Complexes de chaînes

Dans tous les exercices, A désigne un anneau unitaire et k un corps.

Exercice 1. (1) Soit $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M" \longrightarrow 0$ une suite exactes de $\mathbb{Z}$-modules finis. Montrer que $\#M = \#M' * \#M"$ où $\#M$ désigne le cardinal de M.

(2) Déterminer l'ensemble des $\mathbb{Z}$-modules M tels qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Toutes les suites exactes ainsi obtenues sont-elles scindées ? Que se passe-t-il si on considère seulement les suites exactes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-modules ?

Exercice 2. On considère une longue suite *exacte*

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \longrightarrow 0$$

de k-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que

$$\sum_{i\geq 0} \dim(M_{2i}) = \sum_{i\geq 0} \dim(M_{2i+1}).$$

Exercice 3. Soit A un anneau, M un A-module et N et P des sous-modules de M.
Soit $f : N \cap P \longrightarrow N \oplus P$, $x \longmapsto (x, x)$ et $g : N \oplus P \longrightarrow N + P$, $(y, z) \longmapsto y - z$.

(1) Montrer que la suite $0 \longrightarrow N \cap P \longrightarrow^f N \oplus P \longrightarrow^g N + P \longrightarrow 0$ est exacte.

(2) On choisit $A = k[X, Y]$, où k est un corps, $M = A$, $N = XA$ (c'est a dire le sous-module de $k[X, Y]$ formé des polynômes multiples de X) et $P = Y A$. Montrer que dans ce cas la suite exacte qui précède n'est pas scindée.

Exercice 4. (**Lemme des 5**) Considérons le diagramme commutatif de A-modules :

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & N_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & N_5
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes sont des suites exactes. Montrer que :

(1) si f_1 est surjective et f_2 et f_4 injectives, alors f_3 est injective.

(2) si f_5 est injective et f_2 et f_4 surjectives, alors f_3 est surjective.

Remarquons que ce lemme est utilisé souvent de la manière suivante **(à retenir)** :

(3) Si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

Exercice 5 (Lemme du Serpent). Soit A un anneau. On considère le diagramme commutatif de complexes de A-modules :

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[d, "d''"] \\
N' \arrow[r, "v"] & N \arrow[r, "q"] & N''.
\end{tikzcd} \tag{0.1}$$

En particulier $p \circ u = 0 = q \circ v$.

(1) Montrer que u, p et v, q induisent des applications linéaires naturelles $\tilde{u} : \ker d' \to \ker d$, $\tilde{p} : \ker d \to \ker d''$, $\bar{v} : \operatorname{coker} d' \to \operatorname{coker} d$ et $\bar{q} : \operatorname{coker} d \to \operatorname{coker} d''$ tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\ker d' \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, hook, "i'"] & \ker d \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, hook, "i"] & \ker d'' \arrow[d, hook, "i''"] \\
M' \arrow[r, "u"] & M \arrow[r, "p"] & M''
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\pi'"] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi"] & N'' \arrow[d, "\pi''"] \\
\operatorname{coker} d' \arrow[r, "\bar{v}"] & \operatorname{coker} d \arrow[r, "\bar{q}"] & \operatorname{coker} d''
\end{tikzcd}$$

(2) Montrer que $\tilde{p} \circ \tilde{u} = 0$ et que $\bar{q} \circ \bar{v} = 0$.

(3) Montrer que si u est injective alors $\tilde{u}$ l'est aussi.
Montrer que si q est surjective alors $\bar{q}$ l'est aussi.

(4) Montrer que si $\ker p = \operatorname{im} u$ et si v est injective alors $\ker \tilde{p} = \operatorname{im} \tilde{u}$.
Montrer que si $\ker q = \operatorname{im} v$ et si p est surjective alors $\ker \bar{q} = \operatorname{im} \bar{v}$.

(5) On suppose maintenant que le diagramme (0.1) est exact (c'est à dire $\ker p = \operatorname{im} u$ et $\ker q = \operatorname{im} v$) et que, de plus, v est injective et p surjective. Montrer alors qu'il existe une application linéaire naturelle $\delta : \ker d'' \to \operatorname{coker} d'$ et que la suite

$$0 \longrightarrow \ker d' \xrightarrow{\tilde{u}} \ker d \xrightarrow{\tilde{p}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\bar{q}} \operatorname{coker} d'' \longrightarrow 0$$

est exacte.

En pratique l'énoncé (5) est très utile. On l'utilise le plus souvent sous la forme suivante qu'il faut **impérativement retenir**: étant donné un diagramme commutatif de A-modules

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "v"] & N \arrow[r, "q"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont des suites exactes, on peut compléter de façon naturelle ce diagramme pour obtenir le suivant, appelé diagramme du serpent :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \ker d' \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, "i'"'] & \ker d \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "i"'] & \ker d'' \arrow[d, "i''"'] \arrow[dddll, bend left, "\delta"] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\pi'"'] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi"'] & N'' \arrow[r] \arrow[d, "\pi''"'] & 0 \\
 & \operatorname{coker} d' \arrow[r, "\bar{v}"] \arrow[d] & \operatorname{coker} d \arrow[r, "\bar{q}"] \arrow[d] & \operatorname{coker} d'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

et dans lequel :

$$0 \longrightarrow \ker d' \xrightarrow{\tilde{u}} \ker d \xrightarrow{\tilde{p}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\bar{q}} \operatorname{coker} d'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte.

Exercice 6 (Le lemme *fondamental* de l'Algèbre Homologique). Soit $(A_*, d_A) \xrightarrow{f} (B_*, d_B) \xrightarrow{g} (C_*, d_*)$ une suite exacte de complexes de chaines de A-modules.

1. Démontrer qu'il existe des applications A-linéaires $\delta_: H_n(C_*) \to H_{n-1}(A_*)$ *naturelles* qui font de la suite suivante

$$\cdots \to H_n(A_*) \xrightarrow{f_*} H_n(B_*) \xrightarrow{g_*} H_n(C_*) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A_*) \xrightarrow{f_*} H_n(B_*) \xrightarrow{g_*} H_{n-1}(C_*) \xrightarrow{\delta_{n-1}} H_{n-2}(A_*) \to \dots$$

   une suite exacte longue. Par la naturalité des δ_n, on entend qu'on peut les choisir de telle sorte que pour tout diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd} (A_*, d_A) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & (B_*, d_B) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & (C_*, d_*) \arrow[d] \\ (A'_*, d_A) \arrow[r, "f'"] & (B'_*, d_B) \arrow[r, "g'"] & (C'_*, d_*) \end{tikzcd}$$
   de suites exactes courtes de complexes, le diagramme induit de suites exactes longues est commutatif[1] (indic: utiliser le lemme du serpent).

2. En déduire que si
$$\begin{tikzcd} (A_*, d_A) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & (B_*, d_B) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & (C_*, d_*) \arrow[d] \\ (A'_*, d_A) \arrow[r, "f'"] & (B'_*, d_B) \arrow[r, "g'"] & (C'_*, d_*) \end{tikzcd}$$
   est une suite exacte de complexes de chaines dont deux des flèches verticales sont des quasi-isomorphismes, alors la troisième l'est.

Exercice 7. On considère un complexe C de A-modules

$$\dots \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n+2} \longrightarrow \dots$$

où $n \in \mathbb{Z}$. On fera l'abus de notation consistant à écrire simplement d au lieu de d_n. On dit que C est **scindé** si il existe des applications $s_n : C_n \to C_{n-1}$ ($n \in \mathbb{Z}$) telles que $d = dsd$ (en notant abusivement s au lieu de s_n).

(1) On suppose C scindé. Montrer que les applications $d_n s_{n+1}$ et $s_{n+1} d_n$ sont des projecteurs de C_n.

(2) On suppose toujours que C est scindé. Montrer que le complexe C est exact si et seulement si il existe $h_n : C_n \to C_{n-1}$ tels que $hd + dh = \mathrm{Id}$. On dit que les morphismes h sont des homotopies. Montrer que les applications h scindent C (c'est à dire dhd=d).

(3) On suppose que C est une suite exacte de A-modules libres **bornée supérieurement**, c'est à dire que $C_n = \{0\}$ pour $n \geq n_0$. Montrer que C est nécessairement scindé.

(4) Trouver un contre-exemple si C n'est pas supposé supérieurement borné (on pourra prendre $C_n = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $d = *2$).

[1] Autrement dit, on obtient un foncteur de la catégorie des suites exactes courtes de complexes de chaines vers celle des suites exactes longues de A-modules