules projectifs (puisque ce sont des sommes directes de C_i, C_{i-1} qui le sont). Ainsi $P_*(B) \oplus (C(\text{id}_{P_*(C)})[-1]) \xrightarrow{\tilde{g} \oplus q} P_*(C)$ est un morphisme de complexes surjectif en tout degré. Par ailleurs, en appliquant le théorème des relèvements des morphismes 6.1.27 on construit un morphisme de complexes $\tilde{\eta} : P_*(C) \rightarrow B$ dont la composée avec g est η_C .

Par suite, on obtient un diagramme commutatif $P_*(B) \oplus C(\text{id}_{P_*(C)})[-1] \xrightarrow{\tilde{g} \oplus q} P_*(C)$. No-

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow \eta_C \\ \eta_{P \oplus \tilde{\eta} q} \downarrow & & \downarrow \eta_C \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

tons que la flèche verticale à gauche est encore un quasi-isomorphisme car $\tilde{\eta} \circ q$ est nulle en homologie puisque le cône a une homologie nulle en tout degré.

Finalement, le noyau $\ker(P_*(B) \oplus C(\text{id}_{P_*(C)})[-1] \rightarrow C)$ est un complexe de chaînes qui est quasi-isomorphe à A par la propriété 2 pour 3 (cf 5.4.4). Il reste à vérifier qu'il est constitué de projectifs. Cela découle du lemme 6.1.16 appliqué en chaque degré. \square

Remarque 6.2.13 (Comment voir $\mathbb{L}F$ comme un vrai foncteur?). Le foncteur dérivé n'a pas été défini comme un foncteur au sens propre, puisqu'il dépend d'un choix qui n'a rien de canonique. Pour en faire un vrai foncteur, classiquement, on regarde $\mathbb{L}F$ comme un foncteur à valeur dans la catégorie des complexes de chaînes où l'on inverse les quasi-isomorphismes, que l'on appelle la catégorie dérivée (de \mathbf{C}). Plus précisément,

Définition 6.2.14. On note $\mathbb{D}(R)$ la catégorie des complexes de chaînes obtenues à partir de celle des complexes de chaînes de R -modules en quotientant les ensembles de morphismes par la relation d'équivalence donnée par l'homotopie de chaînes, puis en inversant formellement les quasi-isomorphismes. C'est à dire $\mathbb{D}(R) = (\mathbf{Ch}(R)/\simeq)[\text{qiso}^{-1}]$.

Le fait d'avoir quotienté par les homotopies de chaînes fait que $\mathbb{L}(F)$ est un foncteur $\mathbb{D}(R) \rightarrow \mathbb{D}(S)$ (ou $\mathbb{D}(R)^{op} \rightarrow \mathbb{D}(S)$). Cela dit, cette construction perd une partie de l'information des complexes de chaînes. On dispose de nos jours de la notion d' ∞ -catégorie (des catégories avec des notions de morphismes entre les morphismes etc...) qui permet de voir $\mathbb{L}(F)$ comme un foncteur dans ce cadre (ce qui est la notion correcte de foncteur à homotopie près que l'on a évoqué).

On peut noter que $\mathbb{L}F$ est en fait la meilleure approximation exacte du foncteur original au sens suivant : pour tout foncteur $G : \mathbb{D}(R) \rightarrow \mathbb{D}(S)$ muni d'une transformation naturelle

$G \rightarrow F$, il existe une unique transformation naturelle $\tau : G \Rightarrow \mathbb{L}(F)$ qui rende le triangle

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad} & F \\ \tau \downarrow & \nearrow & \\ \mathbb{L}F & & \end{array} \text{ commutatif.}$$

Nous avons bien entendu toute une théorie duale pour les foncteurs dérivés à droite et les résolutions injectives. Les résultats suivants se démontrent de manière analogue à celle de leurs versions projectives ou exacte à droite.

Définition 6.2.15. Soit $F : \mathbf{C} \rightarrow S\text{-Mod}$ un foncteur exact à gauche où $\mathbf{C} = R\text{-Mod}$ ou $R\text{-Mod}^{op}$. Soit M un objet de \mathbf{C} et $M \rightarrow I^*$ une résolution injective de M . On appelle complexe de chaîne dérivé à droite de F en M le complexe $\mathbb{R}F^*(M) := F(I^*)$. La règle $M \mapsto \mathbb{R}F^*(M)$ s'appelle "le" foncteur dérivé à droite de F qui est noté $\mathbb{R}F$.

On appelle i -ème foncteur de cohomologie de F le i -ème groupe de cohomologie $H^i(F(I^*))$.

Théorème 6.2.16. Soit F un foncteur exact à gauche.

- (1) Si I^*, J^* sont deux résolutions injectives de M . Alors il existe un quasi-isomorphisme canonique (à homotopie de chaînes près) $F(I^*) \rightarrow F(J^*)$.
- (2) Pour tout morphisme $f : M \rightarrow N$ dans \mathbf{C} , et pour toutes résolutions projectives $I^*(M)$ et $J^*(N)$ de M, N on a des morphismes de complexes de chaînes $\mathbb{R}F(f) : \mathbb{R}F^*(M) \rightarrow \mathbb{R}F^*(N)$ tels que $\mathbb{R}F(f \circ g)$ est homotope à $\mathbb{R}F(f) \circ \mathbb{R}F(g)$ et $\mathbb{R}F(id_M)$ est homotope à $id_{\mathbb{R}F^*(M)}$.
- (3) Les i -èmes groupes de cohomologie $M \mapsto H^i(\mathbb{R}F^*(M))$ et les morphismes $H^i(\mathbb{R}F(f))$ forment un foncteur

$$H^i(\mathbb{R}F) : \mathbf{C} \rightarrow S\text{-Mod}.$$

Proposition 6.2.17. Soit F un foncteur exact à gauche.

- (1) On a un isomorphisme naturel $F(M) \xrightarrow{\cong} H^0(\mathbb{R}F(M))$ (induit par l'application $\iota : F(M) \rightarrow F(I^0(M))$ pour toute résolution injective de M).
 - (2) Si $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ est une suite exacte (dans $\mathbf{C} = R\text{-Mod}$ ou $R\text{-Mod}^{op}$), alors on peut choisir des résolutions injectives de sorte que $0 \rightarrow \mathbb{R}F^*(A) \xrightarrow{\mathbb{R}F(f)} \mathbb{R}F^*(B) \xrightarrow{\mathbb{R}F(g)} \mathbb{R}F^*(C) \rightarrow 0$ soit une suite exacte de complexes de cochaînes. En particulier on a une suite exacte longue naturelle en cohomologie :
- $$(43) \quad 0 \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} C \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{R}F(A)) \xrightarrow{\mathbb{R}F(f)} H^1(\mathbb{R}F(B)) \xrightarrow{\mathbb{R}F(g)} \dots \rightarrow H^i(\mathbb{R}F(A)) \xrightarrow{\mathbb{R}F(f)} H^i(\mathbb{R}F(B)) \xrightarrow{\mathbb{R}F(g)} H^i(\mathbb{R}F(C)) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(\mathbb{R}F(A)) \xrightarrow{\mathbb{R}F(f)} H^{i+1}(\mathbb{R}F(B)) \rightarrow \dots$$

Spécialisons le théorème 6.2.7 à nos deux exemples fondamentaux : le produit tensoriel et les homomorphismes.

Définition 6.2.18. Soit M un R -module.

- (1) On note $M \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_R -$ le foncteur dérivé à gauche de $M \otimes_R -$ et $\text{Tor}_i^R(M, -)$ ses i -èmes groupes d'homologie.
- (2) On note $\mathbb{R}H\text{om}_R(-, M)$ le foncteur dérivé à gauche de $\text{Hom}_R(-, M)$ et $\text{Ext}_R^i(-, M)$ ses i -èmes groupes de cohomologie.

Les foncteurs Tor_j sont des foncteurs d'homologie alors que les Ext^i sont des foncteurs de cohomologie.

Le mot *Tor* vient de l'expression « produit de torsion » (car ces groupes n'apparaissent et ne mesurent que la torsion) alors que *Ext* vient de extension car ces groupes encodent le nombre d'extensions de M par N .

Remarque 6.2.19. On note aussi $\mathbb{R}Hom_R(M, -)$ le foncteur dérivé à droite de $Hom_R(M, -)$ et $Ext_R^i(M, -)$ ses i -ièmes groupes de cohomologie. Le fait que cette terminologie soit la même que dans la définition 6.2.18 est justifié par le lemme suivant.

Lemme 6.2.20. *Soit $\eta : P_* \xrightarrow{\sim} M$ une résolution projective et $\beta : N \xrightarrow{\sim} I^*$ une résolution injective. Alors les applications suivantes sont des quasi-isomorphismes :*

$$Hom_R(M, I_*) \xrightarrow{-\circ\eta} Hom_R(P_*, I_*) \xleftarrow{\beta\circ-} Hom_R(P_*, N).$$

Le lemme implique donc que si on calcule le foncteur dérivé de $Hom_R(-, N)$ en M (ce qui revient, puisque les injectifs de $R\text{-Mod}^{op}$ sont les projectifs, à remplacer M par une résolution projective) on obtient un complexe quasi-isomorphe au foncteur dérivé de $Hom_R(M, -)$ calculé en N .

Corollaire 6.2.21. *Soit $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ une suite exacte courte. Alors on a des suites exactes longues naturelles.*

$$(44) \quad \cdots \rightarrow Tor_i^R(M, A) \xrightarrow{f_*} Tor_i^R(M, B) \xrightarrow{g_*} Tor_i^R(M, C) \xrightarrow{\delta} Tor_{i-1}^R(M, A) \\ \xrightarrow{f_*} Tor_{i-1}^R(M, B) \rightarrow \cdots \rightarrow Tor_1^R(M, C) \xrightarrow{\delta} M \otimes_R A \xrightarrow{id \otimes f} M \otimes_R B \xrightarrow{id \otimes g} M \otimes_R C \rightarrow 0,$$

$$(45) \quad 0 \rightarrow Hom_R(C, M) \xrightarrow{-\circ g} Hom_R(B, M) \xrightarrow{-\circ f} Hom_R(A, M) \xrightarrow{\delta} Ext_R^1(C, M) \\ \xrightarrow{g^*} Ext_R^1(B, M) \rightarrow \cdots \rightarrow Ext_R^i(C, M) \xrightarrow{g^*} Ext_R^i(B, M) \xrightarrow{f^*} Ext_R^i(A, M) \xrightarrow{\delta} Ext_R^{i+1}(C, M) \rightarrow \cdots,$$

$$(46) \quad 0 \rightarrow Hom_R(M, A) \xrightarrow{f\circ-} Hom_R(M, B) \xrightarrow{g\circ-} Hom_R(M, C) \xrightarrow{\delta} Ext_R^1(M, A) \\ \xrightarrow{f^*} Ext_R^1(M, B) \rightarrow \cdots \rightarrow Ext_R^i(M, A) \xrightarrow{f^*} Ext_R^i(M, B) \xrightarrow{g^*} Ext_R^i(M, C) \xrightarrow{\delta} Ext_R^{i+1}(M, A) \rightarrow \cdots$$

Exemple 6.2.22 (Ext et Tor de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). La résolution projective de l'exemple 6.1.25 permet de calculer facilement $Tor_i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, M)$ et $Ext^i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, M)$. En effet, par définition nous obtenons que

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} M = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow M \xrightarrow{*n} M$$

puisque $\mathbb{Z} \otimes M \cong M$ et que $n \otimes m = 1 \otimes nm$. De même

$$\mathbb{R}Hom(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, M) = M \xrightarrow{*n} M \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

car $Hom(\mathbb{Z}, M) \cong M$ où l'isomorphisme est donné par $f \mapsto f(1)$.

Ainsi, ces groupes de (co)homologie sont nuls en degré ≥ 2 .

Regardons maintenant le cas de $M = \mathbb{Z}$, puis de $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Pour $M = \mathbb{Z}$, comme celui-ci est projectif, on a immédiatement que

$$Tor_{i \geq 1}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 \text{ et } Tor_0(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

En revanche on a que

$$Ext^0(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 \text{ mais } Ext^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \text{ est non-nul.}$$

Regardons maintenant $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Alors toutes mes flèches dans les complexes dérivées deviennent nulles et il suit

$$Tor_{i \geq 2}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong 0, \text{ et } Tor_{i \leq 1}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}; \\ Ext^{i \geq 2}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong 0, \text{ et } Ext^{i \leq 1}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z};$$

Exemple 6.2.23 (Calcul de Tor_1). Soit G, H des groupes abéliens. Les groupes $Tor_1^{\mathbb{Z}}(H, G)$ sont les «produits de torsion» de H par G . Le Corollaire 6.2.21 montre que ce groupe est le noyau de l'application $R \otimes G \rightarrow P \otimes G$ pour n'importe quelle suite exacte $0 \rightarrow R \rightarrow P \rightarrow H$ où P est projectif. (par exemple libre).

En pratique, plutôt que la définition, on en utilise les propriétés suivantes :

Lemme 6.2.24. (Propriétés utiles pour calculer $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$)

- On a un isomorphisme canonique $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H, G) \cong \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G, H)$. Ces groupes sont fonctoriels en G et H .
- Si G ou H est libre (ou simplement plat), $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H, G) = 0$.
- $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\bigoplus_{\alpha} H_{\alpha}, G) \cong \bigoplus_{\alpha} \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{\alpha}, G)$.
- $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \cong \ker(G \xrightarrow{\times n} G)$.
- $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\text{pgcd}(n, m)\mathbb{Z}$.

Les propriétés précédentes permettent de déterminer facilement les groupes $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G, H)$ lorsque H et G sont de type finis. En particulier elles sont très pratique pour calculer l'homologie singulière à coefficients.

Un résultat similaire concernant la valeur de Ext^1 a été donné dans le lemme 5.5.9.

Remarque 6.2.25. Les propriétés précédentes (et un peu d'algèbre homologique comme le fait que $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(-, G)$ commute aux colimites) permettent de montrer que $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H, G)$ est de torsion pour tous groupes abéliens H, G et que $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H, -) = 0$ si et seulement si H est sans torsion. Ce sont ces propriétés relatives à la torsion qui ont donné lieu à cette terminologie et notation Tor ⁹⁵.

Exercice 6.2.26. Démontrer le lemme 6.2.24 (indication : utiliser l'exemple 6.1.25).

6.3. THÉORÈMES DES COEFFICIENTS UNIVERSELS ET COEFFICIENTS LOCAUX

Nous avons vu l'énoncé du théorème des coefficients universels 5.5.8 reliant la cohomologie au dual de l'homologie via le foncteur $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1$. Nous allons maintenant nous intéresser à celui reliant l'homologie à coefficients dans divers anneaux et groupes.

Quitte à remplacer les entiers \mathbb{Z} par un autre groupe abélien G , on peut définir des complexes de chaînes singulières (ou simpliciales) $C_*(X, G)$ associé à tout espace topologique (ou complexe simplicial) X . On notera de même $C_*(X, A, G)$ les complexes relatifs à coefficients dans G . Par exemple, si K est un complexe simplicial

$$C_i(K, G) = G\langle K_i \rangle = G \otimes_{\mathbb{Z}} C_i(K).$$

On obtient l'homologie $H_i(K, G) = Z_i(K, G)/B_i(K, G)$ à coefficient dans G . Cette définition est exactement la même que celle que nous avons déjà vu lorsque $G = R$ est un anneau. Bien entendu, puisque le produit tensoriel n'est pas exact sur \mathbb{Z} , l'homologie $H_i(X, G)$ n'est en général pas le produit tensoriel $G \otimes H_i(X)$. La relation entre ces groupes abéliens fait intervenir les foncteurs $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$.

Théorème 6.3.1 (Théorème des coefficients universels (cas de l'homologie)). *Soit C un complexe de chaînes de \mathbb{Z} -modules libres et G un groupe abélien. Alors les groupes d'homologie $H_i(C; G) = H_i(C \otimes_{\mathbb{Z}} G)$ du complexe de chaînes $C \otimes G$ sont déterminés par les groupes d'homologie $H_i(C)$ via la suite exacte scindée⁹⁶*

$$0 \rightarrow H_i(C) \otimes G \rightarrow H_i(C, G) \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{i-1}(C), G) \rightarrow 0.$$

Ce théorème s'applique en particulier à l'homologie singulière, simpliciale, quasi-simpliciale et même dans le cas relatif! Quel que soit X un espace topologique X , on a une suite exacte courte scindée :

Lemme 6.3.2. *On a un isomorphisme naturel $H_1(X, G) \cong H_1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G$.*

95. Ces propriétés ne restent cependant plus vraies ou aussi simples pour $\text{Tor}_1^R(-, -)$ quand R est un anneau quelconque

96. une fois encore ce scindement n'est pas naturel en C mais seulement en G

Démonstration. Cela provient du fait que $H_0(X)$ est libre, d'où $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_0(X), G) = 0$ (lemme 6.2.10) ce qui conclut par les coefficients universels 6.3.1. \square

Exercice 6.3.3. Calculer les groupes d'homologie des espaces projectifs réels $\mathbb{R}P^n$ et de la bouteille de Klein à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, \mathbb{Q} , $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ à partir de ceux sur \mathbb{Z} .

Exemple 6.3.4 (non-naturalité du scindement dans le théorème des coefficients universels). Rappelons que le plan projectif $\mathbb{R}P^2$ est le quotient \mathbb{D}^2 par l'application antipodale restreinte à son bord. En quotientant son bord en un point, on obtient une application canonique $p : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Comme $H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$, on a que l'application induite $q_* : H_*(\mathbb{R}P^2) \rightarrow H_*(\mathbb{S}^2)$ est nulle en degré 1 et 2.

Appliquons maintenant le théorème des coefficients universels 6.3.1 avec $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On obtient alors, que

$$\begin{aligned} H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\cong 0 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ H_2(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus 0 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la décomposition $H_i(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H_i(X) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{i-1}(X), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Si cette décomposition en somme directe était naturelle, alors l'application $f_* : H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ induite par f serait nulle (puisque c'est le cas à coefficient dans \mathbb{Z} sur chaque facteur).

Mais, on peut montrer, que $f_* : H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un isomorphisme, c'est un cas particulier d'un exercice vu dans la feuille de TD sur l'homologie singulière.

Démonstration des Théorèmes 5.5.8 et 6.3.1. Les preuves étant complètement analogues *mutatis mutandis*, on se contente de donner la preuve pour la cohomologie.

On note comme d'habitude Z_\bullet , B_\bullet les cycles et bords du complexe C_\bullet . Comme ce sont en chaque degré des sous-modules d'un groupe abélien libre, ils sont libres⁹⁷. En particulier, la suite exacte

$$0 \rightarrow Z_p \xrightarrow{i} C_p \xrightarrow{\partial} B_{p-1} \rightarrow 0$$

se scinde (il suffit de définir un scindement $s : B_{p-1} \rightarrow C_p$ en choisissant l'image d'une base). On note aussi $f : C_\bullet \rightarrow Z_\bullet$ un choix de rétraction de ces suites exactes : $f \circ i = \text{id}_{Z_\bullet}$.

On applique alors le foncteur $\text{Hom}(-, G)$ aux suites exactes courtes

$$0 \rightarrow Z_p \xrightarrow{i} C_p \xrightarrow{\partial} B_{p-1} \rightarrow 0 \text{ et } 0 \rightarrow B_p \xrightarrow{j} Z_p \xrightarrow{q} H_p(C) \rightarrow 0.$$

Comme B_p et Z_p sont libres, en particulier projectifs, on en déduit que $\text{Ext}^i(B_p, -) = 0 = \text{Ext}^j(Z_p, -)$ (pour $i, j > 0$) et la suite exacte longue (45) du Corollaire 6.2.21 nous donne

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_p, G) \cong \text{Hom}(B_{p-1}, G) / j^*(\text{Hom}(Z_{p-1}, G)).$$

⁹⁷. Attention cette propriété n'est pas forcément vraie si on travaille sur un anneau quelconque; il faudrait dans les arguments de la suite pouvoir garantir que B_\bullet est composé de modules projectifs pour faire marcher la preuve dans ce cadre général.

On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \uparrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(H_p(C), G) & \xrightarrow{q^*} & \text{Hom}(Z_p, G) & \xrightarrow{j^*} & \text{Hom}(B_p, G) \\
 & & & & \uparrow f^* \left(\begin{array}{c} \uparrow i^* \\ \downarrow \end{array} \right) & & \downarrow \partial^* \\
 & & \text{Hom}(C_{p-1}, G) & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}(C_p, G) & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}(C_{p+1}, G) \\
 & & \downarrow i^* & & \uparrow \partial^* & & \\
 & & \text{Hom}(Z_{p-1}, G) & \xrightarrow{j^*} & \text{Hom}(B_{p-1}, G) & \longrightarrow & \text{Ext}(H_p, G) \longrightarrow 0. \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Par construction, les suites horizontales et verticales du diagramme sont exactes. On n'a plus qu'à se promener dans notre diagramme pour démontrer le résultat :) Tout d'abord, nous avons vu que l'application $H_p(C, G) \rightarrow \text{Hom}(H_p(C), G)$ est induite par i^* appliquée à un cocycle $\varphi : C_p \rightarrow G$ (on peut s'amuser à vérifier, en se promenant autour du carré commutatif en haut à droite, que $\partial^*(j^*(i^*(\varphi))) = \delta(\varphi) = 0$ et que par injectivité de ∂^* , cela force bien $i^*(\varphi)$ à être dans l'image de q^* pour un cocycle). Cette application est scindée par $f^* \circ q^*$ (car $f \circ i = id$). Puisque l'application $H_p(C, G) \rightarrow \text{Hom}(H_p(C), G)$ admet une section, elle est surjective.

Il reste à montrer que son noyau est bien $\text{Ext}^1(H_p, G)$. Si notre cocycle φ s'envoie sur 0 dans $\text{Hom}(H_p(C), G)$, alors $i^*(\varphi) = 0$ par injectivité de q^* et par exactitude, il provient donc de $\text{Hom}(B_{p-1}, G)$. Le noyau de $H_p(C, G) \rightarrow \text{Hom}(H_p(C), G)$ s'identifie donc à $\partial^*(\text{Hom}(B_{p-1}, G))/\text{Im}(\delta)$. Par injectivité de ∂^* (et commutativité du carré en bas à gauche), ce groupe est canoniquement isomorphe à $\text{Hom}(B_{p-1}, G) \setminus j^*(i^*(\text{Hom}(C_{p-1}, G)))$. Comme i^* est en plus surjectif, on en déduit que ce dernier groupe n'est autre que le quotient $\text{Hom}(B_{p-1}, G) \setminus j^*(\text{Hom}(Z_{p-1}, G))$. C'est à dire $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_p, G)$! □

Rappelons que si \mathbb{F} est un corps, ou \mathbb{Z} (ou tout anneau principal) et que X est un espace topologique (ou complexe quasi-simplicial) dont les groupes d'homologie $H_i(X, \mathbb{F})$ à coefficients dans \mathbb{F} sont de type fini pour tout i , on définit les *i -ème nombre de Betti* $b_i(X, \mathbb{F})$ de X à coefficient dans \mathbb{F} comme le rang de $H_i(X, \mathbb{F})$ 3.3.1. Ces nombres de Betti d'un espace topologique varient en fonction de \mathbb{F} . Mais on a la propriété suivante qui est une conséquence immédiate de 3.3.2 pour les complexes quasi-simpliciaux.

Théorème 6.3.5 (Invariance de la caractéristique d'Euler à coefficients). *Soit X un espace topologique dont les groupes d'homologie $\bigoplus H_i(X)$ sont de type fini et soit \mathbb{F} un corps. Alors $\bigoplus H_i(X, \mathbb{F})$ est de dimension finie. De plus :*

- la caractéristique d'Euler de X est indépendante de \mathbb{F} :

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i b_i(X, \mathbb{F}) = \sum_{i=0}^d (-1)^i b_i(X) = \chi(X).$$

- En particulier, si K est un complexe simplicial fini, on a

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i b_i(K, \mathbb{F}) = \sum_{i=0}^d (-1)^i c_i(K).$$

Démonstration. Par le théorème 4.3.3, les nombres de Betti d'un complexe simplicial K sont les mêmes que ceux de sa réalisation $|K|$. La preuve du deuxième point pour un complexe simplicial fini est la même que sur \mathbb{Z} . On en déduit immédiatement le premier point dans le cas d'un complexe simplicial.

Pour X un espace topologique général, on peut prouver le résultat dans le cas où \mathbb{F} est plat (comme \mathbb{Q}) ou fini. Pour cela on utilise la suite exacte courte des coefficients universels 6.3.1 : dans le cas plat, on a égalité entre $b_i(X, \mathbb{F})$ et $b_i(X)$. Si $F = \mathbb{F}_p$, on note $\tau_i(X, \mathbb{F})$ le nombre de facteurs directs de la forme $\mathbb{Z}/p^j q\mathbb{Z}$ ($j > 0$) dans la décomposition de $H_i(X)$. On déduit alors de la suite exacte courte et des règles de calcul du lemme 6.2.24 que

$$b_i(X, \mathbb{F}) = b_i(X) + \tau_i(X, \mathbb{F}) + \tau_{i-1}(X, \mathbb{F})$$

qui est bien fini. En faisant la somme alternée, on retrouve immédiatement le point (1).

Pour un corps plus général \mathbb{F} , notons $h_i := \text{rang } H_i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}$ et $t_i := \text{rang } \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_i(X), \mathbb{F})$. Des coefficients universels on déduit que $b_i(X, \mathbb{F}) = h_i + t_{i-1}$. Pour relier ceci au nombre de Betti sur \mathbb{Z} , on prend une suite exacte $R_i \hookrightarrow P_i \twoheadrightarrow H_i(X)$ avec P_i libre de type fini. On a alors que R_i est libre et que $b_i(X) + \text{rang } R_i = \text{rang } P_i$. La suite exacte longue 6.2.21 associé nous donne ici une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_i(X), \mathbb{F}) \rightarrow R_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F} \rightarrow P_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F} \rightarrow H_i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F} \rightarrow 0$$

puisque $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(P_i, F) = 0$. Il suit que $h_i + \text{rang } R_i = \text{rang } P_i + t_i = \text{rang } R_i + b_i(X) + t_i$. Par conséquent on obtient

$$b_i(X, \mathbb{F}) = b_i(X) + t_{i-1} + t_i$$

qui est bien fini. Enfin le résultat pour $\chi(X, \mathbb{F})$ suit simplement en prenant la somme alternée. \square

Un morphisme $G \rightarrow H$ de groupes (abéliens) induit canoniquement un morphisme de complexes $C_*(X, G) \rightarrow C_*(X, H)$. Les groupes d'homologie à coefficients dans des groupes abéliens distincts sont également reliés par des suites exactes longues.

Proposition 6.3.6. *Soit $G \hookrightarrow G' \twoheadrightarrow G''$ une suite exacte courte de groupes abéliens. Il existe un opérateur de bord naturel⁹⁸ $\beta : H_i(X, G'') \rightarrow H_{i-1}(X, G)$, appelé le Bockstein, tel que la longue suite*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_i(X, G) \rightarrow H_i(X, G') \rightarrow H_i(X, G'') \xrightarrow{\beta} H_{i-1}(X, G) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H_0(X, G') \rightarrow H_0(X, G'') \rightarrow 0 \end{aligned}$$

soit exacte.

Démonstration. On fait la preuve dans le cadre de l'homologie singulière. La preuve est la même en simplicial. Le complexe de chaînes $C_*(X)$ est un \mathbb{Z} -module libre par construction ; en particulier il est plat. Donc, la suite

$$0 \longrightarrow G \otimes_{\mathbb{Z}} C_*(X) \longrightarrow G' \otimes_{\mathbb{Z}} C_*(X) \longrightarrow G'' \otimes_{\mathbb{Z}} C_*(X) \longrightarrow 0$$

est encore exacte. Le résultat découle maintenant du lemme 5.4.3. \square

Exercice 6.3.7. Déterminer la suite exacte de la Proposition 6.3.6 dans le cas de $\mathbb{R}P^2$.

⁹⁸. autrement dit, il commute avec les applications $f_* : H_i(X, G) \rightarrow H_i(Y, G)$ induite par une application continue $f : X \rightarrow Y$

VII. APPLICATION : (CO)HOMOLOGIE DES GROUPES

7.1. DÉFINITION

Soit G un groupe (pas nécessairement abélien). Pour tout anneau commutatif unitaire R , on note $R[G] = \bigoplus_{g \in G} R \cdot g$ le R -module libre engendré par G , c'est-à-dire les combinaisons linéaires finies d'éléments de G . On notera e l'élément neutre de G . On munit ce module d'une multiplication $* : R[G] \times R[G] \rightarrow R[G]$ obtenue comme l'application bilinéaire associée à $(g, h) \mapsto gh$, c'est-à-dire l'application bilinéaire étendant la multiplication du groupe. Notons que si $f : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes, son extension linéaire est un morphisme de R -modules $R[f] = R[G] \rightarrow R[H]$

Lemme 7.1.1. *La multiplication $*$ fait de $R[G]$ une R -algèbre associative avec e comme unité. De plus $R[-] : G \mapsto (R[G], *)$ est un foncteur de la catégorie des groupes vers celle des R -algèbres associatives unitaires.*

Exercice 7.1.2. Prouver ce lemme.

Terminologie 7.1.3. On appelle $(R[G], *)$ l'algèbre du groupe G .

Définition 7.1.4. Une représentation R -linéaire d'un groupe G est une action (à gauche par défaut) de G à valeur dans un R -module M telle que l'action est R -linéaire. C'est à dire que l'on a une application $G \times M \rightarrow M$ vérifiant, pour tout $g, h \in G$, $r \in R$ et $m, n \in M$:

- (1) $(gh) \cdot m = g \cdot (h \cdot m)$, $e \cdot m = m$ et
- (2) $g \cdot (rm + n) = r(g \cdot m) + g \cdot n$.

Un morphisme de représentations R -linéaire est un morphisme de R -modules $f : M \rightarrow N$ qui commute avec les actions de G : $f(g \cdot m) = g \cdot f(m)$.

Il est facile de voir que les représentations R -linéaires munies de leurs morphismes forment une catégorie, notée $\mathbf{Rep}_R^{lin}(G)$.

Terminologie 7.1.5. On appelle souvent une représentation G -linéaire un G -module pour raccourcir (R étant sous-entendu). Lorsque l'anneau R n'est pas précisé, c'est qu'il s'agit par défaut de \mathbb{Z} .

Exemple 7.1.6. On peut munir R lui-même d'une structure de G -module trivial, donné par l'action triviale $g \cdot r = r$. De manière générale on appelle G -module trivial, un R -module muni de l'action triviale de G .

Le lemme suivant fait le lien avec la notion de module sur $R[G]$.

Lemme 7.1.7. *La catégorie des représentations R -linéaires de G est isomorphe à celle des $R[G]$ -modules.*

Exercice 7.1.8. Prouver le lemme 7.1.7.

Exemple 7.1.9 (G -module libre). Le lemme 7.1.7 montre que $R[G]$ muni de l'action induite par l'action de G sur lui-même, et plus généralement tout $R[G]$ -module libre, est muni d'une action canonique de G qui en fait une représentation linéaire.

Exemple 7.1.10 (Module induit). Soit $G \rightarrow H$ un morphisme de groupes. Alors du lemme 7.1.1 on déduit un morphisme d'algèbres $R[G] \rightarrow R[H]$, d'où on déduit (du lemme 7.1.7) que toute représentation linéaire de H en est une de G . En particulier $R[H]$ a une structure canonique de $R[G]$ -module induite par $G \rightarrow H$.

Remarque 7.1.11. Une représentation linéaire de G à valeur dans M est la même chose qu'un morphisme de monoïdes de G dans $\text{Hom}_R(M, M)$ (qui prend nécessairement ses valeurs dans les endomorphismes inversibles). Ainsi on peut voir que la catégorie des représentations linéaires est isomorphe à celle des foncteurs de BG dans $R\text{-mod}$ où BG est la catégorie construite dans l'exemple 1.0.7.

Nous définissons maintenant deux notions fondamentales associées à une représentation.

Définition 7.1.12 ((co)invariants). Soit $M \in \mathbf{Rep}_R^{\text{lin}}(G)$.

- (1) son sous-module des invariants est $M^G := \{m \in M, \forall g \in G, g \cdot m = m\}$;
- (2) son module quotient des coinvariants est $M_G := M/(g \cdot m \sim m)$.

Si $f : M \rightarrow N$ est un morphisme de représentations, alors comme $f(g \cdot m) = g \cdot f(m)$, il est immédiat que

- (1) $f(M^G) \subset N^G$;
- (2) la composée $f : M \rightarrow N \twoheadrightarrow N_G$ se factorise de manière unique pour donner un morphisme $f_G : M_G \rightarrow N_G$.

En particulier, $(-)^G$ et $(-)_G$ sont des foncteurs de $\mathbf{Rep}_R^{\text{lin}}(G) = R[G]\text{-Mod}$ dans $R\text{-Mod}$.

Lemme 7.1.13. *Le foncteur $(-)^G$ est exact à gauche et le foncteur $(-)_G$ est exact à droite. De plus $(-)^G \cong \text{Hom}_{R[G]}(R, -)$ et $(-)_G \cong R \otimes_{R[G]} -$.*

Démonstration. Le premier point découle du deuxième et du lemme 6.1.5. Le deuxième point est une conséquence facile du lemme 7.1.7 laissée en exercice. \square

Définition 7.1.14. On appellera chaînes dérivées d'un groupe G le foncteur dérivé à gauche $\mathbb{L}(-)_G = R \otimes_{R[G]}^{\mathbb{L}} -$ et cochaînes dérivées du groupe G le foncteur dérivé $\mathbb{R}(-)^G = \mathbb{R}\text{Hom}_{R[G]}(R, -)$.

Les groupes d'homologie $H_i(\mathbb{L}(M)_G)$ sont appelés les i -ème groupes d'homologie de G à coefficient dans M et sont notés $H_i(G, M)$.

Les groupes de cohomologie $H^i(\mathbb{R}M^G)$ sont appelés es i -ème groupes de cohomologie de G à coefficient dans M et sont notés $H^i(G, M)$.

Terminologie 7.1.15. Si R et M ne sont pas précisés, cela signifiera que l'on prend $R = \mathbb{Z}$ et $M = \mathbb{Z}$ muni de sa structure de G -module trivial. Les groupes de (co)homologie seront simplement notés $H_i(G)$, $H^i(G)$.

On a en particulier que $H_i(G, M) = \text{Tor}_i^{R[G]}(R, M)$ et $H^i(G, M) = \text{Ext}_{R[G]}^i(R, M)$ et donc ces groupes de (co)homologie ont les mêmes propriétés que celles vu dans la partie consacrée à Tor et Ext.

De la définition 7.1.14 et de l'exemple 6.2.8 il suit que

$$(47) \quad H_0(G, M) \cong M_G, \quad H^0(G, M) \cong M^G.$$

Par définition, pour calculer les groupes de (co)homologie de G , il suffit de trouver une résolution projective P_* de R par $R[G]$:

$$\mathbb{L}(M)_G \cong P_* \otimes_{R[G]} M, \quad \mathbb{R}(M)^G \cong \text{Hom}_{R[G]}(P_*, M).$$

On peut aussi bien entendu prendre une résolution projective de M dans le premier cas ou injective de M dans le second.

Exemple 7.1.16 ((co)homologie d'un groupe fini cyclique). On va calculer l'homologie du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, noté dans cet exemple C_n . C'est un groupe cyclique, engendré par la classe $\bar{1}$. On va exhiber une résolution simple. On note $t : C_n \rightarrow C_n$ l'application $\bar{i} \mapsto \bar{i} + \bar{1}$, autrement dit l'action du générateur sur C_m par multiplication à gauche. Notons aussi $N =$

$\text{id} + t + \dots + t^{n-1} : \mathbb{Z}[C_n] \rightarrow \mathbb{Z}[C_n]$ le morphisme $\mathbb{Z}[C_n]$ -linéaire induit. On a évidemment que $t^n = \text{id}$ d'où il suit que $(1-t) = N = 0$ dans $\mathbb{Z}[G]$ et donc on a un complexe de chaînes

$$(48) \quad \dots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[C_n].$$

Soit $\varepsilon : \mathbb{Z}[C_n] \rightarrow \mathbb{Z}$ le morphisme induit par $g \mapsto 1$. Comme $\varepsilon \circ (1-t) = 0$ on déduit que ε induit un morphisme de complexe ε_* du complexe (48) vers \mathbb{Z} concentré en degré 0.

Lemme 7.1.17. *On a que ε_* est un quasi-isomorphisme et donc le complexe (48) est une résolution $\mathbb{Z}[C_n]$ libre (donc projective) de \mathbb{Z} .*

Démonstration. Laissez en exercice! □

Armé de cette résolution somme toute très simple (libre de rang 1 en tout degré!) on obtient donc, pour tout C_n -module *trivial* M , que

$$\mathbb{L}(M)_{C_n} = \dots \rightarrow M \xrightarrow{*n} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{*n} M \xrightarrow{0} M$$

et

$$\mathbb{R}(M)^{C_n} = M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{*n} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{*n} M \rightarrow \dots$$

car l'isomorphisme $\text{Hom}_{R[C_n]}(R[C_n], M) \cong M$ est donné par $f \mapsto f(1)$ et que $f(t^i 1) = t^i f(1) = f(1)$ puisque M est un C_n -module trivial. On en déduit immédiatement que

$$H_0(C_n) \cong \mathbb{Z} \cong H^0(C_n)$$

et de plus, par injectivité de la multiplication par n , pour tout $i > 0$,

$$\begin{aligned} H_{2i}(C_n) &= 0, & H^{2i}(C_n) &= \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; \\ H_{2i-1}(C_n) &= \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, & H^{2i-1}(C_n) &= 0. \end{aligned}$$

De même, si on prend $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec l'action *triviale* de C_n , on obtient alors que $H_i(C_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong H^i(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ en tout degré i .

Exemple 7.1.18 ((co)homologie d'un groupe libre). Soit F_n le groupe (non-abélien) libre à n générateurs et plus généralement F_X le groupe libre engendré par un ensemble X . En particulier $F_1 \cong \mathbb{Z}$, F_2 est le groupe constitué des mots finis sur l'alphabet $\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$. Soit encore $\varepsilon : \mathbb{Z}[F_X] \rightarrow \mathbb{Z}$ l'application $\mathbb{Z}[F_X]$ linéaire qui envoie chaque générateur $z \in F_X$ sur 1. Notons que l'ensemble $X - e := \{x - e, x \in X\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}[F_X]$ et on en déduit donc un morphisme F_X -linéaire $\mathbb{Z}[F_X][X - e] \rightarrow \mathbb{Z}[F_X]$.

Lemme 7.1.19. *La suite $0 \rightarrow \mathbb{Z}[F_X][X - e] \rightarrow \mathbb{Z}[F_X] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ est exacte.*

On en déduit que $\dots 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}[F_X][X - e] \rightarrow \mathbb{Z}[F_X]$ est une résolution F_X -libre de \mathbb{Z} . Comme elle est nulle en tout degré supérieur ou égal à 2, on en déduit que

$$H_i(F_X, M) \cong 0 \cong H^i(F_X, M)$$

pour tout $M \in \mathbf{Rep}_{F_X}^{lin}$. De plus, pour M muni d'une action triviale, Comme $(x - e)$ agit par 0 sur M , on en déduit que $H_1(F_X, M) \cong \bigoplus_X M$, $H^1(F_X, M) = \prod_X M$. En particulier $H_1(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \cong H^1(\mathbb{Z})$.

Exercice 7.1.20. Démontrer le lemme 7.1.19

Exercice 7.1.21. Montrer que le groupe libre F_X engendré par un ensemble X est isomorphe au coproduit $\coprod_X \mathbb{Z}$ dans la catégorie des groupes (non abéliens).

7.2. LIEN AVEC LA TOPOLOGIE

Nous allons maintenant faire le lien entre la (co)homologie des groupes et la (co)homologie des espaces topologiques. Ces deux notions s'entraînent régulièrement dans la pratique.

Notons EG un complexe quasi-simplicial (ou CW-complexe) muni d'une action (continue) d'un groupe G . On suppose de plus que

- (1) l'action de G est quasi-simpliciale (ou cellulaire), c'est-à-dire qu'elle envoie les i -simplexes sur des i -simplexes par des applications affines ;
- (2) EG est contractile ;
- (3) le groupe G agit librement sur les simplexes (ou cellules) de EG .

Notation 7.2.1. On note⁹⁹ BG le complexe quasi-simplicial (ou CW complexe) quotient $BG = EG/G$ de l'action de G sur EG .

Lemme 7.2.2. *Le complexe des chaînes quasi-simpliciales (resp. cellulaire) $C_*(EG)$ est une résolution $\mathbb{Z}[G]$ -libre de \mathbb{Z} .*

De plus pour tout G -module trivial $C_(BG, M) \cong \mathbb{L}(M)_G$ et $C^*(G, M) \cong \mathbb{R}(M)^G$.*

Démonstration. On a que $C_n(EG) = \mathbb{Z}[EG^{(n)}]$ qui est un $\mathbb{Z}[G]$ module libre car G agit librement sur les simplexes. Il suit immédiatement que $BG = EG/G$ est un complexe quasi-simplicial (ou cellulaire) dont les simplexes (ou cellules) sont les classes d'équivalences de celles de EG . Par ailleurs, comme EG est contractile, on a que $H_{*>0}(EG) = 0$ (par le théorème 4.3.15) et $H_0(EG) = \mathbb{Z}$, ce qui est le premier point. Pour le deuxième cela découle de la définition 6.2.6 et du fait que $C_*(BG, M) = C_*(BG) \otimes_{\mathbb{Z}} M \cong C_*(EG) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M$. \square

La situation décrite ci-dessus n'est pas isolée car on a le résultat général suivant.

Théorème 7.2.3. *Soit G un groupe.*

- (1) *Il existe un CW-complexe EG , unique à équivalence d'homotopie près, qui est contractile et muni d'une action libre de G .*
- (2) *On peut par ailleurs munir EG d'une structure cellulaire telle que l'action soit cellulaire, et même une structure de complexe simplicial non nécessairement plongé dans un espace euclidien avec une action simpliciale, telle que l'action de G sur les cellules ou simplexes soit libre.*
- (3) *La construction $G \rightarrow EG$ s'étend en un foncteur $E(-) : \mathbf{Gp} \rightarrow \mathbf{CW}^{\mathbf{Gp}}$ de la catégorie des groupes à valeur dans la sous-catégorie de \mathbf{Top} constituée des complexes simpliciaux non-plongés munis d'une action simpliciale libre sur les simplexes et dont les morphismes sont les applications simpliciales qui commutent avec l'action des groupes : pour tout $\phi : G \rightarrow H$, $g \in G$ et $x \in EG$, on a $\phi(g) \cdot B(\phi)(x) = B(\phi)(g \cdot x)$.*

Nous donnerons une construction du foncteur dans la proposition 7.3.3 ci-dessous.

Remarque 7.2.4. Le deuxième point du théorème signifie que l'on peut choisir dans la classe d'équivalence d'homotopie de EG un espace avec les propriétés annoncées. La seule obstruction pour prendre un complexe simplicial plongé tel que dans la définition 3.1.4 est que, comme les exemples ci-dessous vont le montrer, en général, on ne peut pas choisir un modèle simplicial plongé dans un \mathbb{R}^n car il serait de dimension finie et donc, en vertu du Corollaire 7.2.6 sa (co)homologie ne serait qu'en un nombre fini de degré. Nous avons vu 7.1.16 que ce n'est pas le cas pour un groupe fini cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par exemple.

⁹⁹. Le fait que cette notation soit la même que pour la catégorie associée au monoïde sous-jacent à G n'est ni grave ni fortuite. En effet, il existe un foncteur appelé nerf qui à une petite catégorie associe un objet simplicial homotope dans le cas présent à ce que nous avons noté BG .

Définition 7.2.5 (*Espace classifiant d'un groupe*). L'espace quotient (bien défini à équivalence d'homotopie près) $BG := EG/G$ s'appelle l'espace classifiant de G .

Corollaire 7.2.6. *Soit G un groupe et M un \mathbb{Z} -module muni de l'action triviale de G . On a un quasi-isomorphisme canonique $C_*(BG, M) \xrightarrow{\cong} \mathbb{L}(M)_G$ et en particulier des isomorphismes naturels¹⁰⁰*

$$H_i(BG, M) \cong H_i(G, M), \quad H^i(BG, M) \cong H^i(G, M).$$

Le corollaire permet donc de calculer la (co)homologie des groupes en fonction de celle des espaces classifiants. Par ailleurs le théorème 4.3.3 implique qu'il n'est pas utile de préciser la structure cellulaire pour calculer l'homologie du groupe.

Démonstration. Le Théorème 7.2.3 donne l'existence d'un foncteur à valeur dans les complexes simpliciaux et, en prenant les chaînes, on en déduit des foncteurs $C_* \circ B(-) : \mathbf{Gp} \rightarrow \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})$ et $C_* \circ E(-) : \mathbf{Gp} \rightarrow \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})$. Le lemme 7.2.2 assure que le second foncteur appliqué en G a pour valeur une résolution projective de \mathbb{Z} comme $\mathbb{Z}[G]$ -module et que $C_* \circ B(G)$ est quasi-isomorphe à $\mathbb{L}(M)_G$. Le deuxième point en découle immédiatement. Comme de plus nous venons de construire des foncteurs de \mathbf{Gp} dans \mathbf{Top} , il suit immédiatement que les (quasi-)isomorphismes que nous avons donné sont des (quasi-)équivalences naturelles. \square

L'espace classifiant a la propriété suivante qui découle de la théorie élémentaire des revêtements.

Proposition 7.2.7. *L'espace classifiant BG est connexe par arcs, a un point base canonique noté e et on a $\pi_1(BG, e) \cong G$.*

Exemple 7.2.8 (Classifiant de \mathbb{Z}). On a $B\mathbb{Z} \cong S^1$. En effet, \mathbb{Z} agit librement (par translation) sur \mathbb{R} , espace contractile, qui est la réunion des intervalles $[n, n + 1]$ (en particulier, c'est un complexe simplicial et l'action est libre sur les simplexes), et S^1 est précisément le quotient \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Du corollaire 7.2.6 et de 4.2.13 on retrouve (cf exemple 7.1.18) que l'homologie du groupe \mathbb{Z} dans un module trivial est donnée par $H_{i \geq 2}(\mathbb{Z}, M) = 0$, $H_1(\mathbb{Z}, M) = H_0(\mathbb{Z}, M) = M$.

Exemple 7.2.9 (Classifiant d'un groupe libre). Soit I un ensemble et F_I le groupe libre engendré par I . Alors, l'espace classifiant BF_I de F_I est le bouquet $\bigvee_I S^1$. On peut encore ainsi déduire les résultats de 7.1.18 du calcul de la cohomologie d'un bouquet 4.2.14.

Pour montrer que BF_I est le bouquet, on peut construire l'espace EF_I comme l'arbre suivant (faire un dessin). On identifie les sommets avec les éléments de F_I et pour chaque paire de sommets x, y , on met une arête de x vers y si $y = xi$ où $i \in I$. Le fait que F_I soit libre garantit que ce graphe¹⁰¹ est un arbre. L'action de F_I sur ce graphe se fait par multiplication : pour $g \in F_i$, on envoie l'arête entre y et x sur l'arête reliant gy à gx . Elle est libre sur les simplexes et un arbre est toujours contractile. Le quotient de EF_I par F_I n'a alors qu'un seul sommet et a exactement I arêtes ce qui l'identifie avec le bouquet $\bigvee_I S^1$.

Exemple 7.2.10 (Classifiant de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). L'espace classifiant $B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est $\mathbb{R}P^\infty$. En effet $\mathbb{R}P^\infty$ est le quotient de S^∞ par l'action antipodale $z \mapsto -z$. Or cette action est libre et S^∞ contractile (voir le devoir). Il est cellulaire comme réunion de tous les S^n . On notera que cet espace contrairement aux classifiants des groupes libres est de dimension infinie.

Les calculs de l'exemple 7.1.16 peuvent donc se déduire de ceux de l'homologie de $\mathbb{R}P^n$.

100. comme d'habitude cela signifie que ces isomorphismes sont des équivalences naturelles entre les foncteurs $\mathbf{Gp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ donné respectivement par la (co)homologie du groupe et celle de l'espace topologique BG . De même les quasi-isomorphismes $C_*(BG, M) \xrightarrow{\cong} \mathbb{L}(M)_G$ peuvent être construit de manière à être une transformation naturelle de foncteur qui est un quasi-isomorphisme pour tout G et M .

101. qui est le graphe de Cayley du groupe libre associé à sa présentation standard.

Exemple 7.2.11 (Classifiant de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$). Prenons $S^{2\infty-1} \cong S^\infty$ que nous identifions avec la sphère unité de \mathbf{C}^∞ . L'action de $S^1 \subset \mathbf{C}^*$ sur \mathbf{C}^∞ est libre et de plus $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ s'identifie avec le sous-groupe $\mu_m \subset S^1$ des racines m -ièmes de l'unité. Il suit que $B\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong S^{2\infty-1}/\mu_m$.

Exemple 7.2.12 (Variétés de Grassmann). La grassmanienne $Gr(n, \infty)$ d'ordre n , c'est-à-dire la variété constituée par l'espace des sous-espaces vectoriels de dimension n dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^\infty = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ est l'espace classifiant du groupe orthogonal : $BO(n, \mathbb{R}) \cong Gr(n, \infty)$. Pour $n = 1$ on retrouve bien entendu l'exemple 7.2.10. Notons que comme espace topologique, $Gr(n, \infty)$ s'identifie au quotient $O(\infty, \mathbb{R})/O(n, \mathbb{R}) \times O(\infty, \mathbb{R})$ induit par l'inclusion diagonale (via des matrices par blocs donc) de $O(n, \mathbb{R}) \times O(\infty, \mathbb{R})$ dans $O(\infty, \mathbb{R})$ comme un sous-groupe.

Remarque 7.2.13 (culturelle). La proposition 7.2.7 s'étend pour montrer que le groupe fondamental est le seul groupe d'homotopie non-nul de BG . Autrement dit, $\pi_{n \neq 1}(BG) = 0$. Un théorème d'Eilenberg et Mac Lane assure que pour tout $n \geq 1$ et tout groupe G (abélien si $n > 1$) il existe à équivalence d'homotopie près un unique CW-complexe, noté $K(G, n)$, qui a un seul groupe d'homotopie non trivial en degré n qui vaut G . Ceci généralise le point (1) du théorème 7.2.3. Un tel espace vérifie la propriété suivante : On a des isomorphismes naturels :

$$H_n(X, G) \cong \pi_0(\text{Map}(K(G, n), X)), \quad H^n(X, G) = \pi_0(\text{Map}(X, K(G, n)))$$

où on rappelle que $\pi_0(\text{Map}(X, Y)) = \text{Hom}(X, Y)/\simeq$ désigne les classes d'homotopie d'applications continues de X vers Y .

Remarque 7.2.14 (Homologie d'un espace à coefficient local). On peut aussi calculer la (co)homologie des groupes à coefficients dans une représentation non-triviale via la topologie. En effet, d'après le théorème 7.2.3, on peut construire EG et l'argument de la preuve du corollaire 7.2.6 assure que le lemme 7.2.2 implique que nous avons des quasi-isomorphismes naturels

$$C_*(EG) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \cong \mathbb{L}(M)_G, \quad \text{et } \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_*(EG), M) \cong \mathbb{R}(M)^G.$$

Les groupes de (co)homologie à gauche des équivalences s'appellent les groupes de cohomologie de BG à coefficient dans le système local M .

De manière générale, si $(X, *)$ est un espace pointé connexe par arcs, et M un $\pi_1(X, *)$ -module, on appelle M un système local¹⁰² sur X et les groupes d'homologie de X à valeur dans ce système sont donnés par

$$H_i(C_*(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M)$$

où \tilde{X} est le revêtement universel de X , caractérisé par le fait qu'il a une action libre de $\pi_1(X, *)$ et qu'il est muni d'une surjection continue sur X telle que localement elle soit de la forme la projection de $U_i \times \pi_1(X, *)$ sur U_i (avec (U_i) un recouvrement ouvert de X). On peut étudier la (co)homologie à coefficient local par des techniques similaires à celle de la (co)homologie singulière.

Remarque 7.2.15 (Extension aux groupes topologiques). L'interprétation topologique permet d'étendre facilement la notion de (co)homologie des groupes donnée par la topologie au cadre des *groupes topologiques*. Un groupe topologique est un groupe G muni d'une topologie telle que la multiplication $G \times G \rightarrow G$ et l'inverse $g \mapsto g^{-1}$ soient continues.

Alors il existe toujours un espace topologique contractile EG , muni d'une action libre de G , qui est unique à équivalence d'homotopie (faible). On peut alors définir $BG := EG/G$ comme le quotient et définir, en suivant le corollaire 7.2.6, les groupes de (co)homologie de G à valeur dans une représentation triviale (resp. système local) M comme les groupes

102. Cette terminologie vient de la théorie des revêtements et des faisceaux.

de (co)homologie $H_*(BG, M)$, $H^*(BG, M)$ (resp. les groupes locaux comme dans la remarque 7.2.14). La construction de EG dans ce cadre est similaire à celle de la proposition 7.3.7 mais en tenant compte en plus de la topologie de G ; elle peut être faite fonctoriellement.

Évidemment, dans le cadre des groupes topologiques, la proposition 7.2.7 n'est plus vraie car la topologie de G influe maintenant sur celle de BG . Par exemple si G est un groupe topologique connexe, alors $\pi_1(BG) = 0$.

Exemple 7.2.16. Le cercle S^1 a une structure de groupe topologique canonique donnée par son identification avec un sous-groupe de \mathbf{C}^* . Comme $S^{2\infty-1}$, la sphère unité de $\mathbf{C}^\infty = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbf{C}$ est contractile et que S^1 agit librement sur \mathbf{C}^∞ via l'action linéaire de \mathbf{C} , on en déduit que S^∞ est ES^1 . Il suit que $BS^1 \cong CP^\infty$ et en particulier l'homologie du groupe S^1 est donc $H_i(S^1) \cong \mathbb{Z}$ si i est pair et est nulle si i est impair.

7.3. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA (CO)HOMOLOGIE DES GROUPES

Il existe une résolution standard fonctorielle permettant de calculer la (co)homologie des groupes (que l'on peut déduire du théorème 7.2.3).

Définition 7.3.1 (*Résolution et complexe standard*). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $E_n(G) = \mathbb{Z}[G^{n+1}] \cong \mathbb{Z}[G][G^n]$ le $\mathbb{Z}[G]$ -module libre engendré par l'ensemble G^n . On notera, comme le veut la tradition, $g_0|g_1|g_2|\dots|g_n$ un élément de la \mathbb{Z} -base induite¹⁰³ sur $\mathbb{Z}[G^{n+1}]$. Soit $d_i : E_n(G) \rightarrow E_{n-1}(G)$ les applications linéaires définies par

$$(49) \quad d_i(g_0|g_1|g_2|\dots|g_n) = \begin{cases} g_0g_1|g_2|\dots|g_n & \text{si } i = 0 \\ g_0|g_1|\dots|g_{i-1}|g_i g_{i+1}|g_{i+2}|\dots|g_n & \text{si } 0 < i < n \\ g_0|g_1|\dots|g_{n-1} & \text{si } i = n. \end{cases}$$

On note $d^{Bar} := E_*(G) \rightarrow E_{*-1}(G)$ l'application linéaire $\sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$ (définie en tout degré n). On appelle $(E_*(G), d^{Bar})$ la *résolution standard* ou *résolution Bar*¹⁰⁴ de G .

On appelle *complexe standard* ou *complexe Bar* de G la donnée de $(B_*(G), d^{Bar})$ où $B_n(G) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} E_n(G) \cong \mathbb{Z}[G^n]$ et $d^{Bar} = \text{id}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} d^{Bar}$. $d^{Bar} := E_*(G) \rightarrow E_{*-1}(G)$.

Si $\phi : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes, on obtient des applications linéaires $\phi_* : E_*(G) \rightarrow E_*(H)$ et $\phi_* : B_*(G) \rightarrow B_*(H)$ définies, en tout degré n , par

$$\phi_*(g_0|g_1|\dots|g_n) = \phi(g_0)|\phi(g_1)|\dots|\phi(g_n)].$$

Remarque 7.3.2. On considère donc G^{n+1} comme un ensemble avec une action (libre) à gauche de G par multiplication sur le premier facteur. On pourrait aussi considérer l'action diagonale. On a un isomorphisme entre les deux constructions données par $g_0|g_1|\dots|g_n \mapsto (g_0, g_0g_1, \dots, g_0g_1 \dots g_n)$. Les opérateurs d_i deviennent au travers de cet isomorphisme simplement les morphismes $d_i(g_0, \dots, g_n) = (g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n)$.

Les mots résolutions et complexes sont justifiés par la proposition suivante.

Proposition 7.3.3. *Soit G un groupe. Alors*

- (1) *on a que $(E_*(G), d^{Bar})$ est une résolution $\mathbb{Z}[G]$ -libre (donc projective) de \mathbb{Z} ;*
- (2) *on a que $(B_*(G), d^{Bar})$ est naturellement quasi-isomorphe à $\mathbb{L}(\mathbb{Z})_G$. En particulier les groupes de (co)homologie $H_*(G)$, $H^*(G)$ de G sont canoniquement isomorphes à ceux du complexe $B_*(G)$ et de son complexe dual $B^*(G) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(B_*(G), \mathbb{Z})$.*
- (3) *la résolution standard $E_*(-)$ et le complexe standard $B_*(-)$ munis des morphismes ϕ_* forment respectivement des foncteurs $\mathbf{Gp} \rightarrow \mathbf{Ch}(\mathbb{Z}[G])$, $\mathbf{Gp} \rightarrow \mathbf{Ch}(\mathbb{Z})$; le premier foncteur ayant son image dans les résolutions projectives de \mathbb{Z} .*

103. Autrement dit g_0 est vu dans $\mathbb{Z}[G]$ et g_1, \dots, g_n sont dans G^n .

104. La terminologie résolution ou complexe Bar vient à la fois d'un nom et de la présence des barres verticales dans la notation standard.

Le dernier point nous donne donc un foncteur (et pas seulement un foncteur à homotopie près) de la catégorie des groupes dans les complexes de chaînes qui donnent des modèles explicites et fonctoriels des foncteurs dérivés $\mathbb{L}(-)_G$ et $\mathbb{R}(-)^G$ et de leurs groupes de (co)homologie. En revanche ces complexes sont évidemment gros, de rang bien plus grand que ceux que nous avons explicité dans les exemples 7.1.16 et 7.1.18.

Démonstration. La démonstration que $d^{Bar} \circ d^{Bar} = 0$ est une conséquence de l'associativité de la multiplication d'un groupe (en particulier la même construction donne un complexe associé à tout monoïde) et du signe $(-1)^i$ que nous avons imposé. Comme un morphisme de groupes commute avec la multiplication $\phi(g_i g_{i+1}) = \phi(g_i)\phi(g_{i+1})$ il suit pour tout i que $\phi(d_i(g_0|g_1|\cdots|g_n)) = d_i\phi(g_0|g_1|\cdots|g_n)$ et donc ϕ_* est un morphisme de complexes de chaînes. Les équations $\phi_* \circ \psi_* = (\phi \circ \psi)_*$ et $\text{id}_* = \text{id}$ sont immédiates à partir de la définition.

Finalement, on obtient que les points (2) et (3) de la proposition découlent maintenant du point (1). Pour le point (1), il reste à montrer que $E_*(G)$ est une résolution de \mathbb{Z} car il est $\mathbb{Z}[G]$ -libre par construction. Soit $\varepsilon^{Bar} : E_0(G) = \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$ l'application linéaire définie par $g \mapsto 1$ dont on vérifie immédiatement que $\varepsilon \circ (d_0 - d_1) = 0$. Il nous reste à voir que le complexe (concentré en degré ≥ -1)

$$E_*^+(G) := \cdots \rightarrow E_n(G) \xrightarrow{d^{Bar}} \cdots \xrightarrow{d^{Bar}} E_1(G) \xrightarrow{d^{Bar}} E_0(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

est une suite exacte pour conclure. Pour cela on montre qu'elle est en fait homotope au complexe nul, c'est-à-dire que le morphisme de complexe identité de ce complexe est homotope à 0. Il en résulte alors immédiatement que l'homologie de ce complexe est nulle en tout degré.

Une telle homotopie est donnée par $s : E_*^+(G) \rightarrow E_{*+1}^+(G)$ définie pour $n = -1$ par $s(1) = e \in G \subset \mathbb{Z}[G] = E_0(G)$ et pour $n \geq 0$ par

$$(50) \quad s(g_0|g_1|\cdots|g_n) = [g_0|g_1|\cdots|g_n].$$

On vérifie alors par un calcul direct que

$$d^{Bar} \circ s + s \circ d^{Bar} = \text{id}.$$

□

Remarque 7.3.4. Il faut penser au complexe standard comme le complexe des chaînes singulières d'un espace topologique (et c'est d'ailleurs celui d'un certain modèle simplicial non-plongé de l'espace BG). Il est complètement fonctoriel, mais très gros. Alors qu'une résolution telle que celle des exemples 7.1.16 et 7.1.18 doit être pensée comme un modèle quasi-simplicial *petit* (de BG) calculant l'homologie de G .

Le complexe standard, à l'instar du complexe singulier, est en revanche pratique pour établir certaines propriétés générales et fonctorielles de la (co)homologie des groupes.

On peut simplifier un peu le complexe Bar.

Définition 7.3.5 (Complexes et résolutions normalisées). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\overline{E}_n(G)$ et $\overline{B}_n(G)$ les modules quotients par le sous ($\mathbb{Z}[G]$ ou \mathbb{Z} selon les cas) module engendré par les $[g_1|\dots|g_n]$ tel que l'un des $g_i = 1$. On les appelle respectivement la résolution normalisée et le complexe normalisé de G .

Lemme 7.3.6. *Les différentielles d^{Bar} passent au quotient et les morphismes quotients $E_*(G) \rightarrow \overline{E}_*(G)$, $B_*(G) \rightarrow \overline{B}_*(G)$ sont des quasi-isomorphismes.*

La preuve que la différentielle passe au quotient est un petit calcul (on notera que les d_i , eux ne passent pas au quotient). Le fait que ce soit des quasi-isomorphismes est un résultat standard qui se déduit par une homotopie de chaînes. On renvoie à [11] et [3] pour une preuve.

Le complexe standard est un modèle quasi-simplicial (non plongé dans un espace euclidien) du classifiant BG de G .

Proposition 7.3.7. *Soit G un groupe. Il existe une triangulation quasi-simpliciale (non plongée dans un espace euclidien) de EG qui a exactement G^{n+1} simplexes de dimension n et dont les opérateurs de faces sont donnés par les d_i (49).*

Cette construction donne un foncteur $E(-) : \mathbf{Gp} \rightarrow \mathbf{Top}$ dont la valeur en chaque groupe est une espace topologique EG vérifiant les conditions du théorème 7.2.3.

On a de plus que $(C_(EG), d) \cong (E_*(G), d^{Bar})$ et que $C_*(EG/G) \cong B_*(G)$.*

Esquisse de la preuve. Le dernier point est juste une conséquence des définitions du complexe de chaînes simpliciales d'un complexe simplicial. Pour le premier point, il suffit de vérifier que si on se donne une collection de n -simplexes abstraits paramétrés par les éléments $(g_0, \dots, g_n) \in G^{n+1}$, les conditions de faces (i.e. les conditions (1) et (2) de 3.1.4) sont vérifiées, le plus naturel étant en utilisant la formulation équivalente de la remarque 7.3.2. L'idée est que l'on voit $EG^{(n)}$ comme une réunion de n simplexes plongés dans $\mathbb{R}^{G^{n+1}}$ (recollés suivant les d_i) et qu'on munit cette collection lorsque n grandit de la topologie colimite.

Les hypothèses d'action du théorème 7.2.3 sont facilement vérifiées. Enfin la preuve de la proposition 7.3.3 nous assure que la réalisation de ce complexe quasi-simplicial est contractile en construisant une homotopie obtenue par la réalisation de $s : E_*(G) \rightarrow E_{*+1}(G)$. Nous laissons les détails en exercice. \square

L'homologie d'un groupe fini est de torsion (à part en degré 0).

Théorème 7.3.8. *Soit G un groupe fini de cardinal $n = |G|$ et M un G -module. Alors, pour tout entier $i > 0$, on a que les groupes de (co)homologie $H_i(G, M)$, $H^i(G, M)$ sont des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules.*

Autrement dit, la multiplication par $|G|$ est triviale dans les groupes de (co)homologie (à part éventuellement en degré 0). En particulier, ces groupes sont de torsion uniquement.

Démonstration. On va utiliser la résolution standard $E_*(G)$. Notons que la multiplication par $|G|$ est évidemment un morphisme de complexe de $E_*(G)$ dans lui-même et de même pour l'action par un élément de G . Puisque G est un groupe fini,

$$\left(\sum_{g \in G} g \cdot\right)h = \sum_{g \in G} g \cdot h = \sum_{g \in G} g$$

pour tout $h \in G$. On en déduit un diagramme commutatif de complexes de chaînes

$$(51) \quad \begin{array}{ccccc} \dots & \longrightarrow & E_2(G) & \xrightarrow{d^{bar}} & E_1(G) & \xrightarrow{d^{bar}} & E_0(G) \\ & & \downarrow *|G| & & \downarrow *|G| & & \downarrow *|G| - \sum_{g \in G} g \cdot \\ \dots & \longrightarrow & E_2(G) & \xrightarrow{d^{bar}} & E_1(G) & \xrightarrow{d^{bar}} & E_0(G) \end{array}$$

On note $\beta : E_*(G) \rightarrow E_*(G)$ le morphisme de complexe donné par les flèches verticales. Le théorème découle maintenant du fait que α est homotope à 0. Une homotopie explicite est donnée par la formule

$$(52) \quad h(g_0|g_1|\dots|g_n) = (-1)^{n+1} \sum_{g \in G} g_0|g_1|\dots|g_n|g.$$

On vérifie par un calcul direct que $d^{Bar} \circ h + h \circ d^{Bar} = \alpha$. \square

L'interprétation topologique de la (co)homologie des groupes donne le résultat suivant.

Proposition 7.3.9. *Soit G un groupe et M un G -module trivial. Alors on a des isomorphismes naturels*

$$H^1(G, M) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Gp}}(G, M), \quad H_1(G, M) \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} M$$

où $G_{ab} := G/[G, G]$ est l'abélianisé de G (c'est-à-dire le quotient par le sous-groupe normal engendré par les commutateurs $xyx^{-1}y^{-1}$).

Démonstration. Par le corollaire 7.2.6 on est ramené à la (co)homologie de l'espace classifiant BG . Le théorème d'Hurewicz 4.1.19 et la proposition 7.2.7 donnent les groupes d'homologie et le théorème des coefficients universels 5.5.8 (sachant que $H_0(BG)$ est toujours libre) donne que la cohomologie est donnée par $H^1(BG, M) \cong \text{Hom}(G/[G, G], M) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Gp}}(G, M)$. \square

Lorsque la représentation M n'est pas triviale, on peut encore décrire le premier groupe de cohomologie mais la description est un peu plus subtile.

Définition 7.3.10. Soit M un G -module. Une dérivation de G dans M est une application $D : G \rightarrow M$ telle que pour tout $g, h \in G$ on ait

$$(53) \quad D(gh) = g \cdot D(h) + D(g).$$

Une dérivation est *principale* s'il existe $m \in M$ tel que $D(g) = g \cdot m - m$ pour tout $g \in G$.

Notons que, si M est un G -module trivial, toute dérivation principale est nulle et une dérivation n'est rien d'autre qu'un morphisme de groupes.

Proposition 7.3.11. *Soit M un G -module. On a un isomorphisme canonique*

$$H^1(G, M) \cong \text{Der}(G, M) / \text{Der}^{\text{prin}}(G, M)$$

où $\text{Der}(G, M)$ est l'ensemble des dérivations de G dans M et $\text{Der}^{\text{prin}}(G, M)$ est le sous-ensemble de celles qui sont principales.

Démonstration. La proposition 7.3.3 nous dit que l'on peut utiliser la résolution standard pour calculer la cohomologie :

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(E_*(G), M) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}(M)^G.$$

Puisque $E_1(G) = \mathbb{Z}[G][G]$, on en déduit que les n -cochaînes sont juste les applications $f : G^n \rightarrow M$; une telle application correspondant à l'application $\mathbb{Z}[G]$ linéaire donnée par $g[g_1 | \cdots | g_n] \mapsto g \cdot f(g_1 | \cdots | g_n)$. En particulier une 1-cochaîne est une application $G \rightarrow M$. Par définition de $d^{\text{Bar}} : E_2(G) \rightarrow E_1(G)$, on a que $d^{\text{Bar}*} : \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(E_1(G), M) \xrightarrow{-od^{\text{Bar}}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(E_2(G), M)$ est donné par la formule

$$d^{\text{Bar}*}(f)(g, h) = g \cdot f(h) - f(gh) + f(g).$$

Il suit que f est un 1-cocycle si et seulement si f est une dérivation.

Par ailleurs une 0-cochaîne est un élément m de M (associé au morphisme $\mathbb{Z}[G]$ -linéaire donné par $g \mapsto g \cdot m$). On a $d^{\text{Bar}*}(m)(g) = g \cdot m - m$ d'où il suit que les dérivations principales sont exactement les 1-cobords et la proposition suit. \square

Le deuxième groupe de cohomologie calcule les extensions (comme cela a pu être vu en cours de groupes finis).

Définition 7.3.12 (*Extensions d'un groupe*). Soit M un \mathbb{Z} -module. Une extension de G par M est une suite exacte courte de groupes

$$M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G.$$

La suite est dite *scindée* s'il existe un morphisme de groupes $s : G \rightarrow E$ tel que $p \circ s = \text{id}_G$.

Un morphisme d'extension est un morphisme de groupes $\phi : E \rightarrow E'$ tel que

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & G \\ \parallel & & \downarrow \phi & & \parallel \\ M' & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{p'} & G' \end{array}$$

soit un diagramme commutatif.

Notons que comme M est le noyau du morphisme de groupes i , c'est en particulier un sous-groupe normal¹⁰⁵ de E .

Lemme 7.3.13. *Toute extension $M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G$ de G par M induit une structure canonique de $\mathbb{Z}[G]$ -module sur M .*

Démonstration. Soit $g \in G$ et $m \in M$; prenons $\tilde{g} \in E$ un élément tel que $p(\tilde{g}) = g$. On a alors que $\tilde{g}m\tilde{g}^{-1}$ est dans M , puisque M est normal et ne dépend pas du choix du relevé \tilde{g} car M est abélien. Ceci définit donc une application $G \times M \rightarrow M$, donnée par la conjugaison dans E donc, qui fait de M un $\mathbb{Z}[G]$ -module canoniquement. \square

Définition 7.3.14 (*Extension compatible*). Soit M un G -module. Une extension de G par M est dite compatible si la structure de G -module sur M est la même que l'action induite par le lemme 7.3.13 par l'extension.

Remarque 7.3.15. Les extensions de G par M forment une catégorie obtenue par la composition de $\phi \circ \psi$ des morphismes verticaux et l'identité est le morphisme correspondant à $\phi = \text{id}_E$. Notons que par (une preuve analogue à celle du) lemme des 5 (cf 5.1.13), on a que tout morphisme d'extension est un isomorphisme car ϕ est nécessairement un isomorphisme. Notons que si une extension est compatible, toute extension isomorphe est aussi compatible (puisque $\phi(\tilde{g}i(m)\tilde{g}^{-1}) = \tilde{\phi}(g)i'(m)\tilde{\phi}(g)^{-1}$).

Exemple 7.3.16 (*Produit semi-direct*). Soit M un G -module, le produit semi-direct de G par M , noté $G \ltimes M$ est le groupe dont l'ensemble sous jacent est $G \times M$ muni de la structure de groupe suivante :

$$(g, m) \cdot (g', m') = (gg', m + g \cdot m').$$

Notons qu'on a une inclusion de $M \hookrightarrow G \ltimes M$ donnée par $m \mapsto (e, m)$ qui est un morphisme de groupes. Par ailleurs la surjection $(g, m) \mapsto g$ est aussi un morphisme de groupes de sorte qu'on a une extension $M \hookrightarrow G \ltimes M \twoheadrightarrow G$, qui est compatible (car $(g, 0)(e, m)(g^{-1}, 0) = (g, 0)(g^{-1}, m) = (e, g \cdot m)$). De plus comme l'inclusion $g \mapsto (g, 0)$ est aussi un morphisme de groupes, on en déduit que le produit semi-direct est un extension scindée.

Lemme 7.3.17. *Une extension de G par M est scindée si et seulement si elle est isomorphe au produit demi-direct $G \ltimes M$.*

Démonstration. On a montré le sens-direct juste au dessus du lemme. Réciproquement, étant donné une extension compatible, si $s : G \rightarrow E$ est une section de $p : E \twoheadrightarrow G$ alors $(g, m) \mapsto i(m)s(g)$ est un isomorphisme d'extension entre E et $G \ltimes M$ (car $i(m)s(g)i(m')s(g') = i(m)s(g)i(m')s(g^{-1})s(g)s(g')$ et que $s(g)i(m')s(g^{-1}) = i(g \cdot m')$ puisque l'extension est compatible. \square

La relation d'isomorphie entre les extensions permet de définir un ensemble quotient formé des classes d'isomorphismes d'extensions ainsi que le sous-ensemble de celles qui sont compatibles (si on fixe préalablement un G -module).

¹⁰⁵. Ce qui s'appelle aussi un sous-groupe distingué.

Théorème 7.3.18. *Soit M un G -module. Il y a une bijection canonique entre $H^2(G, A)$ et les classes d'isomorphismes d'extensions compatibles de G par M . La classe de $0 \in H^2(G, A)$ correspond au produit semi-direct.*

En particulier, les extensions ont une structure naturelle de groupe abélien.

Exercice 7.3.19. Déterminer la structure de groupes sur les extensions de G par M .

Ébauche de preuve du Théorème 7.3.18. Soit $M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G$ une extension compatible. On choisit une section *ensembliste* $s : G \rightarrow E$ de $p : E \rightarrow G$, vérifiant $s(e) = e$. À part si l'extension est isomorphe au produit semi-direct, cette section peut ne pas être un morphisme de groupes : $s(gh) \neq s(g)s(h)$ en général. Mais comme $p(s(gh)) = p(s(g)s(h)) = gh$, on en déduit que $s(g)s(h)s(gh)^{-1} \in M$. Ceci pousse à poser $D_{s,E} : G^2 \rightarrow M$ donnée par

$$D_{s,E}(g, h) = s(g)s(h)s(gh)^{-1}.$$

Notons que $D_{s,E}$ est une 2-cochaîne du complexe standard à valeur dans M . En effet, en vertu de la proposition 7.3.3, on peut utiliser la résolution standard pour calculer la cohomologie, et, de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(E_*(G), M) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}(M)^G$, on déduit que les n -cochaînes sont juste les applications $f : G^n \rightarrow M$.

Notons que $D_{s,E}(g, h)$ s'annule dès que g ou h vaut 1. Par ailleurs, on a $d^{\text{Bar}*}(D_{s,E}(g, h)) = 0$ comme on le vérifie par un calcul direct (en utilisant l'associativité de la multiplication dans E). On a donc que $D_{s,E}$ est un 2-cocycle *normalisé* (c'est-à-dire un élément de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\overline{E}_*(G), M)$).

Le lemme suivant montre que tous les cocycles (normalisés) sont en fait de cette forme

Lemme 7.3.20. *Une 2-cochaîne normalisée ϕ est un 2-cocycle si et seulement s'il existe une extension compatible $M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G$ et une section ensembliste $s : G \rightarrow E$ tel que $\phi = D_{s,E}$.*

Démonstration du lemme. On a vu le sens réciproque. Pour le sens direct soit $\phi : G^2 \rightarrow M$ un cocycle normalisé. On va construire E en déformant le produit semi-direct par ϕ . Précisément, on part du produit ensembliste $G \times M$ que l'on munit de la multiplication

$$(g, m) \cdot (g', m') = (gg', m + gm' + \phi(g, h)).$$

La condition d'être un cocycle garantit que ce produit est associatif. De plus $(e, 0)$ est l'unité et on vérifie que $(g^{-1}, -g^{-1}m - g^{-1}\phi(g, g^{-1}))$ est l'inverse de (g, m) . Il est clair par construction que $(g, m) \mapsto g$ et $m \mapsto (e, m)$ sont des morphismes de groupes (car ϕ s'annule en e). On en déduit que $M \hookrightarrow E \rightarrow G$ est une extension compatible et que en prenant $s(g) = (g, 0)$ on a bien $D_{s,E} = \phi$. \square

Par le lemme 7.3.6, on a que tout cocycle est équivalent, à un bord près, à un cocycle normalisé et donc à la donnée d'un $D_{s,E}$. Par ailleurs, notons que si $D_{s,E} = D_{s',E'}$, alors l'extension donnée par E est isomorphe à celle de E' . En effet, $s : G \rightarrow E$ donne une bijection $E \cong G \times M$ donnée par $x \mapsto (p(x), x(s(x)^{-1}))$. On vérifie que la composée $E \xrightarrow{\cong} G \times M \xrightarrow{\cong} E'$ est en fait un isomorphisme de groupes (ceci est laissé en exercice).

Il suit que l'on a un morphisme des cocycles normalisés dans les classes d'isomorphismes d'extensions compatibles. Notons que l'on a un choix pour la section ensembliste $s : G \rightarrow E$ qui ne change donc rien à la classe d'isomorphisme de l'extension. Deux sections ensemblistes $s, s' : G \rightarrow E$ (vérifiant $s(e) = s'(e) = e$) de p vérifient qu'il existe $f : G \rightarrow M$ une application telle que $s(g) = f(g)s'(g)$ (puisque $p(s(g)) = p(s'(g))$). En particulier f est une 1-cochaîne normalisée.

Lemme 7.3.21. *On a $D_{s,E} = D_{s',E} + d^{\text{Bar}*}(f)$.*

Preuve du lemme. C'est un calcul direct. \square

On a vu dans le lemme 7.3.20 que tout cocycle est, à un cobord près, donné par un $D_{s,E}$, ce qui nous donne un morphisme surjectif de $H^2(G, M)$ dans les classes d'isomorphismes d'extension (puisque pour tout E on peut trouver une section et que l'on a vu que l'extension associée à $D_{s,E}$ est isomorphe à E). Par ailleurs le dernier lemme montre que la classe de cohomologie $[D_{s,E}]$ est indépendante du choix de la section ensembliste $s : G \rightarrow E$ et ne dépend donc que de E . Il suit que le morphisme de $H^2(G, M)$ dans les extensions est également injectif. \square

Remarque 7.3.22. Le théorème 7.3.18 est un exemple typique de structure classifiée à isomorphisme près par des groupes de cohomologie. Ce genre d'exemples apparaît aussi bien en théorie des groupes qu'en algèbre et en géométrie. Par exemple les structures de fibrés sur une variété, les déformations d'une algèbre ou d'une variété algébrique, les structures complexes sur une variété, etc, sont encodées par de tels groupes de cohomologie : les conditions définissant la structure forment des cocycles et la condition d'équivalence entre elles donnent des cobords.

VIII. APPENDICE : GÉNÉRALITÉS SUR LES ESPACES TOPOLOGIQUES

Nous reprenons dans cette partie quelques résultats généraux de topologie générale, en insistant un peu plus particulièrement sur ce qui sort du cadre de la topologie des espaces métriques.

Nous commençons par rappeler les notions suivantes :

Définition 8.0.1. • Une fonction $f : X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques est continue si la préimage par f de tout ouvert¹⁰⁶ est un ouvert.

- Un espace topologique est discret si tout sous-ensemble est ouvert.
- Un espace topologique est grossier si ses seuls ouverts sont lui-même et \emptyset .

Il est facile de vérifier que X est discret si et seulement si tous les singletons $\{x\}$ de X sont ouverts et que tout ensemble peut être muni de la topologie discrète (ainsi que de la topologie grossière).

Par définition de la continuité, toute application $f : X \rightarrow Y$ est continue si X est discret ou bien si Y est grossier. En revanche une application continue $f : X_{gr} \rightarrow Y$ d'un espace grossier dans un espace topologique Y dont les singletons sont fermés est constante. De même, une application continue à valeur dans un espace discret est constante sur chaque composante connexe.

Lemme 8.0.2 (Recollement d'applications). *Soient X, Y des espaces topologiques et $A, B \subset X$ deux fermés tels que $X = A \cup B$. Si $f : X \rightarrow Y$ est une application telle que les restrictions $f_A : A \rightarrow Y$ et $f_B : B \rightarrow Y$ soient continues, alors f est continue.*

8.1. ESPACES SÉPARÉS, COMPACTS ET VARIANTES

Une propriété très utile en topologie est celle d'être un espace séparé, qui est automatique pour les espaces métrisables, mais n'est pas nécessairement préservé par les passages aux quotients (voir 2.3). Cette propriété qui signifie que les points sont séparés (au sens du français) par des ouverts fait partie d'une hiérarchie d'axiomes dits de séparation classique qui est récapitulée dans la définition suivante :

Définition 8.1.1 (Axiomes de Séparation). Soit X un espace topologique.

(T_0): X est T_0 (ou de Kolmogoroff) si pour tout point $x \neq y$, il existe un ouvert contenant l'un des points et pas l'autre.

(T_1): X est dit¹⁰⁷ T_1 si pour tout points $x \neq y$, il existe un ouvert U_x contenant x et pas y et un ouvert U_y contenant y et pas x .

Séparé = (T_2): X est **séparé** si pour tout $x \neq y$, il existe des ouverts *disjoints* U_x contenant x et U_y contenant y .

(T_3): X est T_3 ou **régulier** s'il est T_0 et vérifie en plus la propriété (\tilde{T}_3) : pour tout fermé F et point $x \notin F$, il existe des ouverts O_x, O_F disjoints contenant respectivement x et F .

(T_4): X est T_4 ou **normal** s'il est T_1 et vérifie en plus la propriété (\tilde{T}_4) : si A, B sont des fermés disjoints dans X , il existe des ouverts O_A, O_B disjoints contenant respectivement A et B .

Remarque 8.1.2. En anglais, un espace séparé est appelé espace de *Hausdorff*.

Au plus un espace est élevé dans cette hiérarchie, au plus il est facile de construire des fonctions continues sur ces espaces.

106. On a une caractérisation équivalente avec les fermés à la place des ouverts.

107. parfois appelé de Fréchet, mais c'est une terminologie ambiguë et non-univoque qu'il vaut mieux proscrire.

Ces notions de séparation sont strictement différentes et s'impliquent les unes les autres. En particulier les espaces normaux et régulier sont séparés¹⁰⁸. On pourra consulter les exercices pour voir plus d'exemples.

Exemple 8.1.3. Tout espace métrisable est séparé et même normal. C'est également le cas de toute variété (au sens français du terme, ce qui inclut qu'elle est séparée notamment).

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ muni de la topologie de Zariski (c'est-à-dire essentiellement dont les fermés sont les ensembles de racines d'un polynôme, cf le TD) n'est pas séparé.

Exemple 8.1.4. Soit (X, \preceq) un ensemble (partiellement) ordonné. Pour $x \in X$, on introduit les parties :

$$D_x = \{y \in X / x \preceq y\} \text{ et } G_x = \{y \in X / y \preceq x\}.$$

Les ensembles D_x (respectivement les ensembles G_x) forment la base d'une topologie appelée topologie droite (resp. gauche). Ces espaces topologiques sont T_0 mais pas T_1 en général. Par ailleurs tout espace T_0 qui vérifie que l'intersection quelconque d'ouvert est ouverte est homéomorphe à un ensemble partiellement ordonné muni de la topologie droite.

Une des principales propriétés des espaces normaux est résumée dans le Théorème suivant.

Théorème 8.1.5 (Tietze). *Soit X un espace normal et F un fermé de X . Toute fonction continue $\phi : F \rightarrow \mathbb{R}$ s'étend en une fonction continue $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e. vérifiant que pour tout $x \in F$, $\Phi(x) = \phi(x)$).*

En prenant $F = A \cup B$ la réunion de deux fermés disjoints, on obtient comme corollaire

Lemme 8.1.6 (Urysohn). *Soient A, B deux fermés disjoints d'un espace normal. Alors il existe une fonction continue sur X qui vaut 0 sur A et 1 sur B .*

Une autre notion vraiment fondamentale est celle de compacité et ses variantes. Il existe une petite subtilité à son sujet pour les espaces topologiques généraux et des différences de terminologie entre certaines traditions auxquelles il convient de faire attention, cf remarque 8.1.10.

Définition 8.1.7 (Espace compact). Un espace topologique X est dit compact s'il est séparé et que de tout recouvrement de X par des ouverts, on peut extraire un recouvrement fini.

Un espace est dit localement compact, si pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage compact de x .

Lemme 8.1.8. *Un fermé dans un compact est compact.*

Exercice 8.1.9. Démontrer le lemme.

Remarque 8.1.10. Bien entendu, la première propriété est inutile dans les espaces métrisables car ces derniers sont toujours séparés.

Par ailleurs, on notera qu'en littérature anglo-saxonne, l'hypothèse X séparé est souvent omise¹⁰⁹, ce qui n'est pas le cas dans la tradition française. Par exemple un espace muni de la topologie grossière est toujours compact au sens anglo-saxon usuel. De même, si Y n'est pas séparé, alors un précompact (c'est-à-dire un espace vérifiant la propriété de recouvrement) de Y n'est pas forcément fermé dans Y (il suffit de considérer un singleton dans un espace grossier pour trouver un exemple).

L'hypothèse séparé est *fondamentale* pour obtenir la proposition bien connue et utile :

108. au sens du français. Les anglophones font la distinction entre la propriété de séparation des fermés et celles d'être T_1 ou T_0 en plus

109. C'est ce qu'on appelle un espace pré-compact en français.

Proposition 8.1.11. *Soit X un espace compact et Y un espace séparé.*

- (1) *Tout compact de Y est fermé;*
- (2) *pour toute application continue $f : X \rightarrow Y$, on a que $f(X)$ est compact.*
- (3) *Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, injective d'un compact dans un espace séparé alors c'est un homéomorphisme de X sur $f(X) \subset Y$ (où $f(X)$ est muni de sa topologie de sous-espace de Y).*

Proposition 8.1.12. *Tout espace compact est normal.*

Définition 8.1.13 (*Espace paracompact*). Un espace paracompact est un espace topologique séparé vérifiant que tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ admet un raffinement localement fini, c'est-à-dire un recouvrement par des ouverts $(V_j)_{j \in J}$ tel que chaque V_j est inclus dans un U_i , et de sorte que tout point est inclus dans un nombre fini de V_j .

Exemple 8.1.14. Toute variété topologique (au sens du français) est paracompacte. Tout espace métrisable est également paracompact.

Une des principales utilisations des espaces paracompact est le résultat suivant.

Proposition 8.1.15 (*existence de partitions de l'unité*). *Soit X un espace paracompact et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Alors il existe un ensemble $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions continues de X dans $[0, 1]$ vérifiant que f_i est à support dans U_i , tout point x admet un voisinage sur lequel seul un nombre fini de f_i sont non-nulles et de plus $\sum_{i \in I} f_i = 1$ sur ce voisinage.*

8.1.1. Topologie compacte-ouverte pour les espaces de fonctions. Soit X, Y deux espaces topologiques. On note Y^X l'espace des fonctions continues $Y^X := \{f : X \rightarrow Y, f \text{ continue}\}$. Ces objets apparaissent régulièrement en topologie algébrique, par exemple pour définir le groupe fondamental ou l'espace des chemins 2.3.39.

Ils peuvent être munis d'une topologie naturelle

Définition 8.1.16. La topologie compacte-ouverte est la topologie sur Y^X dont les ouverts sont engendrés par les ensembles $\widehat{U}^K = \{f : X \rightarrow Y, f(K) \subset U\}$ pour tous sous-ensembles $U \subset Y$ ouvert et $K \subset X$ compact.

Il n'est pas complètement évident de se rendre compte tout de suite que cette topologie est naturelle. C'est un peu plus évident si l'espace d'arrivée est métrique en vertu de la proposition suivante :

Proposition 8.1.17. *Si Y est un espace métrisable, la topologie compacte-ouverte est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

La topologie-compacte ouverte est aussi la bonne topologie pour assurer que la composition ou l'évaluation $X \times Y^X \rightarrow Y, (x, f) \mapsto f(x)$ sont continues, du moins sous des hypothèses de séparation et compacité suffisante.

Lemme 8.1.18. *On suppose que X est localement compact, alors :*

- (1) *l'application d'évaluation $ev : X \times Y^X \rightarrow Y$ définie par $ev(x, f) = f(x)$ est continue.*
- (2) *Si de plus Y est localement compact et Z est séparé, l'application $f \mapsto (y \mapsto f(-, y))$ induit un homéomorphisme $Z^{X \times Y} \cong (Z^X)^Y$ et la composition $(f, g) \mapsto g \circ f$ induit une application continue $c : Y^X \times Z^Y \rightarrow Z^X$.*
- (3) *Si Y, Z sont séparés, l'application qui à $(f, g) \in Y^X \times Z^X$ associe l'application $x \mapsto (f(x), g(x))$ est un homéomorphisme $Y^X \times Z^X \cong (Y \times Z)^X$.*

8.2. ESPACES TOPOLOGIQUES DÉFINIS PAR DES PROPRIÉTÉS UNIVERSELLES

Dans cette partie nous détaillons la topologie produit et la topologie de la réunion et plus généralement les espaces limites et colimites.

Définition 8.2.1. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. La topologie produit sur $\prod_{i \in I} X_i$ est la topologie la moins fine rendant continue les projections canoniques $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j, (x_i) \mapsto x_j$.

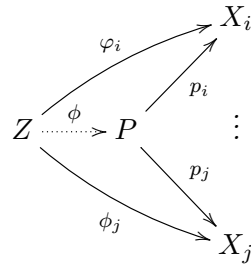
Lemme 8.2.2. Une base d'ouverts pour la topologie produit est donnée par les ouverts de la forme $\prod_{i \in I} U_i$ où U_i est ouvert de X_i et seul un nombre fini de U_i sont différents de X_i entier.

Démonstration. L'application p_j étant continue, il suit que pour tout U_j ouvert dans $X_j, U_j \times \prod_{i \neq j \in I} X_i = p_j^{-1}(U_j)$ doit être ouvert dans $\prod_{i \in I} X_i$. Une intersection finie d'ouverts étant ouverte il suit que les ensembles de la forme énoncée dans le lemme sont bien des ouverts pour la topologie produit. Considérons maintenant la topologie engendrée par ces ouverts (en penant donc des réunions quelconques). Par définition, toute topologie rendant continue les p_j continue doit contenir ces ouverts et il suit que cette topologie est bien la moins fine. \square

En particulier, pour un produit fini, un ouvert est une réunion de produits d'ouverts quelconques des X_i .

Lemme 8.2.3. Les applications continues de Z dans $\prod_{i \in I} X_i$ sont en bijection avec les familles d'application continues $(Z \xrightarrow{f_i} X_i)_{i \in I}$.

Plus précisément, la topologie produit est, à homéomorphisme près, l'unique espace P , muni d'applications continues $p_j : P \rightarrow X_j$, tel que pour toute famille d'applications $\varphi_i : Z \rightarrow X_i$, il existe une unique application $\varphi : Z \rightarrow P$ rendant le diagramme¹¹⁰



commutatif.

Démonstration. Une application (ensembliste) $f : Z \rightarrow \prod X_i$ est la donnée pour tout $z \in Z$ d'un élément $(f_i(z))_{i \in I} \in \prod X_i$ où chaque $f_i(z) \in X_i$. Par ailleurs, on a que $f_i(z)$ est la composée $p_i \circ f$ par définition de la projection. Ceci montre que toute application continue $Z \rightarrow \prod X_i$ est uniquement déterminée par ses composantes $f_i := p_i \circ f$. Il reste à voir que f est continue si et seulement si les f_i le sont. Puisque la composée d'applications continues l'est et que les p_i sont continues, il reste à vérifier que f est continue si chaque f_i l'est. M Par le lemme 8.2.2, on est ramené au cas où U est de la forme $(\prod_{j \text{ fini}} U_j) \times (\prod_{i \in I \setminus J} X_i)$ où les U_j sont des ouverts de X_j . Mais $f_i^{-1}(U_i) = f^{-1}(p_i^{-1}(U_i))$ et donc $f^{-1}(U) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(p_j^{-1}(U_j)) = \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j)$ est ouvert.

Ceci prouve la première assertion et le fait que la topologie vérifie la propriété équivalente énoncée dans le diagramme. L'unicité à homéomorphisme près résulte de l'unicité de l'application ϕ . Soit P' une autre solution, alors les projections $p_j : \prod X_i \rightarrow X_j$ déterminent une unique application continue $f : \prod X_i \rightarrow P'$. On obtient de même une unique

110. on a représenté que deux objets X_i dans le diagramme mais ils y sont bien sûr tous

application $g : P' \rightarrow \coprod X_i$ rendant les daigammes commutatifs. En composant ces flèches on obtient une application $f \circ g$ rendant le diagramme commutatif avec $Z = P' = P$. Comme l'identité est aussi solution, par unicite $f \circ g = id$. De même $g \circ f = id$ et on a bien que f et g sont des homéomorphismes inverses l'un de l'autre. \square

On dispose aussi d'une topologie canonique "duale" de la topologie produit, celle sur les réunions disjointes, appelée plus simplement coproduit.

Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensemble, on note $\coprod_{i \in I} X_i$ leur réunion disjointe (parfois appelée externe), c'est-à-dire l'ensemble $\{(x_i, i), i \in I, x_i \in X_i\}$ formé des éléments de chaque ensemble (à ne pas confondre avec la réunion "interne" de sous-ensembles d'un même ensemble).

On a les inclusions canoniques $i_j : X_j \hookrightarrow \coprod_{i \in I} X_i$ qui envoie un élément de X_j sur l'élément correspondant dans la réunion. On identifiera souvent X_i avec la composante de la réunion qui lui correspond (soit l'image $i_i(X_i)$), et parfois on dira plus précisément la composante indicée par i .

Définition 8.2.4. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. La topologie coproduit sur $\coprod_{i \in I} X_i$ est la topologie la plus fine rendant continue les inclusions canoniques $i_j : X_j \hookrightarrow \coprod_{i \in I} X_i$.

Les ouverts de la topologie coproduit sont très faciles à décrire ; ce sont juste les réunions d'ouverts :

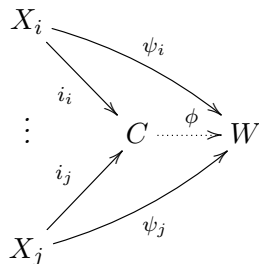
Lemme 8.2.5. Un ouvert de la topologie coproduit est une réunion disjointe $\coprod_{i \in I} U_i$ d'ouverts $U_i \subset X_i$.

Démonstration. Un sous ensemble du coproduit est une réunion disjointe $\mathcal{U} = \coprod_{i \in I} U_i$ de sous-ensembles $U_i \subset X_i$. La préimage $i_j^{-1}(\coprod_{i \in I} U_i) = U_j$ est exactement U_j . Si i_j est continue et \mathcal{U} ouvert, alors U_j est ouvert. Réciproquement, si chaque U_i est ouvert, alors sa réunion, c'est-à-dire \mathcal{U} est ouvert. \square

En particulier, si chaque X_i est connexe (resp. connexe par arcs) alors les composantes connexes (resp. connexes par arcs) sont exactement les X_i .

Lemme 8.2.6. Les applications continues de $\coprod_{i \in I} X_i$ dans un espace topologique W sont en bijection avec les familles d'applications continues $(X_i \xrightarrow{g_i} W)_{i \in I}$, la bijection étant donnée par les compositions avec les inclusions canoniques : $(\coprod X_i \xrightarrow{\psi} W) \mapsto (g \circ i_j)_{j \in I}$.

Plus précisément, la topologie coproduit est, à homéomorphisme près, l'unique espace C , muni d'applications continues $i_j : X_j \rightarrow C$, tel que pour toute famille d'applications $\psi_i : X_i \rightarrow W$, il existe une unique application $\psi : C \rightarrow W$ rendant le diagramme¹¹¹



commutatif.

Démonstration. La preuve de l'unicité est similaire à celle du lemme 8.2.3.

Une application (ensembliste) $f : \coprod X_i \rightarrow W$ est la donnée pour tout $i \in I$ et tout $x_i \in X_i$ d'un élément $f(x_i) \in W$. En notant $f_i := f \circ i_i$ on obtient donc que pour

111. on a représenté que deux objets X_i dans le diagramme mais ils y sont bien sûr tous

tout $i \in I$, $f(x_i) = f_i(x_i)$. Ceci montre que toute application continue $\coprod X_i \rightarrow W$ est uniquement déterminée par les restrictions $f_j := f \circ i_j$ aux composantes. Il reste à voir que f est continue si et seulement si les f_j le sont. C'est une conséquence immédiate de la description des ouverts données par le lemme 8.2.5. \square

Les deux exemples précédents de topologie (co)produit sont typiques des exemples de topologie (co)limite. La présentation de leur propriété universelle en terme de diagramme est facile et relativement anecdotique dans leur cas. Mais elle est en revanche le bon moyen de comprendre des exemples plus compliqués et le bon moyen de comprendre les généralisations dans des catégories quelconques de ces notions. Deux exemples du même type sont donnés par les produits fibrés (définition 2.3.32) et coproduit fibré/recollement (définition 2.3.16).

De manière générale ces constructions permettent de définir des topologies (ou objets dans des catégories générales) en recollant des espaces ou en considérant des sous-espaces vérifiant des conditions, de sorte que les topologies ainsi construites vérifient que pour construire des applications continues (vers ou issue de selon que l'on regarde une limite ou une colimite) il suffit de les connaître sur les diverses composantes.

8.2.1. Limites et (co)limites dans des catégories. Nous allons maintenant donner une définition générale de (co)limites dans une catégorie dont nous avons vu plusieurs exemples et en donner quelques exemples topologiques et autres.

Les limites et colimites sont associées à des diagrammes, c'est-à-dire un ensemble d'objets et de morphismes entre eux. La façon la plus simple de paramétrer un tel diagramme de manière générale est la suivante :

Définition 8.2.7. Un diagramme dans une catégorie \mathbf{C} est un foncteur $I \rightarrow \mathbf{C}$ où I est une petite catégorie, c'est-à-dire une catégorie avec un ensemble d'objets.

Pour une petite catégorie I fixée, un tel foncteur est appelé diagramme de forme I .

Il est recommandé, pour se convaincre que cette définition capture bien l'idée intuitive de diagramme, de faire quelques dessins avec des catégories simples (où on ne représentera pas les morphismes identités) comme celles associées à un graphe, ensemble partiellement ordonné ou discret.

En pratique la plupart des catégories que nous verrons dans ce cours seront associées à des ensembles partiellement ordonnés.

Exemple 8.2.8. Soit I un ensemble, vu comme une catégorie discrète (cf 1.0.8). Alors un diagramme est simplement une famille indexée par I d'objets de \mathbf{C} .

Prenons $I = \mathbb{N}$ vu comme un ensemble ordonné via la relation d'ordre. Un diagramme dans \mathbf{C} est alors juste la donnée suivante :

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \rightarrow \dots$$

à savoir une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'objets et des morphismes reliant deux objets d'indice consécutifs.

Exemple 8.2.9. Soit P la catégorie avec 3 objets a, b, c et deux flèches non triviales $a \rightarrow b$ et $c \rightarrow b$, alors un diagramme de type P est simplement la donnée de

$$X \xrightarrow{f} W \xleftarrow{g} Y$$

alors que pour la catégorie C avec 3 objets a, b, c et deux flèches non triviales $b \rightarrow a$ et $b \rightarrow c$, alors un diagramme de type C est simplement la donnée de

$$X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} Y$$

Définition 8.2.10 (Limites et colimites). Soit I une petite catégorie et $D : I \rightarrow \mathbf{C}$ un diagramme de type I dans une catégorie \mathbf{C} .

- Une **limite** de D est un objet $L_D \in \mathbf{C}$, muni de morphismes $\alpha_i : L_D \rightarrow D(i)$ pour tout objet $i \in I$ vérifiant que pour toute flèche $i \xrightarrow{f} j$ dans I , on a $\alpha_j = D(f) \circ \alpha_i$, et satisfaisant la propriété universelle suivante : pour tout objet Z , muni de morphismes $Z \xrightarrow{h_i} D(i)$ (pour tout objet i), vérifiant que pour toute flèche $i \xrightarrow{f} j$ dans I on a $h_j = D(f) \circ h_i$, il existe un **unique** morphisme $h : Z \rightarrow L_D$ vérifiant que pour tout objet $i \in I$, on a $h_i = \alpha_i \circ h$.
- Une **colimite** de D est un objet $C_D \in \mathbf{C}$ muni de morphismes $\beta_i : D(i) \rightarrow C_D$ pour tout objet $i \in I$, vérifiant que pour toute flèche $i \xrightarrow{f} j$ dans I , on a $\beta_j = \beta_i \circ D(f)$, et satisfaisant la propriété universelle suivante : pour tout objet W , muni de morphismes $D(i) \xrightarrow{f_i} W$ (pour tout objet i), vérifiant que pour toute flèche $i \xrightarrow{f} j$ dans I on a $f_j = f_i \circ D(f)$, il existe un **unique** morphisme $f : C_D \rightarrow W$ vérifiant que pour tout objet $i \in I$, on a $f_i = f \circ \beta_i$.

Lemme 8.2.11. *Si une limite de D existe, elle est unique à isomorphisme près. De même si une colimite existe elle est unique à isomorphisme près.*

En particulier on parlera de la limite ou colimite d'un diagramme.

Démonstration. Cela découle de l'unicité des morphismes h, f dans la définition comme dans la preuve du lemme 8.2.3. \square

Notation 8.2.12. On note en général $\lim_{i \in I} D(i)$ la limite d'un diagramme D et $\operatorname{colim}_{i \in I} D(i)$ la colimite d'un diagramme.

Remarque 8.2.13 (Autre terminologie pour les (co)limites). La limite d'un diagramme est aussi appelée parfois dans la littérature sa *limite projective* et notée

$$\lim_{\leftarrow i \in I} D(i) := \lim_{i \in I} D(i).$$

De même, une colimite est parfois appelée une *limite inductive* et notée

$$\lim_{\rightarrow i \in I} D(i) := \operatorname{colim}_{i \in I} D(i).$$

Remarque 8.2.14. La limite d'un diagramme est donc un objet qui s'envoie sur les objets du diagramme et qui est l'objet au travers duquel se factorise tout objet muni de flèches compatibles avec celles du diagramme (où le mot compatible pour les flèches $h_i : Z \rightarrow D(i)$ veut dire que $h_j = D(f) \circ h_i$ pour tout morphisme $f : i \rightarrow j$). Autrement dit il reçoit des morphismes de tout objet compatible avec le diagramme.

Pour la colimite la situation (en particulier le sens des flèches) est inversée. La colimite d'un diagramme est donc un objet muni de flèches provenant des objets du diagramme et qui est l'objet au travers duquel se factorise tout objet recevant des flèches compatibles avec celles du diagramme (où le mot compatible pour les flèches $h_i : D(i) \rightarrow W$ veut dire que $h_i = h_j \circ D(f)$ pour tout morphisme $f : i \rightarrow j$). Autrement dit il est la source d'un morphisme vers tout objet compatible avec le diagramme.

Notation 8.2.15. Soit I un ensemble vu comme une catégorie discrète (cf exemple 1.0.8). Alors un diagramme de forme I est équivalent à la donnée d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets et la *limite* de ce diagramme est appelée le produit indicé par I de la famille. Il est noté $\prod_{i \in I} X_i$.

La *colimite* de ce diagramme est appelé le *coproduit* et est notée $\coprod_{i \in I} X_i$.

Exemple 8.2.16. Il suit des lemmes 2.3.3 et 8.2.3 que les topologies produit et coproduit sont bien les produits et coproduits de la catégorie **Top**.

En revanche dans la catégorie des espaces pointés, le coproduit est différent. En effet dans **Top**_{*}, on a $\coprod_{i \in I} (X_i, x_i) \cong \bigvee (X_i, x_i) \cong \prod_{i \in I} X_i / (x_i \sim x_j, \forall i, j \in I)$ le bouquet des espaces X_i , muni du point base donné par la classe $[x_i]$ dans le quotient.

Exercice 8.2.17. Démontrer que les produits et coproduits *finis* (c'est-à-dire que I est fini) sont isomorphes dans \mathbf{Ab} ou $\mathbb{F}\text{-Mod}$ la catégorie des espaces vectoriels sur un corps \mathbb{F} .

Identifier les produits et coproduits infinis et vérifier qu'ils sont différents dans ces mêmes catégories.

Exemple 8.2.18. Dans toute catégorie \mathbf{C} , le produit fibré est la limite des diagrammes de forme P (comme défini dans l'exemple 8.2.9) alors que les coproduits fibrés sont les colimites des diagrammes de forme C comme défini dans 8.2.9.

Exercice 8.2.19. Démontrer ce qui est affirmé dans l'exemple 8.2.18. Démontrer également que la colimite d'un diagramme de forme P est juste W et que la limite d'un diagramme de forme C est A (en utilisant les notations de l'exemple 8.2.9).

Définition 8.2.20 (*Réunion topologique*). Soit $X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \rightarrow \dots$ une tour d'espace topologique, c'est-à-dire un foncteur de (la catégorie associée à) \mathbb{N} muni de sa relation d'ordre à valeur dans \mathbf{Top} . On appelle *Réunion topologique* de cette tour la colimite $\text{colim}_{i \in \mathbb{N}} X_i$ de ce diagramme dans \mathbf{Top} .

Lemme 8.2.21. *La réunion topologique existe pour toute tour $X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \rightarrow \dots$ et est donné par $\coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i / (f_i(x_i) \sim x_i)$.*

Si les f_i sont des inclusions de sous-espaces topologiques, alors, les applications canoniques $\alpha_i : X_i \rightarrow \text{colim}_{i \in \mathbb{N}} X_i$ sont injectives, on a que $\text{colim}_{i \in \mathbb{N}} X_i = \bigcup_{\mathbb{N}} \alpha_i(X_i)$ s'identifie à la réunion des X_i et que α_i est un homéomorphisme sur son image.

De plus F est fermé dans $\text{colim}_{i \in \mathbb{N}} X_i$ si et seulement si $F \cap \alpha_i(X_i) \cong F \cap X_i$ est fermé dans X_i (on identifie X_i avec son image vu la phrase précédente).

Démonstration. Le premier énoncé découle des propriétés universelles du coproduit et du quotient données dans les lemmes 2.3.3 et 8.2.6 et de l'unicité de la colimite.

Pour la deuxième affirmation, on commence par remarquer que deux point $x, y \in X_i$ ont la même image dans le quotient s'il existe $j \geq i$ tel que $f_j \circ f_{j-1} \circ \dots \circ f_i(x) = f_j \circ f_{j-1} \circ \dots \circ f_i(y)$. Par injectivité des f_k , il suit que $x = y$. Par définition, tout élément dans $\coprod X_i$ appartient à l'un des X_i . Il suit que tout élément de la colimite est dans l'image de l'une des applications α_i et donc que la réunion des $\alpha_i(X_i)$ recouvre la colimite. Le reste de l'argument découle du fait que puisque la topologie réunion est le quotient de la topologie coproduit, un sous-ensemble U de la colimite est fermé (resp. ouvert) si et seulement si $\alpha_i^{-1}(U) = \pi^{-1}(U) \cap X_i$ (où $\pi : \coprod X_i \rightarrow \text{colim} X_i$ est l'application quotient) est fermé (resp. ouvert) dans X_i pour tout $i \in \mathbb{I}$. \square

Exemple 8.2.22 (*Limite d'une tour*). Soit \mathbb{N} muni de sa relation d'ordre comme dans l'exemple 8.2.8. Un diagramme de type \mathbb{N}^{op} est une tour $\dots \rightarrow X_2 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_0} X_0$.

Dans la catégorie des espaces topologiques la limite de toute tour existe et est donnée par le sous-espace $\{(x_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n, \forall i \in \mathbb{N}, f_i(x_{i+1}) = x_i\}$ de l'espace produit $\prod_{\mathbb{N}} X_n$, c'est-à-dire par le sous-espace des suites compatibles aux f_i .

Exercice 8.2.23 (*Polynomes et séries formelles*). Soit A un anneau commutatif unitaire et considérons le diagramme dans \mathbf{Ring} , la catégorie des anneaux unitaires, donné par la tour $A_0[x] \hookrightarrow A_1[x] \hookrightarrow \dots$ donné par les inclusions des polynomes $A_i[x]$ de degré inférieur ou égal à i dans ceux de degré inférieur ou égal à $i + 1$. Alors $\text{colim}_{\mathbb{N}} A_i[x] \cong A[x]$ l'anneau des polynomes.

En revanche si on regarde le diagramme $\dots A_2[x] \twoheadrightarrow A_1[x] \twoheadrightarrow A_0[x]$ donné par les projections canoniques $A_i[x] \twoheadrightarrow A_i[x]/(x^i) \cong A_{i-1}(x)$, on obtient que la limite $\lim_{\mathbb{N}} A_i[x] \cong A[[x]]$ est isomorphe à l'anneau des séries formelles à coefficient dans A .

Le même calcul marche dans $A\text{-Mod}$ (mais donne seulement une structure de module) à la place de la catégorie des anneaux.

Exercice 8.2.24. Démontrer que dans **Top** toutes les limites et colimites existent.

Exercice 8.2.25. Démontrer que dans **Ab** toutes les limites et colimites existent.

RÉFÉRENCES

- [1] H. P. de Saint Gervais, **Analysis Situs** Topologie algébrique des variétés, site web disponible en ligne <http://http://analysis-situs.math.cnrs.fr/>
- [2] G. Bredon, *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 139. Springer-Verlag, New York, 1997
- [3] K. Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics, 87. Springer-Verlag
- [4] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view towards algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, 2004.
- [5] G. Friedman, *An elementary illustrated introduction to simplicial sets*, disponible sur ArXiv.
- [6] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002
- [7] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. Springer-Verlag, 1978
- [8] J. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [9] P. Schapira, *Categories and Homological Algebra*, Notes de cours, disponible en ligne : <https://webusers.imj-prg.fr/~pierre.schapira/lectnotes/>
- [10] E. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1966.
- [11] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994
- [12] G. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics, 61. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.