Équivalences d'homotopie et exemples de catégories

Exercice 1 (Graphes et arbres). On appelle graphe un espace topologique non-vide obtenu en recollant[1] un ensemble G^1 d'intervalles $[0,1]$ sur un ensemble G^0 de points vu comme un space discret, les recollements se faisant en identifiant les extrémités des intervalles à des points de G^0. et arbre un graphe connexe qui n'admet pas de lacets.

1. Montrer qu'un arbre T est contractile et est un rétracte par déformation de n'importe quel sommet (indication: commencer par le faire pour un arbre fini. Puis, si T' est un sous-graphe contractile de T et $\gamma : [0,1] \to T$ est une arête telle que $\gamma(0) \in T'$ et $\gamma(1) \in T - T'$, montrer que l'on peut étendre l'homotopie entre T et un de ses sommets à $T \cup_{\gamma(0)} \gamma$.)
2. Montrer que tout graphe admet des sous-arbres maximaux (indication: utiliser le lemme de Zorn). Combien y-a-t-il de chemins entre 2 sommets d'un arbre ?
3. Soit G un graphe *connexe* et T un sous-arbre maximal. On note $q : G \to G/T$ la projection sur le quotient. Montrer que G/T est homéomorphe à un bouquet de cercles: c'est à dire l'espace quotient $\left(\coprod S^1\right)\Big/ \sim$ où $\sim$ est la relation déquivalence qui identifie tous les points base des différents cercles (on choisit, arbitrairement, un point base sur chaque cercle).
4. Construire une section $r : G/T \to G$ de q (Indication: fixer un sommet v_0 dans T et pour toute arete γ dans $G \setminus T$, considérer l'application $t \mapsto c_{\gamma(1)}^{-1} \circ \gamma \circ c_{\gamma(0)}$ où, pour tout sommet $v \in G$, $c_v : [0, 1/3] \to T$ est une paramétrisation d'un chemin de v_0 à v, c_v^{-1} est le chemin paramétré dans l'autre sens et $\gamma : [1/3, 2/3] \to G$ une paramétrisation de l'arête γ).
5. Montrer que $G \to G/T$ est une équivalence d'homotopie. En déduire qu'un graphe est contractile si et seulement si c'est un arbre.

Autour du degré et groupe fondamental

Exercice 2. (**Relèvement des angles et degré**) On identifie S^1 avec $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Soit $P(S^1) := \{f : [0,1] \to S^1,\ f \text{ continue}\}$ l'ensemble des applications continues de l'intervalle dans le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{C}$ et $P(\mathbb{R}) := \{f : [0,1] \to S^1,\ f \text{ continue}\}$ l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle dans $\mathbb{R}$. On munit $P(\mathbb{R})$ et $P(S^1)$ de la topologie de la convergence uniforme.

1. Montrer que les structures de groupe naturelle de $(S^1; \cdot)$ et $(\mathbb{R}, +)$ font de $P(S^1)$ et $P(\mathbb{R})$ des groupes topologiques (où la multiplication est ponctuelle).
2. Montrer que l'exponentielle $t \mapsto \exp(2i\pi t)$ induit un morphisme de groupes topologiques $P(\mathbb{R}) \xrightarrow{e} P(S^1)$ dont l'image est ouverte.
3. Montrer que $P(S^1)$ est connexe et en déduire le théorème de relèvement des angles.
4. Soit $f : S^1 \to S^1$ une application continue et $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un relèvement de $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1 \xrightarrow{f} S^1$ obtenu par la question précédente: $\tilde{f} = \exp(2i\pi\theta)$. On appelle **degré de** f l'entier $\deg(f) := \theta(1) - \theta(0)$.
   (a) Démontrer que le degré de f est indépendant du choix de θ.
   (b) Démontrer que si f est homotope à g, alors $\deg(f) = \deg(g)$.

[1] c'est à dire par la topologie quotient donc

5. **(Additivité du degré)** Soient $f, g : S^1 \to S^1$ deux applications continues telles que $f(1) = g(1)$. On a le produit ponctuel $(fg)(t) = f(t)g(t)$ de la question 1 et on note $f \star g$ le produit induit par la composition des lacets: $f \star g(t) = f(t^2)$ si $\operatorname{Im} t \geq 0$ et $f \star g(t) = g(t^2)$ si $\operatorname{Im} t \leq 0$ ("dessiner" ce produit et se convaincre qu'il ne s'agit que de la composition de lacets).

   (a) Montrer que fg et $f \star g$ sont continues, homotopes mais distinctes en général (indication: penser à utiliser l'unité).

   (b) Montrer que $\deg(fg) = \deg(f \star g) = \deg(f) + \deg(g)$.

6. En déduire que le degré induit un morphisme de groupes surjectif $deg : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ puis démontrer que deg est un isomorphisme de groupes.

Exercice 3. (degré et points fixes) Soit S^1 le cercle unité de $\mathbb{C}$.

1. Montrer qu'une application continue $S^1 \to S^1$ qui n'a pas de point fixe est homotope à l'identité.

2. En déduire que toute application de degré différent de 1 a un point fixe.

Exercice 4. (**Calcul du degré**) Soit $f : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ une application de classe C^1 et notons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\{0\}$ l'application définie par $g(\theta) = f(\exp(i\theta))$. Soit D le demi axe réel positif, c'est à dire la droite $D = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z > 0\}$. On suppose que pour tout $t \in S^1$ tel que $f(t) \in D$, f soit *transverse à* D à savoir que pour $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(i\theta) = t$ on a $\operatorname{Im} g'(\theta) \neq 0$. On dira que f coupe D positivement ou négativement en t suivant le signe[2] de $\operatorname{Im} g'(\theta)$ que l'on notera $\operatorname{sign}_t f$.

1. Montrer que l'ensemble $f^{-1}(D)$ est fini.

2. Soit t_1 et t_2 deux éléments de $f^{-1}(D)$ consécutifs sur le cercle. Notons $g_{t_1,t_2} : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un chemin fermé qui va de 1 à $f(t_1)$ dans D puis parcourt f entre t_1 et t_2 et revient à 1 dans D. Calculer son degré.

3. En déduire la formule: $\deg f = \sum_{t \in f^{-1}(D)} \operatorname{sign}_t f$.

Exemples de catégories et (co)limites

Exercice 5. Chercher des exemples de catégories et foncteurs. En construire de sorte que les ensembles de morphismes ne soient pas formés d'applications. Chercher des exemples d'équivalence de catégories et de transformations naturelles.

Exercice 6 ((co)limites dans Top Gp, Ab). On considère les catégories **Top** (resp. $\mathbf{Top}_*$) des espaces topologiques (resp. pointés).

1. Ces catégories ont elles des objets initiaux ou finaux ? Si oui, quels sont-ils ?

2. Montrer que **Top** admet toutes les (co)limites et identifier les produits, coproduits, et (co)produits fibrés explicitement.

3. Identifier, s'ils existent les (co)produits et (co)produits fibrés de $\mathbf{Top}_*$.

(1) Monter que le produit et le coproduit existe dans **Ab** et qu'ils sont isomorphes.

(2) Montrer que le produit et le coproduit existent dans **Gp** et les déterminer explicitement. On vérifiera qu'ils sont non-isomorphes.

[2] autrement dit selon que D coupe la courbe suivant le sens trigonométrique ou non

(3) En déduire que le produit de 2 groupes abéliens est le même si on le prend dans **Ab** ou **Gp** mais, qu'en revanche, le coproduit de 2 groupes abéliens diffère selon qu'on le prend dans **Ab** ou **Gp**.

Exercice 7. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs unitaires.

(1) Montrer que $(a, b) \mapsto f(a)b$ munit B d'une structure de A-module.

(2) Montrer que f induit un foncteur naturel $Rf : B-\mathbf{mod} \to A-\mathbf{mod}$ tel que $R_f(B) = B$ muni de la structure de A-module donnée par **(1)**.

Exercice 8. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On note $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ le foncteur identité et $\mathrm{End}(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ l'ensemble des endormorphismes de foncteurs de $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. Montrer que la loi de composition des morphismes se restreint à $\mathrm{End}(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ et est commutative.

Exercice 9. (épimorphismes, monomorphismes et isomorphismes) On rappelle qu'un monomorphisme dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un morphisme $f : X \to Y$ tel que pour tout $g_1, g_2 : Z \to X$ vérifiant $f \circ g_1 = f \circ g_2$ on ait $g_1 = g_2$.

Un épimorphisme est un morphisme $f : X \to Y$ tel que pour tout $h_1, h_2 : Y \to W$ vérifiant $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ on ait $h_1 = h_2$.

(1) Montrer que, dans la catégorie **Set** des ensembles, un morphisme est un monomorphisme (resp. épimorphisme) si et seulement si c'est une application injective (resp. surjective).

(2) Montrer que, dans la catégorie **Ring** des anneaux, le morphisme canonique $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ est un épimorphisme.

(3) Montrer que dans la catégorie **Top** des espaces topologiques, il existe des morphismes qui sont à la fois un épimorphisme et un monomorphisme mais pas un isomorphisme (indication : considérer $X \hookrightarrow Y$ un sous-ensemble dense de Y)

Exercice 10. (Catégorie et catégorie opposée) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On note $\mathcal{C}^{op}$ la catégorie qui a les mêmes objets que $\mathcal{C}$ et dont $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

(1) Vérifier que $\mathcal{C}^{op}$ est une catégorie et montrer que la catégorie **Set** des ensembles n'est pas équivalente à sa catégorie opposée (indication : si F est une telle équivalence vérifier que $F(\emptyset) = \{pt\}$ et étudier $F(\emptyset \times \emptyset)$).

(2) La catégorie **Rel** des relations a pour objets les ensembles et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rel}}(X, Y) = P(X \times Y)$ les parties du produit. Sa composition est définie pour $\mathcal{R} : X \to Y$, $\mathcal{R}' : Y \to Z$ par

$$\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} := \{(x, z) \in X \times Z,\ \exists y \in Y,\ (x, y) \in \mathcal{R} \text{ et } (y, z) \in \mathcal{R}'\}.$$

Quelles sont les unités ? Vérifier que l'on a bien une catégorie et démontrer qu'elle est équivalente à sa catégorie opposée.

(3) On va maintenant montrer que la catégorie des groupes abéliens finis est équivalente à sa catégorie opposée. On rappelle que tout groupe abélien fini est isomorphe à un unique groupe du type $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ où les entiers strictement positifs n_i vérifient $n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_r$.

i) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$; montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/\mathrm{pgcd}(n, p)\mathbb{Z}$; en déduire l'existence d'un isomorphisme de groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et le décrire explicitement.

ii) Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$; montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

iii) Soient G et H des groupes abéliens finis ; établir l'existence d'un isomorphisme de groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,H) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H,G)$.

iv) Soient G, H et K des groupes abéliens finis ; montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,H) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H,K) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,K) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K,H) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H,G) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K,G)
\end{tikzcd}$$

v) Montrer que la catégorie $\mathbf{Ab^f}$ des groupe abéliens finis est équivalente à la catégorie opposée $\left(\mathbf{Ab^f}\right)^{op}$.

Exercice 11. Montrer que $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est une équivalence de catégorie si et seulement si F est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.