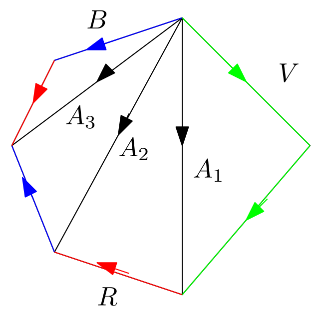


Figure 1: La somme connexe d'un tore et d'un plan projectif.

G. Ginot MAT 557 - Topologie Algébrique 3A - Polytechnique

Examen

**Exercice 1 (Une surface non-orientée).** On considère le modèle de la somme connexe d'un tore et du plan projectif donné par le complexe quasi-simplicial $X$ de la figure 1 où on identifie les arêtes bleues (resp. rouges et vertes) entre elles suivant l'orientation figurée. On notera $A_1, A_2, A_3$, $B, R, V$ les arêtes de ce complexe.

1. Calculer la caractéristique d'Euler de ce complexe quasi-simplicial $X$.
2. Calculer les groupes d'homologie quasi-simpliciale à coefficient dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de $X$.
3. Quels sont les groupes d'homologie de $X$ à coefficient dans $\mathbb{R}$ ?
4. Calculer les groupes d'homologie relatifs $H_*(X, A_1)$, $H_*(X, R)$.
5. Y-a-t'il un homéomorphisme de $X$ échangeant $A_1$ et $R$ ?
6. *Question bonus:* Déterminer l'*algèbre* de cohomologie $H^*(X)$.

**Exercice 2 (Calculs de $\mathrm{Ext}^1$).** Soit $A$ un anneau, et $M, L, K$ des $A$-modules.

1. Soit $x \in A$ non diviseur de zéro[1] et on note $A/(x)$ le quotient de $A$ par l'idéal $xA$. Calculer $\mathrm{Ext}^1_A(A/(x), M)$.
2. En déduire $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.
3. Montrer que $\mathrm{Ext}^\bullet_A(\oplus_{i\in I} M_i, N) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Ext}^\bullet_A(M_i, N)$.
4. Montrer qu'un groupe abélien de type fini $G$ est libre si et seulement si $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}) = 0$.

**Exercice 3 (Homologie d'un recollement).** Soit $f : A \to Y$ continue et $A \subset X$. On note $M_f := X \cup_{A\times\{0\}} A \times [0,1] \cup_{A\times\{1\}} Y$ l'espace obtenu par recollement en identifiant les points $(a, 1)$ avec $f(a) \in Y$ (pour $a \in A$). On notera simplement $X \cup_A Y$ le recollement $X \coprod Y/(f(a) \sim a)$ et $i : A \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique. *La question 2 peut se résoudre en utilisant la 1 ou bien par les méthodes classiques.*

1. Soit $M_*$ le cone de $f_* - i_*$, c'est à dire complexe défini par $M_n := C_{n-1}(A) \oplus (C_n(X) \oplus C_n(Y))$ avec la différentielle $\partial(a, b) = (-d(a), d(b) + f_*(a) - i_*(a))$.
   (a) Démontrer que l'on a une suite exacte de complexes $C_*(X) \oplus C_*(Y) \hookrightarrow M_* \twoheadrightarrow C_{*-1}(A)$ où $C_{*-1}(A)$ est muni de la différentielle $-d$.

[1] c'est à dire que si $xy = 0$ alors $y = 0$

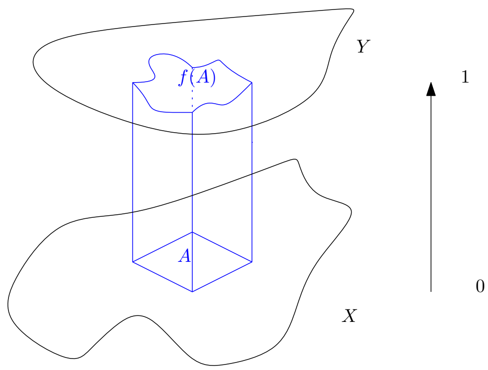


Figure 2: le cylindre $M_f$ de $f : X \supset A \to Y$.

(b) Démontrer que le complexe des chaines singulières $C_*(M_f)$ est quasi-isomorphe à $M_*$ (indic: utiliser Mayer-Vietoris ou les petites chaînes).

(c) On suppose de plus qu'il existe un voisinage $V$ dans $X$ tel que $A$ est un rétract par déformation forte de $V$. Démontrer que $C_*(X \cup_A Y)$ est quasi-isomorphe à $M_*$.

2. On prend $X = S^2$, $Y = S^1 \times S^1$ et $A = S^1$ un équateur de $X$. Soit $f$ la composée $S^1 \xrightarrow{g} \{1\} \times S^1 \hookrightarrow Y$ où $g$ est de degré 3. Calculer les groupes d'homologie de $X \cup_A Y$ à coefficient dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

**Exercice 4** (**Action de groupes sur des sphères).** Soit $G$ un groupe agissant librement sur une sphère $S^n$, c'est à dire que pour tout $g \neq e$ et $x \in S^n$, $g \cdot x \neq x$.

1. Démontrer que si $g \neq e$, alors l'application $\rho_g : x \mapsto g \cdot x$ est homotope à l'application antipodale $a : S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$ et en déduire que $\deg(\rho_g) = (-1)^{n+1}$.

2. On suppose que $n$ est pair. Montrer que $G$ est trivial ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**Exercice 5** (**Modules projectifs et un lemme standard d'algèbre homologique).**

Soit $f : X_* \to Y_*$ un quasi-isomorphisme de complexes de chaines concentrés en degrés positifs. On suppose que $f_i : X_i \to Y_i$ est surjectif en tout degré.

1. Démontrer que les groupes d'homologie du complexe $\mathrm{Ker}(f : X \to Y)$ sont tous nuls.

2. Soit $\psi : P_* \to Y_*$ un morphisme de complexes de chaines tels que les $P_n$ soient des modules projectifs. Le but de la question est de montrer qu'il existe un relèvement $h$ qui rende commutatif le diagramme de complexe de chaines

$$\begin{tikzcd} & X_* \arrow[d, "f"] \\ P_* \arrow[ur, dotted, "h"] \arrow[r, "\psi"'] & Y_*. \end{tikzcd}$$

(a) On suppose avoir construit $h_i : P_i \to X_i$ pour $i = 0 \dots n$ tel que $f_i \circ h_i = \psi_i$ et les $h_i$ commute avec les différentielles. Démontrer qu'il existe un morphisme linéaire $\tilde{h}_{n+1} : P_{n+1} \to X_{n+1}$ relevant $\psi_{n+1}$ de sorte que pour tout $p \in P_n$, $d \circ \tilde{h}_{n+1}(p) - \tilde{h}_n(dp)$ est un bord.

(b) Conclure à l'existence de $h$.