Complexes simpliciaux et leur homologie

Exercice 1. Soit G un graphe fini (plongé dans $\mathbb{R}^n$) que l'on identifie à un complexe simplicial de dimension 1.

1. Calculer les groupes d'homologie de G en fonction de ses composantes connexes, nombre d'arètes et sommets.
2. On a vu en TD que que ce graphe est homotope à une réunion de bouquets de cercles. Calculer l'homologie de cette réunion de bouquets et comparer avecla qestion précédente.
3. Déduire de la première question l'homologie de la réunion des arêtes d'un tétraèdre de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Dans cet exercice on va calculer l'homologie à coefficient dans $\mathbb{Z}$ de triangulations de surfaces.

1. Pour le tore $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et le plan projectif $\mathbb{R}P^2$, les décomposer comme 2 triangles avec des recollements des arêtes; on appellera cela un complexe "quasi-simplicial", car différents sommets d'un simplexe peuvent être identifiés au recollement. On peut étendre les définitions de chaîne et d'homologie à ce cadre. Calculer l'homologie de ces complexes quasi-simpliciaux.
2. En subdivisant chaque triangle en quatre triangles (chaque arête est coupée en deux), obtenir des vraies triangulations de ces espaces et calculer leurs caractéristiques d'Euler.
3. Cacluler les groupes d'homologie de ces complexes simpliciaux et vérifier que ce sont bien les mêmes que ceux obtenus comme complexe quasi-simpliciaux.
4. En considérant le recollement d'un $2g$-gone de manière à ce qu'il n'y ait plus qu'un seul sommet, calculer les groupes d'homologie d'une surface orientée de genre g.

Exercice 3. On considère trois sphères de dimension 2, notée S_1, S_2 et S_3 plongées dans $\mathbb{R}^3$. On suppose qu'elles sont deux à deux tangentes extérieurement et on note $x_{ij} = S_i \cap S_j$. Soit $X = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

1. Construire un complexe simplicial K dont X est la triangulation.
2. Calculer les groupes d'homologie simpliciale de K.

Exercice 4 (Constructions de triangulations élémentaires)**.**

1. Trouver des triangulations du tore avec 7 sommets et de la sphère avec 4 sommets.
2. Soit Δ un n-simplexe. Construire une triangulation du prisme $\Delta^{n+1} \times [0,1]$ ayant $n+1$-simplexes de dimension $n+1$.

Exercice 5 (Invariance par collapse)**.** Soit K un complexe simplicial et on suppose donnés τ un simplexe de dimension maximale dans K, $\sigma \subset \tau$ une face de τ (obtenue en enlevant un sommet noté s) vérifiant que τ est la seule face de K contenant σ (dans cette situation, on dit que τ est une face libre de K). Le collapse de K par $(\sigma \subset \tau)$ est le complexe simplicial $c(K) := K \setminus \{\tau, \sigma\}$ en retirant les simplexes τ et σ (mais en gardant bien sur toutes les sous faces).

1. Démontrer que l'inclusion $c(K) \subset K$ induit un quasi-isomorphisme au niveau des complexes de chaînes; en particulier $H_i(c(K)) = H_i(K)$ pour tout entier i.

2. Utiliser le résultat précédent pour calculer facilement l'homologie de Δ^n.

Exercice 6 (Invariance du simplexe par subdivision)**.** Soit K le complexe simplicial associé[1] à un simplexe Δ^n de dimension n et K' une subdivision de K.

1. Montrer qu'il existe une subdivision K'' de K' et un sommet x de K tel que on peut réduire par une suite de collapse K'' à la face opposée à x. (Attention, en revanche, K' peut ne pas être collapsable même si c'est contre-intuitif).

2. Démontrer que le morphisme de complexe $C_*(K) \to C_*(K'')$ est un quasi-isomorphisme.

3. En déduire que le morphisme de complexe $C(K) \to C(K')$ donné par la subdivision est une injection en homologie.

4. *Cette question est beaucoup plus difficile.* On suppose avoir démontré que le morphisme de subdivision est un quasi-isomorphisme pour tout simplexe de dimension $\leq n-1$. En déduire que le morphisme de chaînes $C(K) \to C(K')$ donné par la subidivison est un quasi-isomorphisme.

Remarque: ceci est une première étape pour démontrer en utilisant des outils purement des complexes simpliciaux l'invariance par triangulation de l'homologie simpliciale (via une récurrence sur leur dimension bien entendu), que nous démontrerons via l'homologie singulière en cours.

[1] c'est à dire que K est composé de Δ^n et de toutes ses faces