Quelques exemples d'espaces topologiques et de propriétés topologiques

Exercice 1 (bouquets de cercles). On considère les espaces topologiques suivants :

1. A est l'espace topologique obtenu comme quotient de $\mathbb{R}$ (muni de la topologie usuelle) par le sous-*ensemble* $\mathbb{Z}$.
2. B est l'espace quotient du cercle unité S^1 par son sous-ensemble $\{1\} \cup \{\exp(2i\pi/n),\, n \in \mathbb{N}^*\}\big)$;
3. R_1 est le sous-espaces du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ donné par la réunion des cercles de rayon $n \in \mathbb{N}$ et tangents en $(0,0)$ à l'axe $y = 0$;
4. R_2 est le sous-espaces du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ donné par la réunion des cercles de rayon $1/n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et tangents en $(0,0)$ à l'axe $x = 0$;
5. $\bigvee_{\mathbb{Z}} S^1$ est l'espace topologique donné par le recollement de $X = \coprod_{\mathbb{Z}} S^1$ sur le point $Y = \{pt\}$ par l'unique application $f : F \to \{pt\}$ où $F = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \{x_n\}$ est une réunion de points (on choisit exactement un point par cercle).

Dire lesquels de ces espaces sont homéomorphes entre eux.

Exercice 2. (fonctions continues à valeur dans un espace séparé) Soient f et g deux fonctions continues sur un espace topologique X et à valeurs dans un espace topologique *séparé* Y.

1. Vérifier que l'ensemble $\{x \in X/\ f(x) = g(x)\}$ est un fermé de X.
2. Montrer que si $D \subset X$ est une partie dense et $f_{|D} = g_{|D}$, alors $f = g$. Exhiber un contre-exemple élémentaire (avec Y non-séparé bien sur).
3. On suppose que f est en plus injective. Montrer que X est séparé.

Exercice 3. (**Le tore**) Soit T_2 l'espace topologique quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (attention on quotiente par le groupe $\mathbb{Z}^2$, pas juste l'ensemble). On note $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ la projection canonique.

1. Montrer que T_2 se plonge dans $\mathbb{R}^3$ et est homéomorphe à $S^1 \times S^1$.
2. En utilisant les résultats du premier cours sur l'homologie, démontrer que T_2 n'est pas contractile.
3. Soit D_α une droite de pente $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, $\pi(D_\alpha)$ est homéomorphe à un espace topologique bien connu. Montrer que dans le cas contraire $\pi(D_\alpha)$ est dense dans T^2 et que $\pi_{|D_\alpha} : D_\alpha \to \pi(D_\alpha)$ est une bijection continue. Est-ce un homéomorphisme ?
4. On fixe maintenant $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et on munit T^2 de la relation $[x]\mathcal{R}'[y]$ ssi il existe une droite de pente α dans $\mathbb{R}^2$ telle que $[x]$ et $[y]$ sont dans $\pi(D)$. Montrer que $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence. Est-ce que $T^2/\mathcal{R}'$ est séparé ? Identifier la topologie du quotient $T^2/\mathcal{R}'$.

Exercice 4 (**Espaces projectifs réels et complexes).** L'espace projectif réel de dimension n est l'espace topologique des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui est, *par définition*, l'espace topologique quotient

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{R}^*$$

où le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ agit par multiplication scalaire. On définit de même *l'espace projectif complexe* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$. On note $[x_1 : \cdots : x_{n+1}]$ la classe d'équivalence dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ du point $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ (et de même dans $\mathbb{C}$). On définit aussi $\widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})} = S^n/\{\pm 1\}$, où $\{\pm 1\}$ agit sur la sphère comme précédemment. Enfin, on notera D^n la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.

1. On identifie dans cette question $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, et S^1 au cercle unité de $\mathbb{C}$.

   a) On considère la fonction $f(z) = z^2$ $(z \in S^1)$. Montrer que f définit par passage au quotient un homéomorphisme $\bar{f}$ de $\widetilde{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$ sur S^1.

   b) À quel espace topologique bien connu $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est-il homéomorphe ?

2. Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

3. Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\widetilde{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})}$ sont homéomorphes et qu'ils sont aussi homéomorphe à l'espace quotient $D^n/\sim$, où $x \sim x$ pour tout $x \in D^n$ et $x \sim -x$ pour tout $x \in S^{n-1} = \partial D^n$. Quel résultat analogue peut-on énoncer pour $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$?

4. Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont compacts[1].

5. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que l'image de H dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. Est-ce encore vrai pour $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$?

6. Soit $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $x \in X$ et D une droite ne passant pas par x. Démontrer que $X \setminus \{x\}$ est un rétracte par déformation de D.

7. Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ s'écrit comme une suite finie de recollements d'espaces topologiques simples.

Exercice 5. (La sphère S^3 obtenue par un "collage" classique) Montrer que S^3 est obtenue en recollant deux "tores pleins" $D^2 \times S^1$ au moyen de l'application identique

$$D^2 \times S^1 \supset S^1 \times S^1 \to^{\mathrm{Id}} S^1 \times S^1 \subset S^1 \times D^2.$$

Indication: On identifiera S^3 au sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ défini par l'équation $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ et les tores pleins aux sous-ensembles définis par $|z_1| \leq |z_2|$ et $|z_1| \geq |z_2|$.

Exercice 6. (**Topologie compacte-ouverte**) Soit X, Y deux espaces topologiques. On note Y^X l'espace des fonctions continues $Y^X := \{f : X \to Y,\ f \text{ continue }\}$. La topologie compacte-ouverte est la topologie usuelle sur l'espace des fonctions. Ses ouverts sont engendrés par les ensembles $\widetilde{U^K} = \{f : X \to Y\ ,\ f(K) \subset U\}$ pour tous $U \subset Y$ ouvert et $K \subset X$ compact.

1. Montrer que la topologie compacte-ouverte est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et montrer que si Y est séparé, Y^X est séparé.

2. On suppose maintenant X localement compact.

   (a) (*évaluation*) Montrer que l'application d'évaluation $ev : X \times Y^X \to Y$ définie par $ev(x, f) = f(x)$ est continue.

   (b) (*adjonction*) A toute application continue $f : X \times Y \to Z$, on associe l'application $\tilde{f} : Y \to Z^X$ définie, pour tout $y \in Y$, par $\tilde{f}_y = f(-, y)$. Vérifier que $\tilde{f}_y$ est bien dans Z^X.

   (c) (*loi exponentielle et composition*) On suppose que Y est localement compact et Z est séparé. Montrer que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ induit un homéomorphisme $Z^{X \times Y} \cong (Z^X)^Y$. Montre que la composition $(f, g) \mapsto g \circ f$ induit une application continue $c : Y^X \times Z^Y \to Z^X$.

   (d) Si Y, Z sont séparés, montrer que l'appplication qui à $(f, g) \in Y^X \times Z^X$ associe l'application $x \mapsto (f(x), g(x))$ induit un homéomorphisme $Y^X \times Z^X \cong (Y \times Z)^X$.

   (e) Donner des contre-exemples lorsque X n'est pas localement compact ou Y séparé.

3. Soit $x \in X$ un point de X. On note $P_*X = \{f : [0,1] \to X, f(0) = x\}$ l'**espace des chemins** (issus de x) muni de la topologie compacte-ouverte. Montrer que P_*X est contractile.

[1] on prendra garde de bien vérifier la définition de compact

Exercice 7 (Sur la topologie produit). Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. On rappelle que la topologie produit est la topologie sur $\prod_{i\in I} X_i$ dont une base d'ouverts est donnée par les pavés élémentaires $\prod_{i\in I} W_i$ où W_i est un ouvert de X_i et $W_i = X_i$ sauf pour un nombre *fini* de $i \in I$. On notera $p_i : \prod_{j\in I} X_j \to X_i$ les applications canoniques $(x_j)_{j\in I} \mapsto x_i$.

1. Montrer que la topologie produit est la topologie la moins fine rendant les applications p_i continues et rappeler pourquoi cette topologie est bien l'espace topologique produit des X_i dans la catégorie **Top**.

2. Montrer que les p_i sont des applications ouvertes. Sont-elles fermées en général?

3. Montrer que si les A_i sont des parties non vides des espaces topologiques X_i, on a que ΠA_i est dense dans ΠX_i si et seulement si chaque A_i est dense dans X_i.

4. Montrer qu'un produit d'espaces connexes est connexe pour la topologie produit. Quelle réciproque peut-on énoncer de ce fait ?

5. (**Une fausse topologie produit**) Soient T_i $(i \in I)$ une famille d'espaces topologiques.

   (a) Montrer que l'ensemble des pavés du type ΠU_i avec chaque $U_i \in \mathcal{T}_i$ non vide, forme la base d'une topologie. A quelle condition cette topologie coïncide-t-elle avec *la topologie produit* ?

   (b) Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas connexe lorsqu'il est muni de cette topologie.

   (c) On suppose maintenant que chaque X_i est métrique, de distance d_i, et que I est infini. Soit (Y, d) un autre espace métrique. À quelle condition une fonction f de Y dans le produit des X_i est-elle continue (pour la fausse topologie produit) ? Comparer avec le cas de la topologie produit usuelle.

6. (**Métrisabilité de la topologie produit**) Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques; on munit $\prod_{i\in I} X_i$ de la topologie produit. On suppose que les espaces X_i ont au moins deux points. Démontrer que $\prod_{i\in I} X_i$ est métrisable si et seulement si I est fini ou dénombrable et chaque X_i est métrisable.

Exercice 8. (Axiomes de séparation[2]) Soit X un espace topologique.

(T_0) X est T_0 (ou de Kolmogoroff) si pour tout point $x \neq y$, il existe un ouvert contenant l'un des points et pas l'autre.

(T_1) X est dit[3] T_1 si pour tout points $x \neq y$, il existe un ouvert U_x contenant x et pas y et un ouvert U_y contenant y et pas x.

(T_2) X est T_2 si il est séparé (on dit aussi que X est Hausdorff).

(T_3) X est T_3 ou **régulier** s'il est T_0 et vérifie en plus la propriété ($\widetilde{T}_3$): pour tout fermé F et point $x \notin F$, il existe des ouverts O_x, O_F disjoints contenant respectivement x et F.

(T_4) X est T_4 ou **normal** s'il est T_1 et vérifie en plus la propriété ($\widetilde{T}_4$): si A, B sont des fermés disjoints dans X, il existe des ouverts O_A, O_B disjoints contenant respectivement A et B.

1. Étudier les différentes relations d'implication entre les axiomes T_0, T_1, T_2,($\widetilde{T}_3$) et ($\widetilde{T}_4$) (donner des contrexemples s'il n'y a pas de relation d'implication; ne pas comparer ($\widetilde{T}_3$) et ($\widetilde{T}_4$)). Montrer qu'il existe des espaces qui ne satisfont aucun de ces axiomes et des espaces les satisfaisant.

[2]il convient de faire attention à la terminologie introduite qui, parfois, peut être légèrement différente suivant les auteurs

[3]parfois appelé de Fréchet, mais c'est une terminologie ambigue et non-univoque qu'il vaut mieux proscrire

2. Montrer qu'un espace X est (T_1) si et seulement si les points de X sont fermés. Montrer que si X est régulier, alors X est séparé. Montrer qu'un espace normal (*i.e.* (T_4)) est régulier (*i.e.* (T_3)).

3. Montrer qu'un produit ΠX_i d'espaces non-vides est *régulier* si et seulement si chaque X_i est régulier et qu'un sous-espace d'un espace régulier est régulier.

4. Montrer qu'un esapce compact est normal.

5. Montrer que si X contient un sous-ensemble dénombrable dense (*i.e.* est séparable) et un sous-ensemble discret fermé non-dénombrable, alors X n'est pas normal. En déduire que $(\mathbb{R}, \tau_{\text{lim sup}}) \times (\mathbb{R}, \tau_{\text{lim sup}})$ est régulier mais pas normal, où $(\mathbb{R}, \tau_{\text{lim sup}})$ est $\mathbb{R}$ de la topologie $\mathcal{T}_{\limsup}$ engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ et $]b, +\infty[$.

6. Montrer qu'un espace topologique X est $\widetilde{T}_4$ si et seulement si pour tout fermé A, B, il existe existe des ouverts $U_A \supset A$, $U_B \supset B$ tels que $\overline{U_A} \cap \overline{U_B} = \emptyset$

7. On munit le demi-plan $\overline{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq 0\}$ de la topologie engendrée par les ouverts euclidiens usuels sur $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$ et pour tout z sur l'axe $y = 0$ et $\epsilon > 0$ par les ensembles $\{z\} \cup D_{z,\epsilon}$ où $D_{z,\epsilon}$ est le disque dans H de rayon ϵ, tangent en z à l'axe $y = 0$. Montrer que $\overline{H}$ muni de cette topologie est régulier, non-normal (on pourra considérer les ensembles $A = \{(x, 0), x \in \mathbb{Q}\}$ et $B = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$.)

8. Terminer la comparaison entre les différents axiomes de séparation.

Exercice 9 (Un exemple de limite d'espaces discrets). Soit p un nombre premier et $\pi_{n \leqslant m} : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ la projection canonique obtenue en prenant les classes modulo p^n (n, m sont des entiers). Chaque $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est muni de la topologie discrète. On note $\mathbb{Z}_p := \lim\limits_{\leftarrow} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ l'espace topologique limite des $\pi_{n \leq m}$.

Démontrer que $\mathbb{Z}_p$ s'identifie au sous-ensemble

$$\lim_{\leftarrow} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} := \{(x_m)_{m \geq 0} \text{ tels que } \pi_{n,m}(x_m) = x_n\} \subset \prod_{m \geq 0} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$$

muni de la topologie la *moins fine* qui rende les applications canoniques[4] $\lim\limits_{\leftarrow} \mathbb{Z}/p^m \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ continues.

1. Montrer que $\lim\limits_{\leftarrow} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ s'identifie avec un sous-espace fermé du sous-espace topologique $\prod_{m \geq 0} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$. Déterminer la propriété universelle de $\lim\limits_{\leftarrow} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$[5]. Un produit d'espaces discret est-il discret ?

2. Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est un espace normal.

---

[4] données, pour tout m, par $(x_i) \mapsto x_m$

[5] c'est à dire une propriété décrivant cet espace comme l'unique espace topologique associé à des diagrammes similaires à ceux des exercices 1 et 2