Homotopie et constructions d'espaces topologiques

Exercice 1. *(Quelques exemples, en vrac, d'espaces topologiques définis par leurs ouverts)*

1. (Topologie formée par les boules de même centre) Montrer que la famille des $B(0,r) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < r\}$ (pour $r \in [0,+\infty]$) forme une topologie sur $\mathbb{R}^2$? Est-elle séparée ? Se compare-t-elle à la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^2$?

2. (Droite réelle avec un point "double") On considère $E = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{0_A, 0_B\}$ où 0_A et 0_B sont deux points distincts n'appartenant pas à $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties de E de la forme :

   - soit $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $0 < \epsilon < |x|$,
   - soit $\{0_A\} \cup (]-\epsilon,\epsilon[\setminus\{0\})$ pour $\epsilon > 0$,
   - soit $\{0_B\} \cup (]-\epsilon,\epsilon[\setminus\{0\})$ pour $\epsilon > 0$.

   Montrer que $\mathcal{B}$ forme la base d'une topologie. Montrer que cette topologie n'est pas métrisable (on pourra supposer qu'elle l'est et regarder la distance entre 0_A et 0_B). Identifier la topologie induite sur $E - \{0_A, 0_B\}$.

3. (Topologie de Zariski) Soit $X = k^n$ où k est un corps.

   (a) On regarde le cas $k = \mathbb{R}$, $n = 1$. Démontrer que les complémentaires des $\{X \in \mathbb{R}, \exists P \in k[x]$ tel que $P(X) = 0\}$ définissent les ouverts d'une topologie appelée topologie de Zariski sur $\mathbb{R}$. Cette topologie sont-elle séparée ?

   (b) Dans le cas général, soit I un idéal de $k[x_1,\ldots,x_n]$. On note $V(I) := \{X \in \mathbb{R}, \forall P \in I$ on a $P(X) = 0\}$. Montrer que les $V(I)$ forment définissent les ouverts d'une topologie appelée topologie de Zariski et vérifier qu'on retrouve la question précédente.

Exercice 2. (Espaces séparés) Un espace topologique X est séparé si pour tout $x \neq y \in X$, il existe deux ouverts U_x, $U_y \subset X$ *disjoints* contenant respectivement x et y.

1. Démontrer que si X est séparé alors les singletons $\{x\}$ sont des fermés

2. Démontrer que Y est séparé si et seulement si sa diagonale $\Delta : \{(y,y), y \in Y\}$ est fermée dans $Y \times Y$. Montrer que si $f : X \to Y$ est continue, son graphe est fermé dans $X \times Y$. Que pensez vous de la réciproque ? Que se passe-t-il si Y n'est pas séparé ?

3. Soit $(P, \preceq)$ un ensemble (partiellement) ordonné. Pour $x \in P$, on introduit la partie :
$$D_x = \{y \in X \;/\; x \preceq y\}.$$
   Montrer que les ensembles D_x forment la base d'une topologie, appelée topologie droite, sur P. Montrer qu'une intersection d'ouverts est ouverte. Déterminer l'adhérence du singleton $\{x\}$.

4. Montrer qu'un ensemble ordonné muni de la topologie droite vérifie que pour tout $x \neq y \in P$, il existe un ouvert contenant l'un des points mais pas l'autre. Est-il séparé en général ?

Exercice 3 (Topologie quotient). Soit X un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation déquivalence sur X. On note $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ l'application qui à $x \in X$ associe sa classe d'équivalence $[x] \in X/\mathcal{R}$.

1. Démontrer la *propriété universelle* de la topologie quotient.

2. Montrer que si X est connexe alors $X/\mathcal{R}$ est connexe. Même question avec connexe par arcs.

3. Montrer que si $X/\mathcal{R}$ est séparé alors le graphe $\mathcal{R} = \{(x,y),\, x\mathcal{R}y\} \subset X \times X$ est fermé. Montrer que la réciproque est vraie si on suppose en plus que $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ est ouverte.

4. Si X est compact, alors $X/\mathcal{R}$ est séparé si et seulement si le graphe de $\mathcal{R}$ est fermé dans X.

5. Donner un exemple d'espace séparé X et de relation $\mathcal{R}$ tels que $X/\mathcal{R}$ soit muni de la topologie grossière. Donner un exemple d'espace non-séparé tel que $X/\mathcal{R}$ soit séparé.

Exercice 4. (cônes, recollements ...) Soit $f : X \to Y$ une application continue.

1. Le **cône sur** X est l'espace topologique quotient $C(X) := (X \times [0,1])/\big((x,1) \sim (y,1)\big)$. Montrer que X s'identifie[1] à un sous-espace fermé de $C(X)$ et que $X \mapsto C(X)$ est un foncteur dans la catégorie des espaces topologiques. Montrer que $C(X)$ est *contractile*.

2. Soit X, Y deux espaces topologiques, A une partie non-vide de X et $f : A \to Y$, une application continue. Le **recollement de** X **sur** Y **par** f est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y := (X \coprod Y)/\big(x \sim f(x),\, x \in A\big).$$

   (a) Donner un critère pour construire des applications continues $X \cup_f Y \to Z$ en fonctions d'applications continues $X \to Z$ et $Y \to Z$.

   (b) Montrer que si A est fermé, alors Y s'identifie à un sous-espace de $X \cup_f Y$. Si de plus X, Y sont compacts, montrer que $X \cup_f Y$ est compact.

Un peu d'homotopie

Exercice 5. (Configurations de points dans $\mathbb{C}$)

1. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ se rétracte par déformation sur l'ensemble X formé de la réunion des cercles de centre 0 et 1 et de rayon 1/2 (ne pas oublier de faire un dessin !).

2. Montrer que $C_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 \neq z_2\}$ se rétracte par déformation sur S^1 identifié à l'ensemble des couples $(0,u)$ pour $u \in S^1$.

3. Montrer que $C_3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, \text{distincts}\}$ se rétracte par déformation sur $S^1 \times X$.

Exercice 6.

1. Démontrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est homotope à $O_n(\mathbb{R})$ et n'est pas contractile (indic: utiliser la décomposition polaire).

2. Démontrer que la *bande de Mobius*, c'est à dire l'espace topologique quotient $[-1,1] \times [0,1]/(x,1) \sim (-x,0)$, est homotope à un cercle.

3. Soit T un triangle dans $\mathbb{R}^2$ (avec son interieur) et notons p, q, r ses sommets. On appelle *bonnet d'âne* le triangle dont on a identifié les arètes de la façon suivante: $[p,q]$ avec $[q,r]$ et $[p,q]$ avec $[p,r]$. Montrer que le bonnet d'âne est un espace contractile (en l'identifiant au cône d'une application du cercle dans lui-même, cf exercice suivant).

Exercice 7 (Cylindre et cône d'une application). Le **cylindre de** f est le recollement $Cyl(f) := X \times [0,1] \cup_{f \times \{0\}} Y$ où $f \times \{0\}$ est donné par $f \times \{0\} : X \times \{0\} \cong X \xrightarrow{f} Y$. Le **cône de** f est le recollement $C(f) := C(X) \cup_{f \times \{0\}} Y$.

1. Montrer que X et Y s'identifient à des sous-espaces fermés de $Cyl(f)$. À quoi est homotope $Cyl(f)$?

2. Montrer que si $f_0 : X \to Y$ et $f_1 : X \to Y$ sont homotopes, alors $Cyl(f_0)$ est homotope à $Cyl(f_1)$ et $C(f_0)$ est homotope à $C(f_1)$. En déduire que si $\psi : Y \to Y'$ est une équivalence d'homotopie alors $Cyl(f)$ et $C(f)$ sont respectivement homotopes à $Cyl(\psi \circ f)$ et $C(\psi \circ f)$.

[1] c'est à dire qu'il existe un homéomorphisme entre X et un sous-espace de $C(X)$.